Económica La Plata, Vol. XXX, Nro. 1 Enero Abril, 1984

SOBRE LA VERSION STOCK DE LA TEORIA DE LA PRODUCCION

CARMEN SESSA*

En el presente trabajo se estudia la relación entre los conceptos de eficiencia y maximización de ganancia en un espacio de producción S descripto en versión "stock", sobre la base de los resultados obtenidos por H. Nikaido, en su libro Convex Structures and Economic Theory, N. York 1968 (chap. IV).

Se introduce para el espacio S una hipótesis destinada a asegurar que, si $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$ es un vector eficiente, el vector de precios para el cual constituye un maximizador de ganancia sea del tipo (p, p), de tal manera que los mismos bienes tengan idénticos precios como insumos y como productos.

1. Hagamos primero una revisión de las distintas hipótesis usuales concernientes al espacio de producción y de tres teoremas que relacionan la eficiencia con la ganancia.

   Un espacio de producción representa el conjunto de procesos productivos posibles bajo condiciones tecnológicas dadas.

   Este conjunto puede darse esencialmente de dos formas.

   1) $S \subset \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$; m representa la cantidad de mercancías distintas usadas como insumos en el conjunto de procesos productivos; n representa la cantidad de mercancías distintas que se obtienen como productos. S se denomina un espacio de producción en versión "stock". Si $(x,y) \in S$, x_j representa la cantidad de la j-ésima mercancía que se usó

La autora es licenciada en Matemática y ayudante de cátedra en el Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
El tema de este trabajo le fue sugerido por el profesor doctor Julio H.G. Olivera, en el curso de Economía Matemática mencionado en 1981.-

en el proceso e y_k representa la cantidad de la k-ésima mercancía que se obtuvo como producto.

2) $Y \subset \mathbb{R}^n$; n representa la cantidad de mercancías distintas que intervienen en la totalidad de procesos productivos, ya sea como insumos o como productos. Si $y \in Y$, $y_j > 0$ significa que la j-ésima mercancía es un producto en el proceso y e $y_j < 0$ significa que la j-ésima mercancía es un insumo en el proceso y . Y se denomina un espacio de producción en versión "flow".

Si una misma mercancía es a la vez insumo y producto en un proceso de producción, en S las cantidades correspondientes aparecen separadamente, mientras que en Y aparecen restadas una de otra, o sea se computa el producto neto.

1.1. En este trabajo se usará la siguiente notación:
Si $X \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$
1) $X \gg y$ significa $x_j > y_j$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant n$.
2) $X > y$ significa $x_j \geqslant y_j$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant n$ y $\exists_{j_0} : x_{j_0} > y_{j_0}$.
3) $X \geqslant y$ significa $x_j \geqslant y_j$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant n$.
Posibles hipótesis que pueden cumplir S y/o Y.

1. Rendimientos constantes a escala.

F_1 . $\lambda Y \subseteq Y \quad \forall \lambda \geqslant 0 , \lambda \in \mathbb{R}$.
S_1 . $\lambda S \subseteq S \quad \forall \lambda \geqslant 0 , \lambda \in \mathbb{R}$.

2. Convexidad.

F_2 . $y_1 , y_2 \in Y$, entonces $\forall\ t \in (0,1) t y_1 + (1-t) y_2 \in Y$
S_2 . $s_1 , s_2 \in S$, entonces $\forall\ t \in (0,1)\ t s_1 + (1-t) s_2 \in S$

3. Irreversibilidad.

F_3 . $x \neq 0 , x \in Y$ entonces $-x \notin Y$.
S_3 . $x \neq y$, $(x,y) \in S$ entonces $(y,x) \notin S$.

4. El espacio de producción es cerrado.

F_4 . Y cerrado
S_4 . S cerrado

5. Libre disponibilidad.

F_5 . $x \in Y , y \leqslant x$ entonces $y \in Y$
S_5 . $(x,y) \in S$, $\overline{x} \geqslant x$, $\overline{y} \leqslant y$ entonces $(\overline{x}, \overline{y}) \in S$

6. Imposibilidad de la tierra de Jauja.

F_6 . $y \in Y$, $y \geqslant o$ entonces $y = o$ $(Y \cap \mathbb{R}^n_{\geqslant o}) \subset \{o\}$

S_6 . $(x, y) \in S$, $x = o$ entonces $y = o$ $(S \cap \{o\} \times \mathbb{R}^m) \subset \{(o,o)\}$

1.2. Definición de eficiencia.

Sea Y un espacio de producción en versión "flow"

y_1, y_2 dos procesos en Y

y_1 **es más eficiente** que y_2 si y sólo si $y_1 > y_2$

Sea S un espacio de producción en versión "stock"

(x,y) , $(\overline{x}, \overline{y})$ dos procesos en S

(x,y) **es más eficiente** que $(\overline{x}, \overline{y})$ si y sólo si $\binom{-x}{y} > \binom{-\overline{x}}{\overline{y}}$

(o sea, si y sólo si $x \leqslant \overline{x}$, $y \geqslant \overline{y}$ y en alguna de las 2n coordenadas hay una desigualdad estricta).

Un proceso en un espacio de producción se dice **eficiente** si no hay otro en el espacio más eficiente que él.

1.3. Tres teoremas sobre eficiencia y ganancia.

Sea Y un espacio de producción en versión **"flow"**

Teorema F_1 Sean $p >> 0$, $\hat{x} \in Y$ tales que $p.\hat{x} \geqslant p.x$ $\forall x \in Y$, entonces $\hat{x}$ es eficiente.

Teorema F_2 Sea Y convexo, $\hat{x} \in Y$ eficiente, entonces existe $p > 0$ tal que $p\,\hat{x} \geqslant p\,x$, $\forall x \in Y$ (o sea $\hat{x}$ maximiza la ganancia sobre Y, para el sistema de precios p.)

Teorema F_3 Sea Y un cono convexo cerrado, $\{o\}$ un proceso eficiente en Y.
Entonces $\exists\, p >> 0$ tal que $p.y \leqslant 0 \; \forall y \in Y$

Sea ahora S un espacio de producción en versión **"stock"**.

Teorema S_1 Sean $p >> 0$, $q >> 0$ y $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$ un proceso que maximice la ganancia, es decir $q\,\hat{y} - p\,\hat{x} \geqslant q\,y - p\,x$ $\forall$ $(x,y) \in S$, entonces $(\hat{x}, \hat{y})$ es eficiente en S.

Teorema S_2 Sea S convexo, $(\hat{x}, \hat{y})$ un proceso eficiente en S, entonces existen $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ con al menos uno de ellos no nulo tal que $q\,\hat{y} - p\,\hat{x} \geqslant q\,y - p\,x \; \forall (x, y) \in S$ (o sea $(\hat{x}, \hat{y})$ es un proceso maximizador de ganancia para ese sistema de precios).

Teorema S_3. Sea S un cono convexo cerrado, (o,o) eficiente en S. Entonces existen $p >> o$, $q >> o$ tales que $qy - px \leq o$ $\forall\ (x,y) \in S$.

2. Nosotros vamos a considerar sin pérdida de generalidad $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, o sea se tomarán como insumos y como productos exactamente las mismas mercancías.
El axioma que cumplirá S con el resto de este trabajo, es el siguiente:
S_o : dados $(x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ tales que $y - x = \bar{y} - \bar{x}$ entonces $(x,y) \in S$ si y sólo si $(\bar{x},\bar{y}) \in S$.

O sea si un proceso productivo es posible, lo es también todo otro proceso que defina la misma producción neta que él.

Definimos dos aplicaciones. La primera es

$$\alpha : S \rightarrow S$$

$$\alpha((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = ((\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)),$$

donde

$$\bar{x}_k = \begin{cases} o & \text{si } y_k \geq x_k \\ x_k - y_k & \text{si } x_k > y_k \end{cases}$$

$$\bar{y}_K = \begin{cases} y_k - x_k & \text{si } y_k \geq x_k \\ o & \text{si } x_k > y_k \end{cases}$$

Por S_o, α está bien definida. A los procesos (x,y) y $\alpha(x,y)$ corresponde la misma producción neta.

Además se verifica $(x,y) = \alpha(x,y) + (a,a)$ para algún $a \in \mathbb{R}^n_+$

Definimos otra aplicación.

$$\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(x,y) = y - x$$

Se verifica 1) $\varphi^{-1}(\varphi(S)) = S$

2) $\varphi(\alpha(x,y)) = \varphi(x,y)$

3. En este punto demostraremos las propiedades de $\varphi(S)$.
Más precisamente, si S cumple alguno de los axiomas en versión **"stock"** $\varphi(S)$ lo cumple en versión **"flow"**.

3.1. S cumple S_1 $\Rightarrow$ φ (S) cumple F_1 (obvio)
3.2. S cumple S_2 $\Rightarrow$ φ (S) cumple F_2 (obvio)
3.3. S cumple S_3 $\Rightarrow$ φ (S) cumple F_3

Sea $Z \in \varphi(S)$, $Z = y - x$ con $(x,y) \in S$, si $Z \in \varphi$ (S) sería $-Z = \bar{y} - \bar{x}$ con $(\bar{x},\bar{y}) \in S$ pero (x,y) $(\bar{y},\bar{x})$ definen la misma producción neta, luego $(\bar{y},\bar{x}) \in S$, lo cual no puede ser si S cumple S_3.

3.4. S cerrado $\Rightarrow$ φ (S) cerrado.

Sea Z^n una sucesión de puntos en φ (S), $Z^n = y^n - x^n$ con $(x^n, y^n) \in S$, sea $(\bar{x}^n, \bar{y}^n) = \alpha (x^n, y^n)$, luego $Z^n = \bar{y}^n \; \bar{x}^n$ Supongamos que $Z^n \to Z$ en $\mathbb{R}^n$. Queremos verificar que $Z \in \varphi$ (S), para lo cual basta probar que existen $\bar{x},\bar{y}$ en $\mathbb{R}^n_+$ tales que $\bar{x}^n \to x$, $\bar{y}^n \to y$, porque entonces $Z = \bar{y} - \bar{x}$ y $(\bar{x},\bar{y}) \in S$ Para cualquier k $1 \leqslant k \leqslant n$, sea Z_k la coordenada k-ésima de Z, puede pasar $Z_k < o$, $Z_k = o$, $Z_k > o$

i) Si $Z_k < o \Rightarrow \exists n_o$ tal que para todo $n \geqslant n_o$, $Z^n_k < o$; luego, $\bar{x}^n_k = x^n_k - y^n_k$, $\bar{y}^n_k = o$, $\forall n \geqslant n_o$; o sea $\bar{x}^n_k = -Z^n_k$, $\bar{y}^n_k = o \; \forall n \geqslant n_o$; luego $\bar{x}^n_k \to -Z_k$, $\bar{y}^n_k \to o$

ii) Si $Z_k = o \Rightarrow$ $\in > o$, $\exists n_o$: $n \geqslant n_o \; | Z^n_k| < \in$ Como $\bar{x}^n_k = o$ ó $\bar{x}^n_k = = Z^n_k$ e igualmente con $\bar{y}^n_k$, pasa siempre que $|\bar{x}^n_k| \leqslant |Z^n_k|$ y $|\bar{y}^n_k| \leqslant |Z^n_k|$ con lo cual $\bar{x}^n_k \to o$ y $\bar{y}^n \to o$.

iii) similarmente a lo expresado en i):

si $Z_k > o$, $\bar{x}^n_k \to o$, $\bar{y}^n_k \to Z_k$.

Luego el límite buscado es $(\bar{x},\bar{y})$ donde

$$\bar{x}_k = \begin{cases} -Z_k & \text{si } Z_k < o \\ o & \text{si } Z_k \geqslant o \end{cases} \qquad \bar{y}_k = \begin{cases} o & \text{si } Z_k < o \\ Z_k & \text{si } Z_k \geqslant o \end{cases}$$

3.5. S cumple S_5 $\Rightarrow$ φ (S) cumple F_5.

Sea $Z \in \varphi$ (S), $Z = y - x$ con $(x,y) \in S$, y sea $Z' \leqslant Z$, entonces es $Z - Z' \geqslant o$, $Z - Z' \in \mathbb{R}^n$, entonces $(x + (Z - Z'), y) \in S$, pues S cumple S_5 ; luego $Z' = y - (X + Z - Z')$ o sea $Z' \in \varphi$ (S).

3.6. S cumple S_6 $\Rightarrow$ φ (S) cumple F_6

Sea $Z \geqslant o$, si $Z \in \varphi$ (S), entonces $Z = y - x$ con $(x, y) \in S$ pero $Z \geqslant o \Rightarrow y\text{-}x \in \mathbb{R}^n_+$, entonces $(o, y\text{-}x) \in S$; y como S verifica S_6 se sigue que $y\text{-}x = o$, o sea $Z = o$.

4. Veamos ahora como se traslada la relación de eficiencia de S a Sean $E_S = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in S$: $(\hat{x}, \hat{y})$ eficiente en $S\}$.

$E_{\varphi(S)} = \{Z \in \varphi$ (S): Z eficiente en $\varphi(S)\}$.

se demostrará lo siguiente: $\varphi^{-1}(E_{\varphi(S)}) = E_S$

Para ello probaremos que:

4.1. Si $\bar{Z}$ eficiente en $\varphi(S)$, $\bar{Z} = \bar{y} - \bar{x}$, con $(\bar{x},\bar{y}) \in S$, entonces $(\bar{x},\bar{y})$ es un proceso eficiente en S.

4.2. Si $(\bar{x},\bar{y})$ es un proceso eficiente en S, entonces $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ es un proceso eficiente en φ (S).

Demostración de 4.1.

Si no fuera así existiría $(x,y) \in S$ tal que $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} -\bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$; entonces, con $Z = y - x$, resultaría $Z > \bar{Z}$; luego $\bar{Z}$ no sería eficiente.

Demostración de 4.2.

Sea $\bar{Z} = \bar{y} - \bar{x}$, $\alpha(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}_1, \bar{y}_1)$, luego $\bar{Z} = \bar{y}_1 - \bar{x}_1$. Supongamos que $\bar{Z}$ no es eficiente en φ (S), luego existirá $Z \in \varphi$ (S) con $Z > \bar{Z}$; y será $Z = \varphi(x,y) = \varphi(\alpha(x,y)) = y_1 - x_1$ $(\alpha(x,y) = (x_1, y_1))$.

Pero $Z > \bar{Z}$ dice que, si $Z_k > o$, $Z_k \geqslant \bar{Z}_k$; y si $Z_k \leqslant o$, entonces $\bar{Z}_k \leqslant o$; esto da $y_1 \geqslant \bar{y}_1$.

Y también si $Z_k \leqslant o$, entonces $Z_k > o$, y si $\bar{Z}_k \leqslant o$, entonces $\bar{Z}_k \leqslant Z_k$; y esto da $x_1 \leqslant \bar{x}_1$. Además, como $Z_k > \bar{Z}_k$ para algún k, se tiene $\begin{pmatrix} -x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} -\bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix}$, o sea (x_1, y_1) es más eficiente que $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Ahora bien, como $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \alpha(\bar{x},\bar{y})$ esto implica que $\exists\, a \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $\bar{x} = \bar{x}_1 + a$ y $\bar{y} = \bar{y}_1 + a$.

Si consideramos ahora $x = x_1 + a$, $y = y_1 + a$ el proceso (x,y) es más eficiente que $(\bar{x},\bar{y})$, contra la hipótesis.

En 4.2. se demostró lo siguiente:

Si (x,y) es más eficiente que $(\overline{x},\overline{y})$ y si (x_1,y_1) es otro proceso productivo con la misma producción neta que $(\overline{x},\overline{y})$, entonces hay un proceso $(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ con la misma producción neta que $(\overline{x},\overline{y})$ y tal que (x_1,y_1) más eficiente que $(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$.

Lo cual dice que si un proceso es eficiente en S, también lo es cualquier otro proceso que defina la misma producción neta.

5. Con todo esto los teoremas S_1', S_2', S_3' resultan de aplicar TF_1, TF_2 y TF_3 a $\varphi(S)$

Teorema S_1' Sea $p >> o$ y $(\hat{x},\hat{y}) \in S$ tal que $p\hat{y}-p\hat{x} = \text{máx}\{py - px: (x,y) \in S\}$ Entonces $(\hat{x},\hat{y})$ es eficiente en S.

Demostración: $p.\varphi(\hat{x},\hat{y}) \geqslant p.\varphi(x,y)\ \forall (x,y) \in S$, luego aplicando el teorema F_1 a $\varphi(S)$, $\varphi(\hat{x},\hat{y}) \in E_{\varphi(S)}$ y por lo visto antes, de esto se desprende que $(\hat{x},\hat{y}) \in E_S$.

Teorema S_2' Sea S convexo, $(\hat{x},\hat{y})$ un proceso eficiente en S, entonces existe $p > o$ tal que $p\hat{y}-p\hat{x} \geqslant py-px,\ \forall (x,y) \in S$.

Demostración: S convexo $\Rightarrow \varphi(S)$ convexo; $(\hat{x},\hat{y})$ eficiente en S $\Rightarrow (\hat{y}-\hat{x})$ eficiente en $\varphi(S)$. Luego $\exists\, p > o$ tal que $p(\hat{y}-\hat{x}) \geqslant p(y-x)\ \forall (x,y) \in S$ (por TF_2).

Teorema S_3' Sea S un cono convexo cerrado, (o,o) eficiente en S. Entonces $\exists\, p >> o : py - px \leqslant o\ \forall (x,y) \in S$.

Demostración: S cono convexo cerrado $\Rightarrow \varphi(S)$ cono convexo cerrado; luego, por el teorema F_3, $\exists\, p > o$ tal que $p.Z \leqslant o\ \forall Z \in \varphi(S)$ o sea $py - px \leqslant o\ \forall (x,y) \in S$.

6.. Por último veamos en este parágrafo cómo las hipótesis S_i implican otras más fuertes siempre que se verifique S_o.

S_3' : Sea $x \neq y$, $(x,y) \in S$; entonces $(\overline{y},\overline{x}) \notin S$, $\forall (\overline{y},\overline{x})$ tal que $\overline{y} - \overline{x} = y - x$.

S_3 y $S_o \Rightarrow S_3'$

S_5' : Sea $(x,y) \in S$, $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ tal que $y_1 - x_1 \leqslant y - x$ entonces $(x_1,y_1) \in S$

S_5 y $S_o \Rightarrow S_5'$ Sea $\alpha(x,y) = (\overline{x},\overline{y})$, $\alpha(x_1,y_1) = (\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ como $\overline{y}_1 - \overline{x}_1 \leqslant \overline{y} - \overline{x}$, esto da $\begin{cases} \overline{y}_1 \leqslant \overline{y} \\ \overline{x}_1 \geqslant \overline{x} \end{cases}$

luego por S_5, $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in S$ y por S_o $(x_1, y_1) \in S$.

S_6' : Si $(x,y) \in S$, $y \geqslant x \Rightarrow y = x$

S_6 y $S_o \Rightarrow S_6'$. Si $y \geqslant x \Rightarrow y - x \in \mathcal{R}_+^n$, luego $(o, y - x) \in S$ (por S_o), de donde $y - x = o$ (por S_6), o sea $x = y$.

SOBRE LA VERSION STOCK DE LA TEORIA DE LA PRODUCCION

RESUMEN

En este trabajo se estudia la relación entre los conceptos de eficiencia y maximización de ganancias en un espacio de producción S descripto en versión "stock", sobre la base de los resultados obtenidos por H. Nikaido en *CONVEX STRUCTURES AND ECONOMIC THEORY*, N. York 1968 (chap. IV).

Se introduce para el espacio S el siguiente exioma

S_o: "dados $(x,y) \in \mathcal{R}_+^m \times \mathcal{R}_+^m$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{R}_+^m \times \mathcal{R}_+^m$ tales que $y - x = \bar{y} - \bar{x}$, entonces $(x, y) \in S$ si y solo si $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$".

O sea si un proceso productivo es posible, lo es también todo otro que defina la misma producción neta que él.

Para un espacio S que cumpla S_o se estudia la relación de eficiencia y se obtiene el siguiente teorema S_2'

Teorema S_2'

Sea S convexo, $(\hat{x}, \hat{y})$ un proceso eficiente en S, entonces existe $p \in \mathcal{R}^m$, $p > o$ tal que $(\hat{x}, \hat{y})$ es un proceso maximizador de ganancia para el sistema de precios p, o sea $p\hat{y} - p\hat{x} \geqslant py - px$, para todo (x,y) en S.

Se obtiene, entonces, que el vector de precios para el cual un proceso eficiente es un maximizador de ganancia es del tipo (p, p).

ON THE VERSION STOCK OF PRODUCTION THEORY

SUMMARY

The present paper deals with the relation between efficiency and profit maximization in a stock version production set considering the results obtained by H. Nikaido in Convex Structures and Economic Theory, N. York, 1968. Chap. IV.

The production set will be given such a hypothesis so as to ensure that goods involved in a profit maximization provess will have the *some price* as imput or output.

Besides, this hypothesis will make stronger the efficiency relation as well as the diferent properties a stock version production set may fulfil.