# MODELOS DE OPTIMIZACION DINAMICA PARA LA FIRMA QUE MAXIMIZA VENTAS

JORGE E. FERNÁNDEZ POL*

## *Introducción*

El comportamiento y objetivo de una empresa constituyen elementos de gran importancia para la determinación de la clase y cantidad de las compras y ventas que la misma efectúa en un espacio de tiempo determinado. Tradicionalmente, se partió de la hipótesis que el fin de la empresa consiste en maximizar beneficios dentro de las circunstancias que le son dadas. Sin embargo, este supuesto fue cuestionado por algunos economistas —particularmente Baumol [1]— quienes sostuvieron, sobre la base de una observación detenida de la realidad, que no siempre es válido.

Así, se ha afirmado que un objetivo alternativo de la firma puede ser la maximización del valor monetario de la salida (ventas) para un nivel de beneficio dado. El argumento que permite racionalizar la hipótesis de maximización de ventas es sumamente simple: normalmente, un nivel bajo de ventas —absoluto o relativo— ocasiona desventajas notorias al desenvolvimiento de la firma (pérdida de distribuidores, escasa receptividad de los deseos de la empresa por parte de los bancos y el mercado de dinero, pérdida de poder monopólico, etc.); la importancia del volumen de ventas hace que el oferente centre su atención en él más bien que sobre el beneficio mismo (siempre que éste alcance un nivel que permita mantener satisfechos a los accionistas). En resumen, las circunstancias mencionadas anteriormente hacen que el oferente transforme a las ventas en el fin de la empresa.

La formulación analítica del plan económico a corto plazo de la firma que maximiza el ingreso total sujeto a una restricción de beneficio mínimo es bien conocida a partir de la obra de Baumol [1, caps. 6 y 7], y ha conducido a interesantes conclusiones, particularmente en lo que a propiedades cualitativas de las funciones de demanda de factores productivos se refiere (la posibilidad de existencia de *insumos Giffen* se discute en [7]). Debe tenerse presente, no obstante, que es sólo una descripción instantánea —cuya importancia nadie objeta— de un proceso evolutivo. Estrictamente hablando del análisis a corto plazo, resulta la siguiente regla: una vez determinado el precio del producto $p^*$, que confiere un máximo al ingreso total y satisface el requerimiento del beneficio mínimo, la firma debe continuar produ-

* Profesor de Microeconomía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. Investigador en el Instituto de Investigaciones Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

ciendo el volumen óptimo $x^*$ —correspondiente a $p^*$— ad infinitum, siempre que las condiciones de mercado y la tecnología permanezcan iguales.

De acuerdo a lo expuesto precedentemente, la limitación del planeamiento a corto plazo es evidente. De ahí entonces que resulta de gran importancia tener a nuestra disposición modelos que proporcionen criterios útiles para resolver problemas de toma de decisiones en un marco dinámico. ¿Cómo podemos determinar el curso del precio a través del tiempo de tal manera que confiera un máximo al valor capitalizado del ingreso y al cabo de $T$ años el valor capitalizado del beneficio tenga una magnitud dada? ¿Qué valores debe tomar a través del tiempo el parámetro de acción de un empresario cuando el objetivo de la firma es maximizar el valor capitalizado del ingreso y disponer del capital necesario para los fines de financiación de la empresa? Estas preguntas pueden responderse con la ayuda de las técnicas de optimización dinámica. En efecto, como lo haremos ver ulteriormente, la primera de ellas conduce a un problema *isoperimétrico*, mientras que la segunda puede responderse utilizando el *Principio de Máximo de Pontryagin.*

El empleo de los métodos de optimización temporal en el análisis económico ha permitido brindar explicaciones rigurosas a problemas sumamente importantes, tales como el análisis dinámico del monopolio [4]. Por otra parte, como lo ha demostrado recientemente el profesor Dorfman [2], los teoremas fundamentales de la teoría de la optimización dinámica pueden obtenerse mediante razonamientos de carácter estrictamente económico.

El propósito principal del presente trabajo es la construcción de modelos formales que permitan derivar criterios para la maximización de las ventas (descontadas) a largo plazo. Consideraremos dos modelos distintos que intentan responder las preguntas formuladas más arriba. El modelo I descansa en el supuesto que el oferente construye una función conjetural de salida precio dinámica para el producto que elabora y ofrece. En el modelo II, en cambio, estamos interesados en la relación que existe a largo plazo entre el ingreso y el beneficio contemplando los requerimientos de capital necesarios para financiar el crecimiento de la firma. Se supone en ambos modelos que la variable decisoria es el precio del producto.

## Modelo I

### I. 1. *Consideraciones preliminares*

Antes de enunciar los supuestos básicos, definiremos que se entiende aquí por función conjetural de salida-precio dinámica. Para ello, veamos como construye el oferente su función conjetural de salida-precio cuando efectúa un planeamiento a largo plazo. Supongamos que el oferente está en condiciones de fijar el precio de venta de la mercancía considerada mientras que los compradores determinan la cantidad que están dispuestos a comprar a ese precio teniendo también en cuenta el desarrollo de los precios en períodos posteriores. El oferente elabora (mentalmente) la función conjetural de salida-precio considerando dos elementos: el curso de los precios a través del tiempo, $p(t)$, y la tendencia del precio, $\mathring{p}(t)$, en el intervalo $[O, T]$.

Si establece el precio $p(t)$ con un tipo de crecimiento $\dot{p}(t)$, cree poder vender la cantidad $x(t)$. Se observa entonces, que a cada par $(p, \dot{p})$ asigna un número —único— no negativo $x$. Por lo tanto, la cantidad que planea vender resulta ser una función de $p$ y $\dot{p}$ que designaremos con la siguiente fórmula específica:

$$x(t) = x(p(t), \dot{p}(t)). \tag{1}$$

La aplicación (1), que denominaremos función conjetural de salida-precio dinámica, se refiere a una empresa de producción simple, pero, claro está, no existe óbice alguno para extender este concepto al caso de una empresa de producción múltiple.

*Observación I.*

Debe tenerse presente que una tendencia decreciente del precio,

$$\dot{p}(t) < 0,$$

normalmente, disminuirá la salida en el momento $t$, mientras que una tendencia alcista,

$$\dot{p}(t) > 0,$$

la aumentará y tanto más cuanto mayor sea el alza.

*Observación II.*

Si bien, naturalmente, la derivada de una función derivable está determinada una vez presentada la función, podría parecer innecesario mencionar la derivada tanto como la función, sin embargo, es conveniente enfatizar el carácter de la función conjetural de salida-precio dinámica mediante la notación explícita de la fórmula (1).

### I. 2. *Supuestos*

Las hipótesis básicas que nos van a servir como punto de partida para el análisis son las siguientes:

a) el fin de la empresa consiste en maximizar el valor capitalizado del ingreso total sujeto a un valor capitalizado (fijo) del beneficio en un espacio de tiempo $[O, T]$ que comprende varios períodos económicos;

b) el oferente cuenta con que la salida del producto que elabora depende del precio $p(t)$ que él fija y del tipo de crecimiento del mismo a través del tiempo, $\dot{p}(t)$;

c) la función de costo total mínimo para cada nivel de producción, $c = c(x)$, permanece inalterada en el lapso desde $t = 0$ hasta $t = T$ y es una función continuamente diferenciable con respecto a $x$;

d) el precio de la mercancía $p(t)$, como así también su derivada primera $\dot{p}(t)$, varía continuamente en el intervalo $[O, T]$;

e) la función conjetural de salida-precio dinámica es continua con respecto al par de variables $(p, \dot{p})$.

### I. 3. *Valor capitalizado del ingreso y del beneficio*

Si la cantidad $x$ se vende al precio $p\ (t)$ el ingreso y el beneficio —por unidad de tiempo— están dados respectivamente, por

$$R\ (p,\ \dot{p}) = p\,x\ (p,\ \dot{p}) \tag{2}$$

y

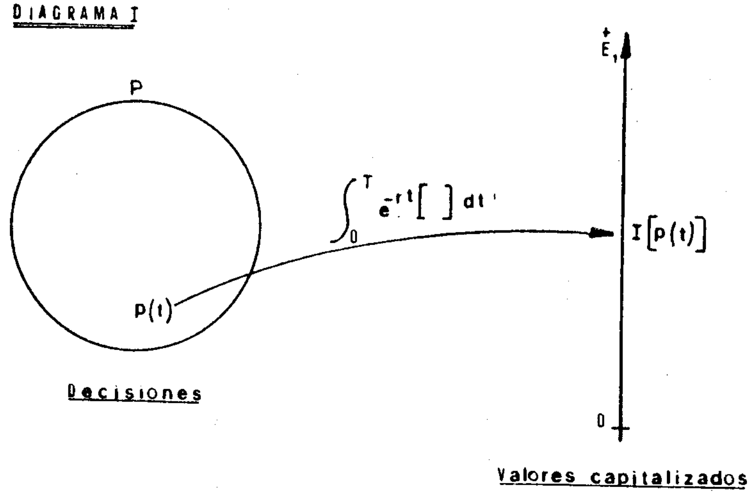
$$\pi\ (p,\ \dot{p}) = R\ (p,\ \dot{p}) - C\ [x\ (p,\ \dot{p})] \tag{3}$$

La función (3) proporciona la tasa a la cual se gana el beneficio neto en el instante $t$ como resultado de tomar la decisión $p\ (t)$. El valor capitalizado del ingreso referido al intervalo $[O,\ T]$ es la suma —extendida a todos los instantes— de las tasas, descontadas en $t = 0$, a los cuales se está vendiendo la mercancía. Analíticamente, podemos escribir

$$I = \int_O^T e^{-rt}\ R\ (p,\ \dot{p})\ dt, \tag{4}$$

siendo $r$ la tasa de interés del mercado (dada). Antes de avanzar un paso más en nuestra investigación, analicemos detenidamente la expresión (4): la integral hace corresponder a cada función $p\ (t)$ —esto es, a cada decisión— un valor capitalizado del ingreso, o sea que, técnicamente hablando, I resulta ser una funcional que depende de la función $p\ (t)$ ([5] pág. 62). En otras palabras, si llamamos $P$ a la clase de todas las funciones admisibles[1] y $E_1{}^+$, el conjunto de todos los números reales positivos, la integral (4) asocia a cada decisión $p\ (t)\ \epsilon\ P$ el correspondiente valor capitalizado del ingreso referido al intervalo $[O,\ T]$. El diagrama I puede ayudar a la intuición haciendo "ver" la ley de correspondencia

DIAGRAMA I




[1] La clase $P$ se define, rigurosamente, como sigue:

$$P = \{\ p\ (t)\ |\ p\ (t) > O \wedge p\ (t)\ \epsilon\ C'\ \forall t\ \epsilon\ [O,\ T]\ \}.$$

Resumiendo, podemos escribir la aplicación del conjunto de decisiones en $E_1^+$ con la notación habitual $I = P \to E_1^+$, o bien mediante una fórmula específica que nos será útil más adelante:

$$I\ [p\ (t)] = \int_0^T e^{-rt}\ R\ [p\ (t),\ \dot{p}\ (t)]\ dt. \tag{5}$$

Análogamente, el valor capitalizado del beneficio —que proporciona la suma de las tasas a la cual se gana el beneficio en cada instante $t$ descontadas la fecha inicial ($t = 0$) y sumadas para todos los instante— está definido por la funcional $U: P \to E_1^+$, que en fórmula específica se escribe

$$B\ [p\ (t)] = \int_0^T e^{-rt}\ \pi\ [p\ (t),\ \dot{p}\ (t)]\ dt. \tag{6}$$

Una vez presentadas estas consideraciones preliminares estamos en condiciones de pasar a analizar el problema central de la toma de decisiones en un contexto dinámico para alcanzar el objetivo establecido por el oferente.

### I. 4. *El problema de optimización dinámica*

Dado que el parámetro de acción del oferente es el precio de la mercancía, éste puede elegir, en principio, cualquier función $p\ (t) \in P$. Pero, como estamos suponiendo que el fin de la firma consiste en maximizar el valor capitalizado del ingreso —$I$— para un valor capitalizado (dado) del beneficio, seleccionará un sendero $p^*(t) \in P$ que maximiza $I\ [p\ (t)]$ y que —conjuntamente— satisfaga el requisito de beneficio mínimo.

Se plantea entonces la cuestión de hallar la decisión $p^*(t) \in P$ que confiera un máximo a la funcional

$$I\ [p\ (t)] = \int_0^T e^{-rt}\ R\ (p,\ \dot{p})\ dt$$

sujeto a (7)

$$B\ [p\ (t)] = \int_0^T e^{-rt}\ \pi\ (p,\ \dot{p})\ dt = \bar{B},$$

donde el nivel de $\bar{B}$ se determina teniendo en cuenta esencialmente que el mismo permita mantener a los accionistas satisfechos.

Hemos arribado así a un problema variacional de extremos vinculados —llamado problema *isoperimétrico*— que puede resolverse utilizando las técnicas del cálculo de variaciones([3], pp. 139-143). El procedimiento para el cálculo de la función $p^*(t)$ es esencialmente análogo al método de los multiplicadores de Lagrange de la teoría clásica de la optimización. Consiste en lo siguiente:

Se construye la funcional auxiliar

$$F\ (p,\ \dot{p}) \equiv e^{-rt}\ [R\ (p,\ \dot{p}) + \lambda\ \pi\ (p,\ \dot{p})], \tag{8}$$

siendo $\lambda$ una constante, y se procede a escribir la ecuación de *Euler* correspondiente a la funcional combinada (8)

$$\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{d}{d\,t}\ \frac{\partial F}{\partial \dot{p}} = 0. \tag{9}$$

Un valor capitalizado del ingreso máximo solamente puede alcanzarse a lo largo de las curvas integrales de la ecuación (9). Estas curvas integrales dependen de tres parámetros —$\lambda$ es uno de ellos— que se determinan mediante las denominadas condiciones de *contorno* y la condición *isoperimétrica*

$$\int_O^T e^{-rt}\ \pi\ (p,\ \mathring{p})\, dt = \bar{B} \tag{10}$$

Denotaremos la familia de curvas integrales —técnicamente denominadas *extremales*— como sigue:

$$p = p\ (t,\ c_1,\ c_2,\ \lambda) \tag{11}$$

*Observación III.*

Si el oferente fija el precio inicial

$$p\ (O) = p^0$$

y el precio en

$$t = T,\ p\ (T) = p^1,$$

los valores convenientes de las constantes arbitrarias pueden, en general, determinarse a través del sistema

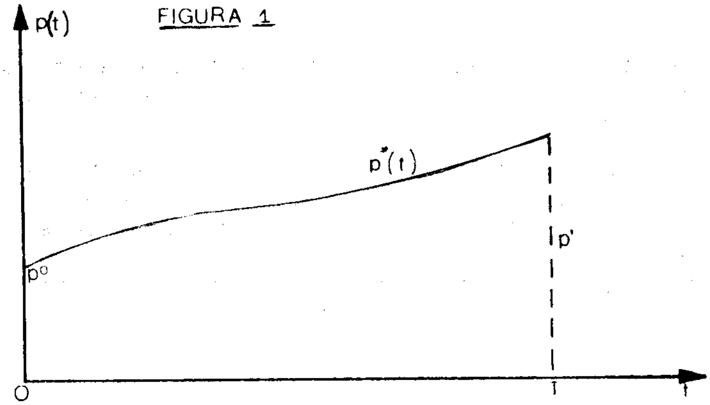
$$\begin{cases} p\ (O,\ c_1,\ c_2,\ \lambda) = p^0 \\ p\ (T,\ c_1,\ c_2,\ \lambda) = p^1 \\ \displaystyle\int_O^T e^{-rt}\ \pi\ dt = \bar{B} \end{cases} \tag{12}$$

Una vez resuelto el sistema (12), obtenemos una colección ($c_1^*$, $c_2^*$, $\lambda^*$), resultando entonces

$$p^*(t) = p\ (t,\ c_1^*,\ c_2^*,\ \lambda^*), \tag{13}$$

definida en $[O, T]$ (véase Figura 1).

FIGURA 1




El valor capitalizado del ingreso —normalmente máximo— se determina sobre la base de (5), o sea,

$$I\ [p^*(t)] = \int_O^T e^{-rt}\ R\ [p^*(t),\ \dot{p}^*(t)]\ dt \quad . \tag{14}$$

## MODELO II

### II. 1. *Objeto*

Es bien conocido que, a largo plazo, las ventas compiten con el beneficio de una empresa. En efecto, un nivel demasiado alto del beneficio reduce, por lo general, la cuantía de las operaciones de la firma, en tanto que un volumen sumamente bajo de aquél resulta ser un óbice importante para la expansión de la empresa (el beneficio es un medio para obtener el capital necesario para financiar los planes de expansión). El modelo que trataremos a continuación contempla precisamente la relación entre el beneficio y las ventas desde el punto de vista de un planeamiento a largo plazo. Nuestro primer paso consistirá en la presentación del modelo formal para poder luego enunciar los criterios pertinentes en un contexto matemático preciso.

### II. 2. *Enunciado del problema*

Denotemos con $f^o$ $(p, \pi, t)$ la tasa a la cual se efectúan las ventas en el momento $t$ (descontada en $t = o$) como consecuencia de establecer un beneficio $\pi$ y de tomar la decisión $p$. Entonces el ingreso total (descontado) referido al lapso $[O, T]$ se expresa —analíticamente— por

$$V = V\ [p\ (t)] = \int_{O}^{T} f^{o}\ [p\ (t),\ \pi\ (t),\ t]\ dt, \tag{15}$$

es decir, el valor capitalizado de las ventas es la suma para todos los instantes de las tasas a las cuales se efectúan las mismas en cada instante descontadas a la fecha inicial $t = o$.

Aún cuando el precio es el parámetro de acción del oferente, como en el modelo I, no puede seleccionarse independientemente del hecho que el beneficio guarda relación con el capital necesario para financiar la expansión de la firma. Esta restricción la expresamos escribiendo el tipo de crecimiento del beneficio a través del tiempo en función de la decisión tomada, $p\ (t)$, del beneficio vigente, $\pi\ (t)$, y del tiempo $t$:

$$\frac{d\,\pi}{dt} = f^{1}\ [p\ (t),\ \pi\ (t),\ t]. \tag{16}$$

Se supone que para cada valor inicial $\pi\ (O) = \pi_0$ la ecuación diferencial ordinaria no autónoma (16) posee una solución única $\pi\ (t)$ (también llamada trayectoria).

Veamos, antes de continuar con nuestra investigación, como formula el plan económico a largo plazo el oferente en cuestión. Primeramente, especifica un sendero cualquiera del precio a través del tiempo, que designamos $p\ (t)$ y suponemos que pertenece a la clase $P$ definida anteriormente[2]; técnicamente, $P$ recibe el nombre de *región de control* y se dice que $p\ (t) \in P$ es una función de control. Debe decidir también acerca de la extensión del horizonte económico y establecer cuál es el nivel inicial del beneficio que mantiene conformes a los accionistas. La colección

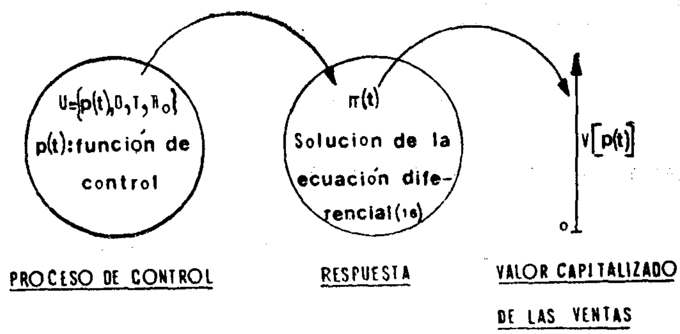
$$U = \left\{ p\ (t), O, T, \pi_0 \right\} \quad , \tag{17}$$

constituída por una función de control $p\ (t)$, un horizonte económico $[O, T]$ y un beneficio inicial $\pi_0$ se denomina *proceso de control*. Observemos que a cada proceso de control le corresponde una solución $\pi\ (t)$ —llamada *respuesta*— de la ecuación diferencial (16). Por lo tanto, para cada proceso

[2] Aquí suponemos que las funciones $p\ (t)$ son continuamente diferenciables pero el análisis puede extenderse al caso en que sean acotadas y seccionalmente contínuas (con discontinuidades de primera especie finitas).

de control $U$ existe un valor capitalizado del ingreso $V[p(t)]$ —dado por la fórmula (15)— que resulta ser una funcional definida en el conjunto de los procesos de control. El diagrama II sintetiza lo que hemos dicho hasta ahora.

DIAGRAMA II




En virtud de la hipótesis que la empresa trata de maximizar el valor capitalizado del ingreso, el oferente seleccionará aquel proceso de control

$$U^* = \left\{ p^*(t), O, T, \pi_0 \right\}$$

tal que se verifique

$$V[p(t)] \leq V[p^*(t)] \tag{18}$$

para cualquier otro proceso de control $U$ que lleve el punto $\pi(O) = \pi_0$ al $\pi(T) = \bar{\pi}$, esto es, tal que la respuesta satisfaga la condición

$$\pi(T) = \bar{\pi} \tag{19}$$

El proceso de control $U^*$ es, claramente, un *proceso de control óptimo*. La trayectoria $\pi^*(t)$ correspondiente a $U^*$ es una *respuesta óptima*. Resumiendo, el oferente elegirá la trayectoria $p^*(t)$ solución del siguiente problema de toma de decisiones en un contexto dinámico

$$\underset{p(t)}{\text{Máx.}} \left\{ V[p(t)] = \int_0^T f^0 (p, \pi, t)\, dt \right\} \tag{20}$$

sujeto a:

$$\frac{d\pi}{dt} = f^1 (p, \pi, t),$$

donde $\pi(O) = \pi_0$ está preasignado y se requiere, además, que $\pi(T) = \bar{\pi}$.

II. 3. *Condiciones necesarias para el óptimo* (*principio de máximo continuo*)

Resulta claro al tener en cuenta las consideraciones precedentes, que estamos ante un problema de control óptimo. Nuestro problema original (20) puede presentarse todavía en una forma alternativa sumamente útil para la aplicación del Principio de Máximo Continuo [6]. Definamos una nueva fucción $Z(t)$ tal que su derivada primera coincida con la tasa a la cual se realizan las ventas (descontadas), es decir,

$$\frac{dZ}{dt} = f^{o}(p, \pi, t) \quad , \quad t \in [O, T] \tag{21}$$

y observamos que, integrando respecto de $t$, resulta

$$Z(T) - Z(O) = \int_{O}^{T} f^{o}(p, \pi, t)\, dt = V \quad . \tag{22}$$

Si suponemos ahora que $Z(O) = O$, el problema de optimización dinámica enunciado al principio se reduce al siguiente

$$\underset{p}{\text{Máx.}}\ Z(T),$$

sujeto a:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ}{dt} = f^{o}(p, \pi, t) \\ \dfrac{d\pi}{dt} = f^{1}(p, \pi, t) \end{cases} \tag{23}$$

con las condiciones iniciales $\pi(O) = \pi_o$, $Z(O) = 0$. Es decir, se trata de detectar el proceso $U^*$ para el cual la solución $(Z^*(t), \pi^*(t))$ del sistema diferencial (23) que satisface las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \pi(O) = \pi_o \\ Z(O) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

confiere un máximo a $Z(T)$.

Estamos ya en condiciones de proceder a la aplicación del *Principio de Máximo Continuo de Pontryagin*: construímos la función *Hamiltoniana*, que resulta de multiplicar el miembro de la derecha de cada ecuación diferencial por su multiplicador de Lagrange asociado y sumar dichos productos,

$$H[p(t), \pi(t), \lambda_o(t), \lambda_1(t), t] = \sum_{j=0}^{1} \lambda_j(t)\, f^{j}[p(t), \pi(t), t], \tag{25}$$

y escribimos las condiciones necesarias para un máximo

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ &\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = -\frac{d\lambda_1}{dt} \\ &\frac{\partial H}{\partial \lambda_0} = \frac{dZ}{dt} \\ &\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \frac{d\pi}{dt}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

con las condiciones de contorno

$$\left\{\begin{aligned} &\pi(O) = \pi_0 \\ &Z(O) = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_0(T) = -1 \\ &\lambda_1(T) = 0. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

*Observación IV.*

Se supone que las funciones $f^j\ (p, \pi, t)\ (j = 0{,}1)$ son continuamente diferenciables dos veces con respecto a $\pi$, una vez con respecto a $p$ y son continuas con respecto a $t$.

*Observación V.*

El problema de optimización asociado al modelo que estamos tratando puede resolverse también recurriendo a las técnicas clásicas para problemas variacionales de extremos vinculados ([3], esp. pp. 136-139).

## REFERENCIAS


[1] BAUMOL, W. J.: *Business Behavior, Value and Growth*, Harcourt & World, Inc., 1967.

[2] DORFMAN, R.: "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", *American Economic Review*, Vol. 19 - Diciembre 1969, pp. 817-831.

[3] ELSGOLC, L. E.: *Calculus of Variations*, Pergamon Press Ltd., Addisson-Wesley Publishing Company Inc., 1962.

[4] EVANS, G. C.: *Mathematical Introduction to Economics*, Mc Graw-Hill Bock Company, Inc., 1930.

[5] KOLMOGOROV, A. N. y FOMIN, S. V.: *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Volumen I, Metric and Normed Spaces, Graylock Press, Rochester, N.Y. 1957.

[6] PONTRYAGIN, L. S., BOLTYANSKII, V. G., GAMKRALIDZE, R. V. y MISHCHENKO, E. F.: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, traducido por K. N. Trirogoff, Interscience Publishers, N.Y. 1965.

[7] PORTES, R. D.: "Imput Demand Functions for the Profit-Constrained Sales-Maximizer: Incomes Effects in the Theory of the Firm", *Economica*, August, 1968, pp. 233-248.

## MODELOS DE OPTIMIZACION DINAMICA PARA LA FIRMA QUE MAXIMIZA VENTAS

Resumen

Se analiza el plan económico a largo plazo de una empresa de producción simple cuyo fin es la maximización de ventas (descontadas). El parámetro de acción del empresario es el precio del producto. Con la ayuda de las técnicas de optimización temporal se presentan criterios matemáticos útiles para resolver dos problemas centrales en materia de toma de decisiones en un contexto dinámico: maximización del valor capitalizado del ingreso para un valor capitalizado (fijo) del beneficio (Modelo I) y maximización de ventas teniendo en cuenta los requerimientos de capital para financiar el crecimiento de la firma (Modelo II).

## OPTIMIZATION MODELS FOR A SALES - MAXIMIZING FIRM

Summary

This paper deals with the decision problem of a firm that whishes to maximize its total revenue —defined as the discounted present value of the future stream of returns— over some period of time. The decision variable is the price of output. To handle this problem some resources of the theory of functionals are used.