

## EQUILIBRIO GENERAL Y TRIBUTACION OPTIMA

ROLF R. MANTEL \*

### 1. Introducción.

En la teoría de la tributación óptima pueden distinguirse dos problemas importantes. El primero se refiere a un problema de consistencia, y es el de la demostración de la existencia de soluciones de equilibrio en una economía, para un sistema tributario exógenamente dado. El segundo es de orden normativo, y corresponde al diseño de un sistema tributario de acuerdo con criterios apropiados.

Estos dos puntos han sido analizados en un reciente e importante artículo de Guesnerie (1979) para el caso de impuestos a la compra-venta de mercancías, es decir, de impuestos indirectos. El objeto del presente trabajo es en cambio considerar un modelo más general, en el que los tributos también pueden ser directos. Por supuesto que es necesario considerar explícitamente las restricciones que tiene el gobierno sobre las posibilidades de imponer tributos sobre la población, pues de otro modo se caería en el caso ya muy estudiado en el que siempre es posible alcanzar un óptimo de Pareto por meras transferencias de ingresos.

No se entrará en muchos detalles sobre el primero de los dos puntos mencionados, ya que el mismo ha sido tratado ampliamente en la literatura. Posiblemente el modelo más general para el que se haya demostrado la existencia del equilibrio para un sistema tributario dado aun es el del autor (Mantel, 1975); se remite al lector a dicho trabajo para referencias sobre otros artículos sobre el tema, a las que habría que agregar el artículo de Shafer y Sonnenschein (1976) y el de Guesnerie (1979).

En el presente artículo se analizará con algún detalle la cuestión del diseño de un sistema tributario óptimo. Para tal fin se simplificará considerablemente un modelo previo (Mantel 1975) siguiendo en parte

\* El autor es Profesor Titular en las Universidades de Buenos Aires y Católica Argentina, y miembro de la Carrera del Investigador en el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas con lugar de trabajo en el Centro de Estudios Macroeconómicos de Argentina.

lineamientos utilizados ya anteriormente (Mantel, 1970) para poder llegar a conclusiones más precisas sobre la estructura del conjunto de asignaciones de bienes y servicios resultantes de la aplicación de sistemas tributarios óptimos. Una primera sección provee una exposición en base a una secuencia de modelos muy sencillos. En secciones posteriores se ampliará el modelo a fin de verificar si las conclusiones se mantienen.

## 2. Síntesis expositiva.

A fin de introducir las dificultades de a una por vez, familiarizando al lector con las consecuencias de los distintos supuestos, se utilizará una secuencia de modelos sencillos a fin de motivar el tema central de las secciones posteriores.

En primer lugar se presentarán dos casos extremos, meras caricaturas de sistemas económicos, que servirán de marco de referencia para los modelos más complejos en que realmente radica el interés del análisis. Estos casos polares son el modelo competitivo por un lado, y el del estado paternalista con poder de disposición absoluto sobre los recursos de la economía por el otro. Más adelante se introducirán restricciones sobre el poder del estado, para así elaborar los elementos básicos para una teoría de la imposición óptima en un sistema político determinado, la democracia constitucional representativa.

Desde la época de Adam Smith se conoce la propiedad de un sistema económico competitivo de lograr una eficiente asignación de recursos y una distribución de bienes óptima en el sentido de Pareto. Esta afirmación surge del así denominado primer teorema del bienestar, y se cumple cuando se dan las condiciones de que ningún agente posee suficiente poder como para influir sobre los precios que rigen en los mercados de bienes y servicios.

Esta situación puede visualizarse en la figura 1. Los ejes corresponden a dos bienes o servicios. El eje horizontal representa los insumos necesarios para la producción, que para concretar identificaremos con el trabajo y mediremos en el sentido negativo, quedando así como consumo las horas libres no trabajadas dedicadas a la recreación u ocio. El eje vertical representa el bien de consumo producido  $c$ , digamos pan. La curva por el origen  $O$  y el punto  $Y$  es la función de producción. Como es usual, el insumo de la cantidad  $OT$  de trabajo puede producir

como máximo la cantidad YT de pan. La forma de la curva refleja la ley de proporciones variables, con productividad marginal decreciente del factor trabajo debido a la existencia de factores fijos de producción que no es necesario especificar.

Si el punto Y representa una situación de equilibrio competitivo, la tangente a la curva de producción en dicho punto interseca al eje horizontal en el punto B. Los coeficientes de dirección de dicha tangente determinan el vector de precios  $p$ , perpendicular a la misma, mientras que la longitud OB mide los beneficios o retribución del factor no especificado, en términos de trabajo. Como toda paralela a YB que corte a la curva de producción interseca el eje a la izquierda del punto B, la situación descrita representa una de beneficios máximos para el productor.

Suponiendo, para simplificar la exposición, que hay una sola clase de familias, se puede representar en el gráfico una curva de indiferencia que indica las combinaciones de ocio y pan equivalentes en el consumo a la de equilibrio. La tangencia con la recta de presupuesto BY de la familia representativa muestra que esta maximiza su utilidad dado su ingreso, compuesto por los beneficios OB y el trabajo realizado OT. Está claro que los consumidores reciben TY de pan a cambio. Es obvio que esta solución es óptima en el sentido de Pareto, por ser la curva de indiferencia tangente a la curva de producción.

Ahora bien, en esta situación idílica no hay gobierno. Se supone que no existen necesidades públicas como enseñanza, salud y justicia, como tampoco problemas de inequidad distributiva. Si hubiere distintas clases de familias el Laissez-faire, aunque garantiza la eficiencia productiva y distributiva del óptimo de Pareto, puede no llevar a un óptimo social.

En una segunda etapa de nuestra exposición aparece el estado, quien a fin de proveer a las necesidades públicas demanda bienes y servicios, en cantidades indicadas en la figura 2 por las coordenadas del punto G. El efecto de esta demanda es desplazar las posibilidades de producción disponible para el sector privado hacia abajo y la izquierda, tomando la posición de la curva con origen en G que pasa por el punto Y.

La nueva solución se obtiene en Y. Los productores utilizan TG de trabajo; los consumidores proveen la cantidad TR del mismo debien-

do dedicar GR al gobierno. La producción de pan YT se distribuye entre los consumidores que reciben YZ de pan, mientras que el gobierno recibe ZT.

Nótese que aquí nuevamente se arriba a un óptimo de Pareto, ya que la acción del gobierno no afecta los términos marginales de intercambio. Sus tributos los capta en forma de capitaciones expropiando los beneficios GB más el equivalente de IO del trabajo de los consumidores; con su producido adquiere los bienes y servicios que desea. Por supuesto, esta solución autoritaria sólo es posible si la constitución da poder suficiente a la autoridad central.

A fin de tomar en consideración el hecho de que en la práctica el estado no tiene tanto poder, Mantel (1980) y Diamond y Mirrlees (1971) introdujeron la exigencia de que sólo es posible imponer a los consumidores en la medida en que efectúan compras y ventas en los mercados de bienes y servicios. Todavía el único productor es para Diamond y Mirrlees el estado, de modo que éste se apropia del total de los beneficios.

La solución se muestra en la figura 3, que reproduce en esencia la figura 2 excepto por la representación de los consumidores. La diferencia reside en el hecho de que ahora la recta de presupuesto de los consumidores debe pasar por el origen, pudiendo el estado recaudar sus impuestos solamente por medio de distorsiones en los precios. Los precios al productor continúan estando representados por  $p$ . En cambio los precios al consumidor ahora se denominan  $q$ .

El impuesto recaudado, en términos de trabajo, es la suma de los beneficios GB más IO en concepto de diferencia de precios entre productor y consumidor. El consumidor debe ahora trabajar más por el pan que lo necesario para producirlo, debiendo pagar un impuesto sobre el consumo de pan si cobra el salario que paga la empresa, o equivalentemente pagar un impuesto por la venta de su trabajo si el precio que paga por el pan es el que recibe el productor.

Obviamente el resultado no es óptimo en el sentido de Pareto, aunque se da la eficiencia productiva. La restricción del presupuesto de los consumidores impone una carga a la sociedad que podría eliminarse junto con esta restricción.

En especial en un sistema de mercado puede no estar justificada

la intervención del estado al punto en que todo el aparato productivo quede en sus manos, recaudando no sólo los beneficios sino además un adicional en concepto de impuesto a las ventas. En casos menos extremos, la restricción antedicha no se justifica. Si la recaudación no excede a los beneficios, el excedente habría que devolverlo por medio de subsidios a los precios de los consumidores. Sin embargo en tal caso sería preferible aumentar la eficiencia del sistema eliminando los impuestos indirectos, y cubriendo el presupuesto público con un impuesto a los beneficios que deje el excedente en manos del sector privado.

### III. El Modelo, Supuestos e Interpretaciones.

Hay  $n$  mercancías -bienes y servicios privados- designadas con subíndices  $j = 1, \dots, n$  demandadas por  $m$  consumidores designados con  $i = 1, \dots, m$ . Cada consumidor maximiza sus preferencias, que dependen del nivel del gasto público indicado con  $z$ . Bajo los supuestos usuales en microeconomía, si los precios de las mercancías están dados y si el ingreso del consumidor  $i$ -ésimo es  $m^i$ , las cantidades demandadas por dicho consumidor pueden ser representadas por el vector  $h^i(q, m^i; z)$ . Por supuesto la relación entre precio y cantidad demandada es, para un sistema tributario arbitrario, mucho más complicada. Sin embargo, la restricción a funciones de demanda como la indicada es más aparente que real, según surge de las siguientes consideraciones.

En primer lugar, un principio básico de tributación es el anonimato, es decir, el desconocimiento que la autoridad tiene de quién es el responsable del tributo en el sentido de que el monto del mismo debe ser independiente de la persona sujeta a impuesto, dependiendo sólo de la actividad que ejerce y del grado en que participa en el mercado. Por ello, todos los consumidores se enfrentan con el mismo sistema de precios al consumidor.

En segundo lugar, nos interesa analizar sistemas que poseen la propiedad de ser no-regresivos -es decir, progresivos o neutros- en cuanto a su incidencia directa, en el sentido de no castigar más a quien sea económicamente más inactivo. En otras palabras, el efecto del impuesto será reducir las posibilidades presupuestarias de los consumidores, pero de manera tal que sus conjuntos de posibilidades presupuestarias sean con-

vexos. Además para todo  $i$  dicho conjunto contendrá el vector de tenencias iniciales no expropiables  $w^i$  del consumidor  $i$ -ésimo -piénsese en las distintas habilidades propias de los individuos en un país sin esclavos-.

En tercer lugar, y a fin de simplificar el análisis, se supondrá que el gobierno ya ha expropiado todos los ingresos expropiables. En aquellos casos en que dicha expropiación fuera innecesaria, en nuestro modelo siempre tendrá la opción de devolver el excedente.

Con estos supuestos puede enunciarse la primera proposición.

### Proposición 1.

Un sistema tributario no-regresivo y no -confiscatorio puede ser implementado en base a impuestos a las ventas proporcionales a los precios al productor, más un subsidio, posiblemente nulo, a los consumidores.

Esta proposición, demostrada como las demás en el Apéndice lleva al siguiente corolario.

### Corolario 1.

A los fines del análisis de la tributación es suficiente analizar el caso en que el estado subsidia directamente a los consumidores y fija los precios de los bienes de consumo. Los impuestos a las ventas surgen como diferencia entre los precios con que se enfrenta el consumidor y los precios sombra del productor público.

Este corolario nos permite simplificar aun más el modelo; si se representa el monto del subsidio, el mismo para cada consumidor por los principios antedichos, su ingreso será igual a

$$m^i = s + q \cdot w^i$$

es decir, el subsidio más el valor de sus tenencias iniciales no expropiables, evaluadas a los precios al consumidor.

La interpretación del modelo en esta forma es inmediata si se consideran los precios  $q$  como marginales después del impuesto, cuando las demandas excedentes de todos los consumidores son iguales. En caso de no serlo, el cuadro se complica, debiéndose tener en cuenta la posibi-

lidad de que aun si el conjunto de posibilidades presupuestarias de todos es el mismo, distintos individuos pueden estar situados en partes diferentes de la frontera del conjunto y por ende estar expuestos a variaciones marginales distintas. Este caso ha sido analizado previamente (Mantel, 1975, ítem 5 de la sección 5) de manera que a fin de no complicar el cuadro se analiza el caso más sencillo de precios al consumidor  $q$  constantes.

El análisis del sector productivo es mucho más sencillo. Se supone la existencia de cierto número  $k$  de empresas, para  $e = 0, 1, \dots, k$ , reservándose el subíndice 0 para el sector público, considerado como una gran empresa por suponerse centralizado el proceso de decisión en dicho sector. El sector público es el que produce los bienes públicos representados por  $z$ , el nivel del gasto público. Cada una de las demás empresas produce en forma independiente del sector público y de las demás empresas. Es válida la siguiente proposición.

### **Proposición 2.**

Todos los productores se enfrentan con los mismos precios.

### **Corolario 2.1.**

Toda reducción de impuestos a las ventas de productos intermedios aumenta la eficiencia productiva del sistema económico como un todo.

### **Corolario 2.2.**

A los fines del análisis de la tributación óptima no es necesario distinguir entre la producción de las distintas empresas, sean estas privadas o públicas. Es suficiente considerar al sector productivo como una empresa única, en la que los dueños tendrán ciertos derechos sobre dividendos.

Los dividendos mencionados en este último corolario en nuestro modelo corresponden a los precios de los recursos empresariales provistos por los consumidores.

La proposición 2 y sus corolarios permiten ignorar al sector productivo privado, como haremos a continuación, siempre que se suponga que se observan los dictados derivados de la optimización, es decir, que

todos los sectores operan eficientemente, y que no hay impuestos a las ventas de bienes intermedios. Las posibilidades de producción de la economía se sintetizan entonces en la relación:

$$f(y, z) \geq 0,$$

donde  $f$  es una función cóncava que describe la frontera del conjunto de posibilidades de producción, mientras que el vector  $y$  de  $n$  coordenadas representa la producción neta del sistema, es decir, la resultante de la producción de los distintos sectores reducida en los bienes intermedios entregados a otros sectores incluyendo al público. El vector  $z$  representa como siempre al nivel del gasto público, sinónimo de niveles de producción de bienes públicos, como educación, justicia, etc. Como estos bienes se distribuyen fuera del mercado, no es necesario ser más específico en cuanto a las dimensiones de este vector.

Las preferencias del planificador se supondrán representadas por la función  $B(u, z)$  creciente en sus argumentos, a la que nos referiremos como función de bienestar social. Sus argumentos son las  $m$  coordenadas del vector de niveles de utilidad o satisfacción de los consumidores,  $u$ , y el vector de bienes públicos  $z$ . Con ello se refleja el deseo del gobierno de influir sobre la distribución de ingreso -a través de los niveles de satisfacción  $u$  de manera de respetar la soberanía del consumidor y sobre la producción de bienes públicos.

Con todos estos elementos es posible plantear el problema del diseño de un sistema tributario óptimo -debe hacerse notar que la solución no será única en general, pues hay muchos sistemas tributarios equivalentes a uno cualquiera; pero las restricciones impuestas reducen considerablemente el grado de indeterminación-. De todos modos agregaremos a la lista de supuestos el que la economía es regular (Debreu, 1972), siendo todas las funciones derivables con continuidad.

El planificador deberá maximizar  $B(u, z)$  dadas las restricciones:

- 1)  $u_i = v^i(q, m^i; z)$
- 2)  $\sum_i h_i(q, m^i; z) \leq w + y$
- 3)  $m^i = s + q \cdot w^i$
- 4)  $f(y, z) \geq 0$ .

La primera de las restricciones define al nivel de satisfacción alcanzado por el consumidor  $i$ -ésimo por la utilidad indirecta  $v^i$ . La función de utilidad indirecta se define como:



$$v^i(q, m^i; z) = u^i [h^i(q, m^i; z)].$$

donde  $u^i(\cdot)$  es la función de utilidad que representa a las preferencias del consumidor  $i$ -ésimo. La segunda restricción es la del balance del mercado, indicando que no es posible consumir más de las tenencias iniciales aumentadas por la producción neta; el vector  $w$  es la suma de los  $w^i$ . La tercera restricción define al ingreso del consumidor como la suma del subsidio más el producido por la venta de sus tenencias iniciales no expropiables. La cuarta y última restricción indica que el plan de producción de la economía, incluyendo la producción neta de bienes privados y públicos, debe ser factible desde el punto de vista tecnológico.

A estas restricciones deben agregarse las de no-negatividad de los subsidios y de los precios, es decir:

$$5) \quad s \geq 0; q \geq 0.$$

#### IV Resultados.

El objeto principal de esta sección es presentar los argumentos que demuestran la siguiente proposición.

##### Proposición 3.

Si el óptimo social es un óptimo de Pareto entonces es posible implementarlo sin impuestos a la compra-venta.

Esta proposición es una generalización de otras, como se verá a continuación. Su importancia radica en el hecho en que los impuestos sobre la compra-venta de mercancías sólo se justifican en situaciones en que las restricciones del sistema económico son tales que no es posible llegar a un óptimo de eficiencia conjunta, productiva y distributiva, del sistema.

Por un lado, existe el tradicional segundo teorema de la economía del bienestar, que afirma que todo óptimo de Pareto puede ser implementado sin impuestos a la compra-venta, siempre que estén permitidas las transferencias de ingresos impuestas por el poder público, cualesquiera sea su magnitud. Este teorema no es aplicable en nuestro caso, ya que la Constitución de la sociedad que imaginamos en este artículo no

permite la expropiación de ciertas tenencias iniciales, simbolizada aquí con  $w^1$ .

Por otro lado, en un trabajo anterior (Mantel, 1975, ítem (5) de la sección 5) ya se ha demostrado que en ausencia de un sector productivo y de bienes públicos, si no está permitido efectuar transferencia de ingresos, las únicas asignaciones alcanzables con impuestos no-regresivos que son óptimas en el sentido de Pareto son las asignaciones competitivas. Este resultado es un caso especial del que se presenta en esta sección, donde ahora se incluyen no sólo las posibilidades de producción sino también la producción de bienes públicos por parte del gobierno. Además en el caso presente se permiten algunas transferencias de ingresos, siempre y cuando no se pasen del límite impuesto por la existencia de tenencias iniciales no expropiables.

Antes de demostrar la proposición presentaremos el ejemplo mencionado, donde la tributación tiene fines exclusivamente redistributivos, a fin de ver con mayor claridad la razón por la que en general no puede aspirarse a lograr que la economía alcance un óptimo de Pareto, dadas las restricciones impuestas sobre la acción del gobierno en nuestro modelo. Hay dos individuos  $i = 1, 2$ , y dos bienes,  $j = 1, 2$ . No habiendo posibilidades de producción, es posible graficar esta economía como se ha hecho en la caja de Edgeworth de la Figura 4.

Los lados de las cajas representan las dotaciones agregadas de los dos bienes de la economía. Las cantidades de bienes del consumidor 1 se muestran a partir del origen  $O_1$ , las del 2 desde  $O_2$ . El consumidor 1 posee el total del bien 2, y el otro consumidor el total de bien 1, de manera que la asignación inicial de bienes esta representada por el punto  $W$  del gráfico. Se han representado las respectivas curvas de demanda recíproca  $DR_1$  y  $DR_2$  de manera tal que se intersecan tres veces. Como es sabido, las intersecciones de las curvas de demanda recíproca representan asignaciones de equilibrio competitivo, que según el primer teorema de bienestar son óptimas en el sentido de Pareto. En consecuencia, la curva de contratación  $CC$  pasa por dichos tres puntos; además no tienen otro punto en común con alguna de dichas curvas, pues si lo tuvieran con una de ellas, una de las curvas de indiferencia del otro consumidor es tangente allí con la del primero, y las líneas de presupuesto de ambos coincidirían de modo que ese punto también estaría sobre la

otra curva de demanda recíproca.

La región sombreada de la figura es exactamente el conjunto de asignaciones de bienes que pueden ser sostenidas por medio de tributos no-regresivos si no es posible expropiar las tenencias iniciales. Ello puede verse con un momento de reflexión, ya que para un consumidor cualquiera la curva de demanda recíproca divide el plano en dos regiones. Una región corresponde a la zona en la que una tangente a una curva de indiferencia pasa por arriba de  $W$ -es decir representa gastos mayores que el valor de  $W$ -; es la región que nos interesa y contiene todos los segmentos que unen a la curva de demanda recíproca con  $W$ . La otra región corresponde a la zona en la que una tangente como la mencionada pasa por debajo de  $W$ . En el primer caso, un subsidio positivo define junto con la tangente indicada uno de los infinitos conjuntos de posibilidades presupuestarias convexos que llevan a un punto de dicha región. En el segundo caso no habrá solución al problema de hallar un conjunto convexo que lleve a ese punto, ya que un segmento que una ese punto con  $W$  no puede estar en él por hallarse fuera del semiespacio de apoyo.

Ahora bien, los únicos puntos del conjunto de demanda recíproca que son óptimos de Pareto son los tres equilibrios competitivos, por hallarse la curva de contratación a una distancia positiva de dicho conjunto excepto en esos tres puntos. De ahí se deduce de inmediato que si un óptimo de Pareto es alcanzable por una redistribución efectuada por medio de tributación no-regresiva, entonces no es necesario recurrir a la tributación para sostenerlo. Es suficiente fijar como precios de mercado los precios competitivos que corresponden al óptimo elegido. En todo otro caso, el óptimo social no será óptimo de Pareto, aunque si la función de bienestar social es del tipo Bergson-Samuelson llevará a la economía a un punto de la frontera del conjunto de demanda recíproca. En tal punto se requiere un sistema tributario que no altere los precios relativos de mercado para uno de los dos consumidores, pues la asignación que le corresponde está sobre su curva de demanda recíproca.

### **Demostración de la proposición 3.**

Si la asignación  $\bar{h}^1, \dots, \bar{h}^m, \bar{y}, \bar{z}$  corresponde a la solución del problema de la tributación óptima y es óptima en el sentido de Pareto, existe un sistema de precios  $\bar{p}$  con la propiedad de que para niveles da-

dos del gasto público  $\bar{z}$  :

- a) El productor maximiza sus beneficios en la producción de bienes privados, es decir,  $\bar{p}$  y  $\leq \bar{p} \bar{y}$  para todo y tal que  $f(y, \bar{z}) \geq 0$ ;
- b) cada consumidor maximiza su utilidad dado el presupuesto determinado por los precios  $\bar{p}$  con un ingreso igual a  $\bar{p} \cdot h^i$ .

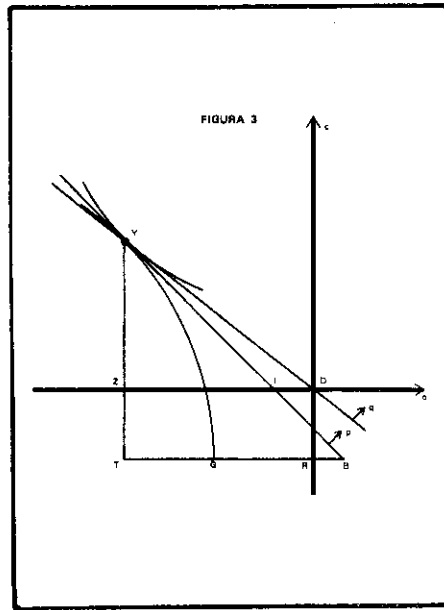
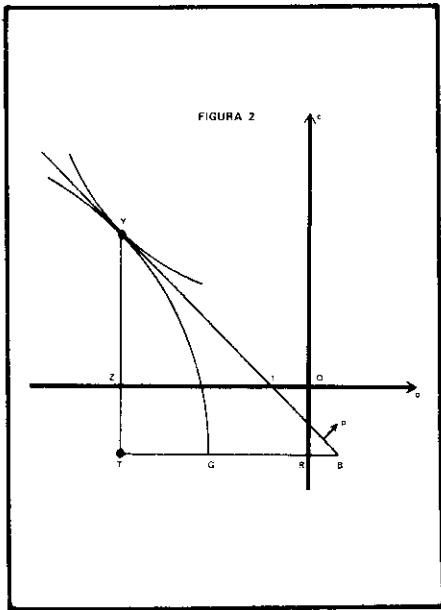
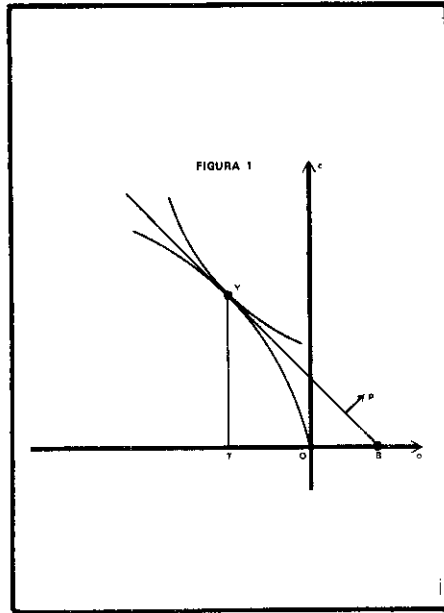
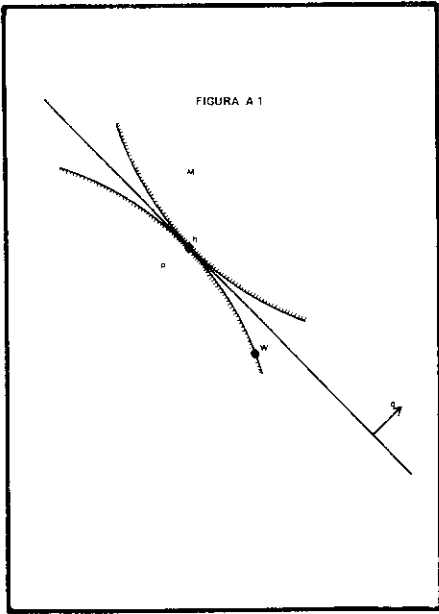
Como consecuencia de ello tenemos que:

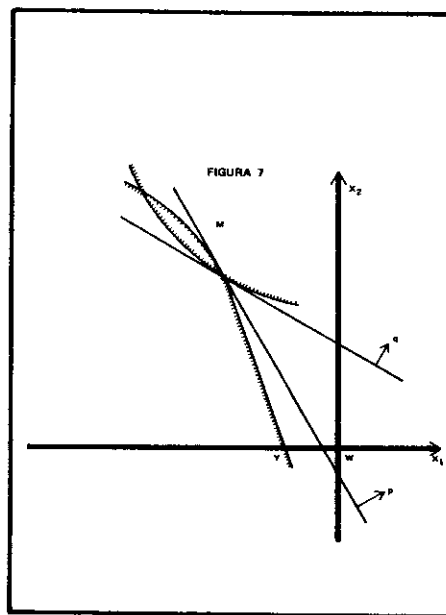
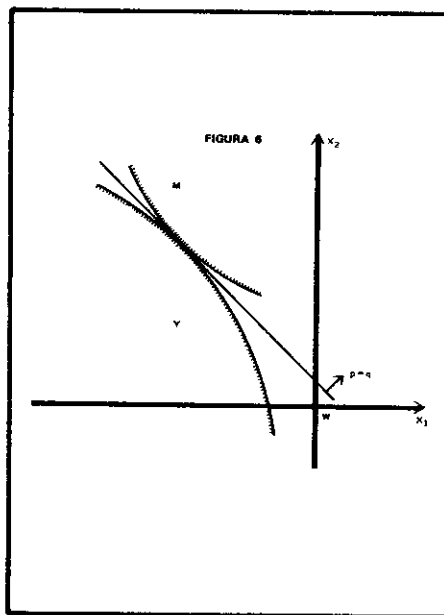
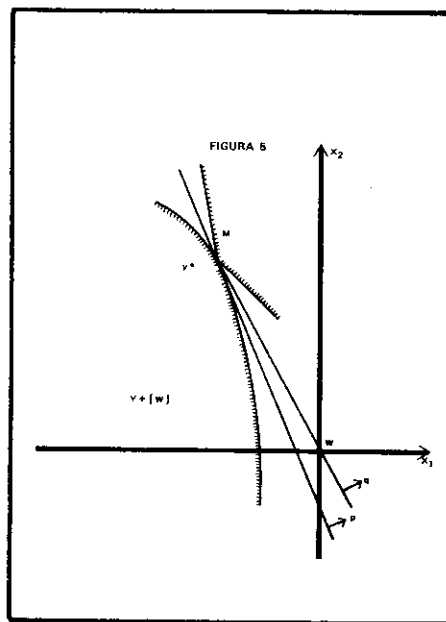
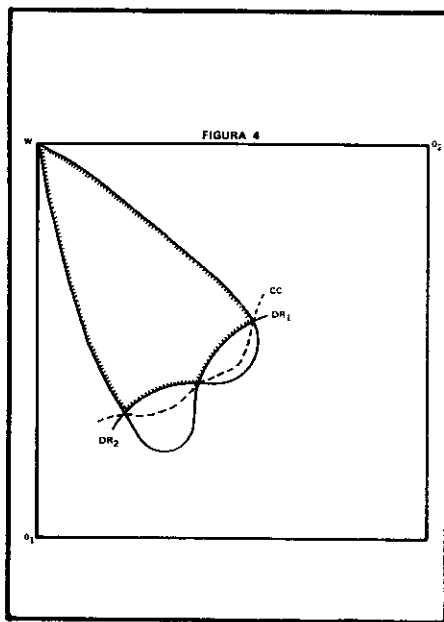
- a)  $f_y(\bar{y}, \bar{z})$  es proporcional a  $\bar{p}$ ;
- b)  $u_x^i(h^i, z)$  es proporcional a  $\bar{p}$ ;

Las mismas condiciones son las que se derivan de las condiciones de equilibrio implícitas en las restricciones (1) a (5), quedando así demostrado que una consecuencia de la optimización es el hecho de que el sistema de precios al consumidor y el sistema de precios al productor son proporcionales entre si. En particular si se los toma iguales -nada impide multiplicar uno de estos sistemas de precios por una constante positiva, modificando el nivel de todas sus coordenadas en igual proporción- se tendrá una solución sin impuestos a la compra-venta. Quedarán solamente las transferencias de utilidades a los consumidores, es decir el subsidio  $s$ , positivo o nulo, debido a la restricción (5).

La conclusión del teorema no es válida en sentido estricto si la economía no es regular, pudiendo darse casos en que sea necesario recurrir a tributos sobre las compras y ventas de mercancías aun en un óptimo de Pareto. Esto ocurrirá si como en la Figura 5 los beneficios de las empresas más el valor de las tenencias iniciales evaluados a los precios al productor no alcanzan a satisfacer el valor del gasto de los consumidores a esos precios, siendo al mismo tiempo los bienes complementos en el consumo -recuérdese que toda excepción debe basarse en funciones no derivables-. Como toda aproximación de este ejemplo por economías con funciones derivables presentará un óptimo social que no es un óptimo de Pareto la aparición de este fenómeno ocurrirá en casos límites poco probables.

El caso más usual está representado en las Figuras 6 y 7. La primera muestra un caso en que el óptimo social es un óptimo de Pareto, y por lo tanto  $p$  y  $q$  coinciden, mientras que la segunda muestra el caso





contrario.

En ambas el origen  $w$  representa las tenencias iniciales del agregado de consumidores; el conjunto  $Y$  es la producción neta de la economía una vez satisfecha la demanda del sector público; y el conjunto  $M$  representa los vectores de consumo mejores en el sentido de Pareto al punto óptimo. Es la intersección de los conjuntos  $Y$  y  $M$  la que indica si la solución es o no óptima en el sentido de Pareto, según si es o no vacía.

#### REFERENCIAS

- DEBREU, G., 1972. Smooth Preferences, *Econometrica* 40, 603-615.
- DIAMOND, P. A. y J. A. MIRRLESS, 1971. Optimal Taxation and Public Production, *American Economic Review* 61, 8 - 17 y 261 -178.
- GUESNERIE, R., 1979. Financing Public Goods with Commodity Taxes: The Tax Reform Viewpoint, *Econometrica* 47, 393 - 423.
- INTRILIGATOR, M. D., 1971. Mathematical Optimization and Economic Theory, *Englewood Cliffs: Prentice - Hall*.
- KOOPMANS, T. C., 1957. Three Essays on the State of Economic Science. Nueva York: *McGraw - Hill*.
- KOOPMANS, T. C. y BAUSCH, A. F., 1959. Selected Topics in Economics Involving Mathematical Reasoning, *SIAM Review*, Vol. 1, 79 - 148.
- MANTEL, R., 1970. Política Tributaria en una Economía Competitiva, *Económica (La Plata)* 16, 239 -312.
- MANTEL, R., 1975. General Equilibrium and Optimal Taxes, *Journal of Mathematical Economics* 2, 187 - 200.
- MUSGRAVE, R., 1959. The Theory of Public Finance, Nueva York: *Mcgraw - Hill*.
- SHAFER, W., y H. SONNENSCHNEIN, 1976. Equilibrium with Externalities, Commodity Taxation and Lump Sum Transfers, *International Economic Review*, 17, 601 - 611.

## APENDICE

En este Apéndice se presentarán detalles de demostraciones no incluidas en el texto a fin de no interrumpir el hilo de la exposición.

### **Demostración de la proposición 1.**

Debe demostrarse que un conjunto de posibilidades presupuestarias de un consumidor cualquiera que presenta la propiedad de ser convexo -sistema tributario no regresivo- y de contener el vector de tenencias iniciales -sistema tributario no confiscatorio- puede ser reemplazado por otro más sencillo, que simplemente consiste de cierto semiespacio que contiene al vector de tenencias iniciales.

Para poder seguir el argumento se recomienda al lector observar la figura A1.

El conjunto de posibilidades presupuestarias de un consumidor determinado se ha identificado con la letra  $P$ , mientras que su vector de tenencias iniciales es  $w$ . Se ha representado en la figura el vector de demanda  $h$  y el conjunto  $M$  de vectores preferidos al demandado. Dados los supuestos sobre las preferencias de los consumidores, la intersección de ambos conjuntos debe ser vacía, mientras que  $h$  está en la frontera de ambos. Como  $M$  es abierto y convexo, mientras que  $P$  es convexo, existe un hiperplano que los separa (sobre el teorema de separación de convexos ver por ejemplo el Apéndice escrito por DEBREU al artículo de KOOPEMANS y BAUSCH, 1959). Si  $q$  es el vector normal al plano situado del mismo lado que  $M$ , y si  $s = q \cdot (h - w)$  -  $s$  es necesariamente no negativa -, el semiespacio que contiene a  $P$  se define por la relación:

$$Q = \{ x \in \mathbb{R}_+^n : q \cdot x \leq s + q \cdot w \}.$$

Es fácil verificar que si el consumidor se enfrenta con el conjunto de posibilidades presupuestarias  $Q$  arriverá a la misma decisión que si dicho conjunto fuera  $P$ , dado el supuesto de convexidad estricta de las preferencias implícito en la definición de economía regular.

### **Demostración de la proposición 2.**

Sean  $e = 0, \dots, k$  las empresas, incluyendo la pública. Las fronte-



ras de sus conjuntos de posibilidades de producción, para un dado nivel del gasto público, están dadas por las funciones  $f^e$  (.,.) que dependen del plan de producción neta (producto menos insumo) propio  $y^e$  y del gasto público  $z$ . La producción neta agregada de bienes y servicios privados será:

$$(A1) \quad y = \sum_e y^e$$

donde la suma se extiende para todas las empresas, incluyendo la pública. Considérese el problema de determinación del sistema tributario óptimo. Parte de dicho problema lo integran las restricciones (A1) y (A2), correspondiendo estas últimas a la definición de los distintos conjuntos de posibilidades de producción,

$$(A2) \quad f^e(y^e, z) \geq G \quad \text{para } e = 0, 1, \dots, k.$$

Utilizando el vector  $p \in \mathbb{R}^n$  como multiplicadores de Lagrange para (A1) y un multiplicador  $r^e$  para cada una de las restricciones en (A2), la función de Lagrange asociada con el problema citado será:

$$(A3) \quad L(y^e, \dots, p, r, \dots) = p \cdot \sum_e y^e + \sum_e r_e f^e(y^e, z) + \dots$$

donde los puntos suspensivos indican variables y términos irrelevantes desde el punto de vista de la demostración de este teorema; en especial, las  $y^e$  no aparecen en otras partes de  $L$  ().

El teorema de Kuhn y Tucker (ver por ejemplo Intriligator, 1971), en su versión diferencial, dada la concavidad de las funciones intervinientes, nos garantiza que la existencia de un óptimo para nuestro problema de tributación implica, entre otras condiciones, las condiciones necesarias obtenidas de calcular la derivada parcial de  $L$  () con respecto a cada uno de los vectores  $y^e$  además de las condiciones de holgura complementaria correspondientes,

$$(A4) \quad \partial L / \partial y^e = p + r_e f_y^e < 0; \quad (p + r_e f_y^e) \cdot y^e = 0; \quad e = 0, 1, \dots, k.$$

Ahora bien, para cada empresa e las condiciones (A4) corresponden exactamente a las que surgen de la maximización de  $p \cdot y^e$  sujeto a la restricción dada en (A2), para un nivel dado de  $z$ .

Una nueva invocación del teorema de Kuhn y Tucker permite afirmar que en el óptimo cada una de las empresas está maximizando beneficios a los precios sombra  $p$ , ya que ese es el significado de los multiplicadores de Lagrange.

### **Demostración del corolario 2.1.**

Un impuesto a las ventas de productos intermedios introduce una discrepancia entre el precio que percibe el vendedor y el que paga el comprador. Si ambos son empresas, se contradice la condición necesaria para un óptimo dada por la proposición 2.

### **Demostración del corolario 2.2.**

Este corolario es una aplicación directa de la propiedad distributiva de la maximización de funciones lineales sobre sumas de conjuntos (Koopmans, 1957, Teorema 1), al caso de la proposición 2. Si  $Y^e$  es el conjunto de posibilidades de producción de la empresa  $e$ , y si  $Y$  representa el conjunto de posibilidades de producción agregado, para un nivel determinado del gasto público  $z$  se tendrá:

$$(A5) \max p \cdot Y = \max p \cdot \sum_e Y^e = \max \sum_e p \cdot Y^e = \sum_e \max p \cdot Y^e,$$

y en consecuencia es válido reemplazar los conjuntos de posibilidades de producción de las empresas por el agregado, suponiendo que la responsabilidad de fijar el plan de producción recae en un solo agente es decir, el estado. Debe tenerse en cuenta que esta asignación de funciones al estado es ficticia, y es posible por la descentralización que permite la fijación de precios al productor.

## EQUILIBRIO GENERAL Y TRIBUTACION OPTIMA

## SUMARIO

Este ensayo analiza con algún detalle la cuestión del diseño de un sistema tributario óptimo.

Se demuestra que un sistema tributario no regresivo puede implementarse completando transferencias de ingresos y subsidios con impuestos a la compra-venta de mercancías proporcionales. También se demuestra que en aquellos casos en que tales impuestos son necesarios para implementar el óptimo social, éste no puede ser un óptimo de Pareto.

## GENERAL EQUILIBRIUM AND OPTIMUM TAXATION

## SUMMARY

This essay analyses in detail the optimal tax system design.

It is demonstrated that a non-regressive tax system can be implemented completing income transferences and subsidies with proportioned taxes to the purchase and sale of goods. It is also demonstrated that in those cases in which such taxes are necessary to implement the social optimun, it cannot be a Pareto's optimun.