Económica, La Plata, Vol. XXIX, N° 2-3, Mayo-Diciembre 1983

# EQUILIBRIO GENERAL WALRASIANO Y NO-WALRASIANO EN UNA ECONOMIA DE LEONTIEF

GUILLERMO ESCUDE *

En este trabajo trato de relacionar esa parte de la teoría económica a veces llamada "economía lineal" (que incluye a los modelos de Leontief y Sraffa así como las formalizaciones lineales de Marx) con la teoría del equilibrio general, tanto walrasiano como no-walrasiano[1]. Es sabido que la teoría del equilibrio general walrasiano (como está expuesta en la obra clásica de Debreu (1959)) es lo suficientemente general como para incluir a las economías con tecnología de Leontief[2]. Sin embargo, quienes trabajan con tales modelos a menudo desaprovechan las posibilidades que brinda la teoría walrasiana y recurren a simplificaciones innecesarias como la de suponer que los consumidores tienen una canasta de consumo de proporciones fijas. Por otro lado, la simplicidad de la tecnología en los modelos lineales los hacen especialmente aptos para incluir en ellos aspectos a menudo soslayados en modelos más generales con la finalidad de evitar complicaciones. Citemos como ejemplos la distinción entre stocks y flujos, la explicitación de los insumos intermedios y el tratamiento de la tasa de ganancias. La explicitación de los insumos intermedios, en particular, le otorga a la econo-

* Universidad de Buenos Aires y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.
Agradezco los comentarios de R. CESCO, O. CHISARI, D. HEYMANN y especialmente de R. MANTEL a una versión preliminar de este trabajo presentada a la XVII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política.

1 La teoría del equilibrio general no-walrasiano, que recién está en proceso de gestación, es llamada por algunos autores "teoría del equilibrio general con racionamiento" y por otros "teoría del desequilibrio".

2 Una tecnología de Leontief está formada por tantos procesos productivos uniproducto como bienes producidos hay. Cada proceso presenta rendimientos constantes a escala y proporciones fijas entre los insumos. Tal tecnología puede ser representada mediante una matriz de coeficientes de producción.

mía lineal ese atrayente rasgo de circularidad que la caracteriza.

En Debreu (1959) se supone que hay mercados a término para todos los períodos futuros que le interesan a los agentes. Así, los agentes formulan planes para todo el futuro y una vez que el proceso de tanteo se detuvo en un vector de precios que despeja a todos los mercados no es necesario repetir el proceso de tanteo pues los planes se han compatibilizado para todo el futuro. Esta interpretación es escasamente realista. En el planteo moderno del equilibrio general temporario (véase Hicks (1939), Saito (1961) y Grandmont (1977))no existen mercados a término para todos los períodos futuros y todos los bienes. Luego los agentes deben formular sus planes sobre la base de expectativas de precios futuros (para los bienes y períodos para los cuales no hay mercado a término) que pueden no realizarse. El equilibrio logrado compatibiliza los planes de los agentes para el período en curso pero no así sus planes para períodos futuros. Por ello, el proceso debe repetirse período a período con expectativas cambiantes. Es en un tal marco de equilibrio general temporario que inserto a la economía de Leontief. Para simplificar la exposición, no se adoptan supuestos específicos con respecto a las expectativas de precios futuros de los agentes. Tales expectativas se encuentran incorporadas en forma implícita en las funciones de utilidad de los agentes y se reflejan en sus demandas de stocks.

En Escudé (1982) también inserté un modelo lineal en una estructura de equilibrio general. Sin embargo, en ese trabajo las empresas maximizaban beneficios sujetas solamente a restricciones de capital; o sea, solamente se restringía el valor de los insumos, no así su cantidad física. Ese planteo resultaba conveniente para generar la ecuación de precios correspondiente a una tasa de ganancias uniforme y puede interpretarse como un modelo de equilibrio general de largo plazo como lo concebían los clásicos. En este trabajo, se considera un modelo de corto plazo. En él, la producción corriente de cada empresa se encuentra restringida por el stock de insumos que ella posee al comenzar el período. Si no usa todos sus stocks, puede ofrecer los excedentes al mercado junto con su producción planeada. Con este planteo se genera la ecuación de precios correspondiente a tasas de ganancias no-uniformes.

Como enfatiza la tradición keynesiana, en el corto plazo pueden existir rigideces de precios que imposibiliten el logro de un equilibrio general walrasiano. Hemos querido mostrar cómo una situación en la que algunos precios son totalmente rígidos puede aún ser tratada con los métodos tradicionales. Con tal objetivo, en las últimas secciones suponemos que el salario es completamente rígido y que, en consecuencia, el mercado de trabajo se despeja por racionamiento vía cantidades (en contraposición al racionamiento vía precios). Adoptamos la "hipótesis de decisión dual" de Clower (1965) al suponer que, una vez conocidas sus transacciones en el mercado de trabajo, los agentes redeterminan sus planes en los restantes mercados. Estos nuevos planes son los *efectivos* y difieren, en general, de los *nocionales* cuando el agente es racionado en el mercado de trabajo.

Para facilitar la lectura, opté por dejar todas las demostraciones formales para las notas que se encuentran al final del trabajo. En cuanto a la notación, el contexto indicará si un vector debe interpretarse como fila o columna. Sea x e y vectores y A una matriz. La siguiente notación será frecuente:

$e = (1, \dots, 1)$ $\quad$ $A_i$ : i - ésima fila de A

$e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ $\quad$ $A^j$ : j - ésima columna de A

$x \leqslant y : x \leqq y \;\; x \neq y$ $\quad$ $x_i$ : i - ésimo elemento de x.

$x \dot{\leqslant} y : x \leqslant y \;\; y \;\; x \nless y$ $\quad$ $\equiv$ : igualdad por definición.

En general, los superíndices de los vectores de cantidades se referirán a los agentes, sean estos familias o empresas. La ausencia de tal superíndice indicará la agregación sobre todos los agentes del mismo tipo. I denotará a la vez (sin peligro de confusión) el número de familias y el conjunto de índices i que representan a las familias. K cumple el mismo papel con respecto a las empresas. O sea

$$I = \{ i/i = 1, \dots, I \} \quad , \quad K = \{ k/k = 1, \dots, K \} .$$

1. *Características generales del modelo.*

La economía es no-monetaria. Hay un período de tiempo en curso durante el cual las empresas producen y las familias consumen y trabajan. Los intercambios se realizan al final del período. Por lo tanto la producción de las empresas está limitada por los stocks de bienes y trabajo que tienen al comienzo del período. Asimismo, el consumo de bienes y tiempo libre de las familias está limitado por los stocks que poseen al comienzo del período. Hay también un período próximo que entra en el horizonte de planeamiento de los agentes económicos. Los planes que tienen los agentes para ese período, sin embargo, no serán tratados en forma explícita sino que estarán reflejados en las demandas de stocks finales que ellos manifiesten en el período presente[3].

Los stocks de trabajo que poseen las empresas al comienzo del período corriente han sido contratados durante períodos precedentes. El tiempo disponible del período corriente de las familias ha sido asignado por ellas al trabajo y al tiempo libre durante el período pasado. Ellas disponen de una cantidad de tiempo del período próximo que puede ser (parcialmente) vendido como trabajo potencial a las empresas en el período corriente. Hay un único tipo de trabajo y n bienes producidos.

Si bien los intercambios y la distribución de beneficios se realizan al final del período corriente, los planes de los agentes para el período próximo se formulan al comienzo del período en curso. De tal modo, luego de la determinación de un equilibrio mediante un proceso convencional de tanteo de precios, los agentes pasan a cumplir sus contratos. En particular, las empresas pasan a cumplir sus planes de producción. Los productos producidos durante el período estarán así disponibles al final del mismo, cuando se efectúan los intercambios.

Hay n procesos de producción: uno para cada bien. En ellos imperan los rendimientos constantes a escala y las proporciones fijas

3 Este procedimiento puede justificarse suponiendo que los agentes tienen ciertas expectativas con respecto a los precios que regirán en el futuro. Utilizando una técnica de programación dinámica, puede construirse una función de utilidad esperada que reduce el problema de elección intertemporal a un problema de decisión de un único período. Cfr. GRANDMONT (1977).

entre los insumos. Cada proceso usa bienes producidos y trabajo para la producción de un único bien. Sea $A \in R_+^{n \times n}$ la matriz de in. no-producto: $A_{ij}$ denota la cantidad de j necesaria como insumo para la producción de una unidad de i. Sea $t \in R_+^n$ el vector de coeficientes de trabajo: $t_i$ denota la cantidad de trabajo requerida para la producción de una unidad de i. Luego (A, t) denota a la tecnología y $(A, t)_i$ al i-ésimo proceso. (A, t) verifica el siguiente supuesto:

S1 a) A es convexa y productiva[4]; b) $t > o$.

Cada familia y cada empresa tiene un preorden de preferencias representable mediante una función de utilidad ordinal U que verifica:

S2 U es a) continúa, b) creciente, c) estrictamente cuasi-cóncava[5].

4 Una matriz A es *productiva* si existe un vector $q > o$ tal que $qA < q$. Cfr. Gale (1960), p. 296. Una matriz es *conexa* si es indescomponible y no es la matriz cero de 1 × 1. Esta distinción resulta a menudo útil. Por ejemplo, nótese que en la definición de Gantmacher (1959) de indescomponibilidad (o irreducibilidad) una matriz cero de 1 × 1 resulta ser indescomponible. Este hecho obviamente contradice su corolario al Lema 1 (p. 52). La importancia de esta distinción para la clasificación sraffiana de las mercancías no-básicas ha sido analizada en Escudé (1981).

5 U es *estrictamente cuasi-cóncava* si $x_2 \neq x_1$ y $U(x_2) \geqq U(x_1)$ implican $U(x(a)) > U(x_1)$, donde $x(a) = ax_1 + (1-a)x_2$, $a \in (o, 1)$. Obsérvese que $S_2$ implica que U es *estrictamente creciente* en el siguiente sentido: $x_2 > x_1$ implica $U(x_2) > U(x_1)$. Para comprobarlo, tómese $x_2 > x_1$. Por S2b), $U(x_2) \geqq U(x_1)$. Supongamos que rige la igualdad. Entonces por S2c) se tiene, $x_2 > x(a) > x_1$ y $U(x(a)) > U(x_1) = U(x_2)$. En particular, se tiene $x_2 > x(a)$ y $U(x_2) < U(x(a))$ lo cual contradice S2b).

Para evitar complicaciones postularemos dos supuestos *ad- hoc*. En primer lugar, la demanda y la oferta de bienes y trabajo por parte de cada familia $i \in I$ (empresa $k \in K$) está restringida a un conjunto $X^i$ ($Y^k$) compacto, convexo y que contiene al o. En segundo lugar, cada familia i (empresa k) posee un vector de stocks iniciales de bienes y trabajo $a^i_o$ ($a^k_o$) estrictamente positivo. Por supuesto, muchos de los elementos de ese vector pueden ser arbitrariamente pequeños.

## 2. *Las familias.*

Hay I familias que demandan bienes, ofrecen trabajo y son propietarias de empresas y de stocks de bienes y tiempo vital. $C_{ik}$ es la participación de i en la empresa k, donde $\sum_i C_{ik} = 1$ para todo k. Sea $b^k$ (p) los beneficios distribuidos por k cuando los precios son $p \equiv \equiv (p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}) \equiv (p^1, p_{n+1})$, donde $p_{n+1}$ es el salario. El ingreso por beneficios de i es $b^i(p) = \sum_k b^k(p)\, C_{ik}$ . $a^i_o$ es el vector de stocks iniciales de i. Su (n+ 1) -ésimo elemento, $a^i_{o(n+1)}$, denota el tiempo disponible de i en el próximo período. Es ésta la cantidad máxima de trabajo que i puede ofrecer para el próximo período.

Luego el espacio de elección de i, $X^i$, puede escribirse en la forma $\underline{S}^i \times \underline{L}^i$ donde $\underline{L}^i = [o, a^i_{o(n+1)}]$. Por nuestro supuesto *ad-hoc*, $\underline{S}^i$ es compacto, convexo y contiene al $o \in R^n_+$.

Las familias determinan sus funciones de demanda de bienes $S^i$ (p) y de oferta de trabajo $L^i$ (p) (o, alternativamente, de demanda de tiempo libre $a^i_{o(n+1)} - L^i(p)$) mediante el siguiente proceso de optimización.

$$(1)\ (S^i(p), L^i(p)) = \underset{(S^i, L^i)}{\arg\max} \ \{ U^i (S^i, a^i_{o\ (n+1)} - L^i) \ / \ (S^i, L^i) \in X^i,$$

$$(S^i, a^i_{o\,(n+1)} - L^i)\, p \leqq a^i_o\, p + b^i(p) \ \}$$

Como $X^i$ es compacto y $U^i$ continua, dado cualquier $p \in R_+^{n+1}$ (1) está bien definido. Usando el clásico Teorema del Máximo puede demostrarse que si cada $b^k$ (p) es una función continua, también lo es $(S^i(p), L^i(p))$. [6] El vector de demandas *netas* de bienes y trabajo de i

6 La continuidad de $(S^i(p), L^i(p))$ puede demostrarse aplicando la proposición de Debreu sobre la continuidad de la correspondencia de presupuesto (cfr. Debreu (1959), proposición 4-8 (1)) y el Teorema del Máximo (cfr. Berge (1959), Cap. VI.3). Para conveniencia del lector los incluimos a continuación. (El Teorema del Máximo que formulamos en realidad combina el Teorema del Máximo de Berge con su Teorema 2 del Cap. VI.3. Esa versión resulta más útil para nuestros propósitos).

*Teorema de continuidad:*

Si a) $g^i(p, w^1, \ldots, w^m) = \{ x \in X^i \ / \ xp \leqq w^i \}$

b) $X^i$ es compacto y convexo.

c) $(p_o, w_o) \in R^{n \times m}$ es tal que $g^i(p_o, w_o) \neq \emptyset$ y $w^i_o > \min \{ xp_o \ / \ x \in X^i \}$

entonces $g^i$ es continua en $(p_o, w_o)$.

*Teorema del Máximo*: Sea $G: X \to Y$ una correspondencia continua tal que para todo $x \in X$, $G(x) \neq \emptyset$. Sea $f: X \times Y \to R$ una función continua. Entonces $M(x) = \max \{ f(x, y) \ / \ y \in G(x) \}$ es una función continua y $F(x) = \{ y \in G(x) / f(x,y) = M(x) \}$ es una correspondencia semi-continua superiormente (s.c.s.).

*Continuidad de $(S^i(p), L^i(p))$* : Sea $\bar{P} \equiv R_+^{n+1} \sim \{o\}$. Definase la correspondencia $g^i$: $\bar{P} \times \text{int}\, R_+ \to X^i$, $g^i(p, w^i) = \{ (S^i, L^i) \in X^i / (S^i, a^i_{o\,(n+1)} - L^i)p \leqq w^i \}$ $X^i$ es compacto y convexo por hipótesis. Además, $(o, a^i_{o(n+1)}) \in g^i(p, w^i)$ y $w^i > o = \min \{ (S^i, L^i)p / (S^i, L^i) \in X^i \}$. Luego puede aplicarse el Teorema de Continuidad (con $m = 1$ y $w^1 = w^i$) y concluirse que $g^i$ es continua en $(p, w^i)$. Definamos ahora la función de ingresos no-laborales de i:

$$w^i : \bar{P} \to \text{int}\, R_+ ; \ w^i(p) = a^i_o\, p + \sum_{k \in K} b^k(p) C_{ik}$$

es entonces $(S^i(p) - a^i_{oI}, - L^i(p))$ donde $a^i_{oI}$ es el vector que incluye los primeros n elementos de $a^i_o$ .

## 3. *Las empresas*

Hay K empresas, cada una de las cuales puede producir los n bienes. Cada empresa utiliza sus stocks iniciales para producir durante el período corriente y al final del mismo ofrece sus productos y demanda stocks finales $a^k$ para tener al comienzo del período próximo. Sea $q^k$ el vector de producción bruta de k. Como los intercambios se realizan al final del período, la producción de k está restringida por sus stocks iniciales. En consecuencia, $q^k$ debe pertenecer al conjunto

$$(2) \qquad Q^k = \{q^k \in R^n_+ \;/\; q^k (A,t) \leqslant a^k_o \} .$$

Los beneficios de k son $q^k Bp$, donde $B = (I\text{-}A, -t)$. La empresa decide qué proporción de sus beneficios va a retener al determinar su demanda de stocks finales. Verbigracia, si $a^k p > a^k{}_o p$, desea retener una parte de sus beneficios: $(a^k - a^k{}_o)p$. Suponemos que el resto,

Si $b^k(p)$ es una función continua en $\overline{P}$ para toda k (lo cual demostraremos en la Nota 7), $w^i(p)$ es también una función continua y, por lo tanto, $\overline{g}^i(p) \equiv g^i(p, w^i(p))$ es una correspondencia continua en $\overline{P}$.

Podemos ahora aplicar el Teorema del Máximo, con $G \equiv \overline{g}^i : \overline{P} \to X^i$

$f \equiv \overline{U}^i : \overline{P} \times X^i \to R$, donde

$\overline{U}^i(p, S^i, L^i) \equiv U^i(S^i, a^i_{o(n+1)} - L^i)$ ;

$M(p) = \max \{ U^i(S^i, a^i_{o(n+1)} - L^i) / (S^i, L^i) \in \overline{g}^i(p) \}$ ,

$F \equiv (S^i, L^i); (S^i(p), L^i(p)) = \{ (S^i, L^i) \in \overline{g}^i(p) / U^i(S^i, a^i_{o(n+1)} - L^i) = M(p) \}$.

Obsérvese que para todo $p \in \overline{P}$ , $\overline{g}^i(p)$ es no vacío pues contiene $(o, a^i_{o(n+1)})$.
Concluímos que $(S^i(p), L^i(p))$ es una correspondencia s.c.s.
Por cuasi-concavidad estricta de $U^i$, sin embargo, $(S^i(p), L^i(p))$ no puede tener más de un punto. Pues supongamos que $(S_1, L_1)$ y $(S_2, L_2)$ son dos puntos diferentes que pertenecen a $(S^i(p), L^i(p))$. Entonces

$U^i(S_1, a^i_{o(n+1)} - L_1) = U^i(S_2, a^i_{o(n+1)} - L_2)$. Como ambos puntos satisfacen la restricción presupuestaria de (1), también lo hace cualquier combinación estrictamente convexa de ambos. Pero por cuasi-concavidad estricta, tal combinación tiene un mayor nivel de utilidad que cualesquiera de los extremos, contradiciendo así la pertenencia de estos puntos a $(S^i(p), L^i(p))$.
Por lo tanto, $(S^i(p), L^i(p))$ es una función (unívoca). Como es s.c.s., es una función continua.

$$b^k(p,q^k,a^k) \equiv q^k Bp + (a^k_o - a^k)\, p \geqq o$$

se distribuye entre los propietarios. Para tomar tal decisión la empresa dispone de un preorden de preferencias sobre sus beneficios distribuidos y sus stocks finales. La escala absoluta de los precios de cuenta no debe afectar tal decisión. Luego $U^k$ es función de $b^k(p,q^k,a^k)$ /ep y de $a^k$ y la empresa debe maximizar esa función bajo la restricción de que $b^k$ sea no-negativa. Como b es homogénea de grado 1 en p, $U^k$ resulta ser homogénea de grado o en p. Luego podemos restringir el campo de variación de p al conjunto $P = \{ p \in R^{n+1}_+ / ep = 1 \}$ sin pérdida de generalidad. Como $U^l$ no depende de p, ello no afecta la decisión de las familias.

Al determinar $(q^k, a^k)$, la empresa se restringe a su espacio de elección $Y^k = Q^k \times \underline{A}^k$. Como se desprende de (2) y S1, $Q^k$ es compacto, convexo y contiene el o. Por nuestro supuesto *ad hoc*, $\underline{A}^k$ tiene las mismas propiedades.

La empresa determina su plan de producción para el período en curso $(q^k)$ y su demanda de stocks finales $(a^k)$ mediante el siguiente proceso:

$$(3) \quad (q^k(p), a^k(p) = \underset{(q^k,\, a^k)}{\arg\max} \{U^k(q^k Bp + a^k_o p - a^k p, a^k) : (q^k, a^k) \in Y^k, q^k Bp + a^k_o p - a^k p \geqq o \}.$$

Como $Y^k$ es compacto y $U^k$ continua, dado cualquier $p \in P$, $(q^k(p), a^k(p))$ es no-vacío. Puede demostrarse que $q^k(p)$ es una correspondencia s.c.s. y que $a^k(p)$ y $b^k(p) \equiv b^k(p, q^k(p), a^k(p))$ son funciones continuas en P [7].

7 Supongamos por el momento que la correspondencia
$V^k : P \to Y^k ; V^k(p) = \{(q^k, a^k) \in Y^k / q^k Bp + a^k_o p - a^k p \geqq o \}$
es continua. La función
$\bar{U}^k : P \times Y^k \to R \; ; \; \bar{U}^k(p,q^k,a^k) \equiv U^k(q^k Bp + a^k_o p - a^k p, a^k)$
es también continua. Además, para todo $p \in P$, $V^k(p) \neq \emptyset$ pues siempre contiene al o. Luego puede aplicarse el Teorema del Máximo para concluir que
$M(p) = \max \{ \bar{U}^k(p,q^k,a^k) / (q^k,a^k) \in V^k(p) \}$

El vector de ofertas *netas* de bienes y trabajo de k es $q^k(p)B + a^k_o - a^k(p)$ [8].

## 4. *Equilibrio General Walrasiano*

Sea $E_g(p)$, $g = 1, \ldots, n+1$, la demanda excedente de g cuando los precios son p y sea E(p) el vector formado por tales elementos. Por lo visto en las secciones precedentes,

$$E(p) = (S(p), -L(p)) - q(p)B + a(p) - a_o$$

es una función continua y

$$(q^k(p), a^k(p)) = \{(q^k, a^k) \in V^k(p) / \bar{U}^k(p, q^k, a^k) = M(x)\}$$

es una correspondencia s.c.s. Mediante un razonamiento análogo al de la Nota 6 se comprueba que la cuasi-concavidad estricta de $U^k$ implica que $a^k(p)$ es unívoca. Luego $a^k(p)$ es una función continua. $q^k(p)$, sin embargo, puede ser multívoca ya que pueden haber múltiples $q^k \in Q^k$ que hagan máximo a $q^k Bp$. Pero todos los elementos de $q^k(p)$ deben dar el mismo valor a $q^k Bp$. Luego, a pesar de ser $q^k(p)$ una correspondencia (s.c.s.), $q^k(p)Bp$ es una función (continua). Luego

$$b^k(p) \equiv q^k(p)Bp + a^k_o p - a^k(p)p$$

es también una función continua.

Nos resta solamente demostrar que $V^k(p)$ es continua, o sea, semicontinua superior e inferiormente. Con tal fin resulta conveniente reescribir a $V^k(p)$ del siguiente modo:

$$V^k(p) = \{(q^k, a^k) \in Y^k / (q^k, a^k) \binom{-B}{I} p \leqq a^k_o p\}$$

La s.c.s. de $V^k(p)$ se desprende en forma directa del hecho de tener codominio compacto y ser su gráfico,

$$\{(p, q^k, a^k) \in P \times Y^k / (q^k, a^k) \binom{-B}{I} p \leqq a^k_o p\}$$

un conjunto cerrado (cfr. Berge (1959), Cap. VI.1, Corolario al Teorema 7).

Para demostrar la s.c.i. de $V^k(p)$, obsérvese que

$$V^k(p) = f^{-1}(g(p, h(p)))$$

donde

$h : P \to \text{Int } R$, $\qquad h(p) = a^k_o p$

$g : P \times \text{Int } R \to R^{n+1}$ $\qquad g(p,w) = \{Z \in R^{n+1} / Zp \leqq w\}$

$f : Y^k \to R^{n+1}$, $\qquad f(q^k, a^k) = (q^k, a^k) \binom{-B}{I}$

Luego, basta con que h, g y $f^{-1}$ sean s.c.i. para que $V^k$ también lo sea (cfr. Berge (1959), Cap. VI.2, Teorema 1). h es una función lineal y, por lo tanto, continua. Como $Y^k$ es compacto y convexo y f es lineal, $f(Y^k) \subset R^{n+1}$ también es compacto y convexo. Podemos restringir el codominio de g a $f(Y^k)$. Como

$$w > o = \min\{Zp / Z \in f(Y^k)\}$$

se cumplen las condiciones del Teorema de Continuidad. Luego g es continua y, por lo tanto s.c.i. en su dominio. Por último, demostremos que

$$f^{-1} : f(Y^k) \to Y^k, \; f^{-1}(Z) = \{(q^k, a^k) \in Y^k / (q^k, a^k) \binom{-B}{I} = Z\}$$

donde S,L,q,a y $a_o$ denotan las sumas de $S^i$, $L^i$, $q^k$, $a^k$ y $(a^i_{oI}, o)$ sobre sus respectivos superíndices. Nótese que, como q(p) es una correspondencia, también lo es E(p). Dado el carácter estrictamente creciente de las funciones de utilidad (cfr. Nota 5), la solución del problema de

es una correspondencia s.c.i. Nótese que la matriz $\binom{-B}{I} \in R^{(2n+1)\times(n+1)}$ es de rango n+1 . La matriz

$$C = \begin{pmatrix} I & -B \\ o & I \end{pmatrix} \in R^{(2n+1)\times(2n+1)}$$

(donde la matriz identidad de arriba es de nxn y la de abajo es de (n+1) x (n+1)) es de determinante 1 y, por lo tanto, inversible. Sean $Z \in f(Y^k)$, $< Z^r >$ una sucesión de elementos de $f(Y^k)$ que tiende a Z, y sea $(q, a) \in f^{-1}(Z)$. Queremos construir una sucesión $< q^r, a^r >$ que tienda a (q, a) y tal que $(q^r, a^r) \in f^{-1}(Z^r)$ para todo r. (cfr. Debreu (1959), p. 23). Sea

(a) $(q, a^r) = (q, Z^r)\ C^{-1}$

Como $(q,a) \in f^{-1}(Z)$ se tiene $(q,a)\binom{-B}{I} = Z$ y $(q,a)\ C = (q,Z)$.
Luego, como $Z^r \to Z$,

$(q,a^r) = (q, Z^r)\ C^{-1} \to (q, Z)\ C^{-1} = (q, a)$.

Además, de (a) se desprende que $(q, a^r)\binom{-B}{I} = Z^r$, o sea, $(q, a^r) \in f^{-1}(Z^r)$.

Luego se tiene la sucesión buscada.

8 En lo precedente (y en lo que sigue) hemos estado suponiendo implícitamente que los stocks de trabajo de las empresas son almacenables. Es por ello que las empresas pueden ofrecer al mercado sus stocks de trabajo excedentes $a^k_{o(n+1)} - q^k t$. Este proceder no es del todo compatible con la interpretación de $a^i_{o(n+1)}$ como tiempo vital, el cual no es almacenable. Optamos por suponer stocks almacenables de trabajo por simplicidad de notación y porque, para simplificar las demostraciones, hicimos el supuesto ad-hoc de que $a^k_o$ es estrictamente positivo. No obstante, conviene señalar cómo deberían modificarse las funciones en caso de suponer que los stocks de trabajo no son almacenables:

a) Beneficios : $q^k Bp - (a^k_{o(n+1)} - q^k t)p_{n+1} = q^k(I-A)p^1 - a^k_{o(n+1)}p_{n+1}$

b) Beneficios retenidos : $a^k p - a^k_o p$

c) Beneficios distribuidos : $q^k\ (I-A)p^1 + a^k_{oI}\ p^1 - a^k p$

d) Oferta neta de bienes : $q^k\ (I-A) + a^k_{oI} - a^k_I$

e) Demanda neta de trabajo : $a^k_{(n+1)}$

b) y d) no han cambiado. Como el trabajo no es almacenable, los stocks de trabajo no utilizados por las empresas durante el período simplemente desaparecen (transformándose en tiempo de ocio extraordinario de los trabajadores). Esta destrucción improductiva de sotcks constituye un costo para las empresas y debe ser restado de los beneficios (a)) y de los beneficios distribuidos (c)). Además, la demanda neta de trabajo es ahora igual a la demanda de stocks finales de trabajo (e)).

elección de la familia debe cumplir la restricción presupuestaria con igualdad, o sea

$$(S^i(p), a^i_{o(n+1)} - L^i(p))p = a^i_o p + \sum_k [\, q^k(p)B + a^k_o - a^k(p)] \, p\, C_{ik}.$$

Agregando sobre i se obtiene

$$(4) \quad E(p)p = o\,.$$

Una aplicación directa del Lema de Gale-Nikaido [9] asegura la existencia de un $p^\star \epsilon\ P$ tal que $E(p^\star)$ contiene un elemento $E^\star \leqq\ o$. Consecuentemente, existe un $q^\star\ \epsilon\ q(p^\star)$ tal que

$$(S(p^\star), - L(p^\star)) + a(p^\star) \leqq q^\star B + a_o\,.$$

Como $E^\star p^\star = o$ , $E^\star \leqq o$ y $p^\star \geqslant 0$ se deduce que $p^\star_g > o$ implica $E^\star_g = o$ . Luego

$$\{p^\star; (S^i(p^\star), L^i(p^\star)), i\ \epsilon\ I\, ; ((q^k)^\star, a^k(p^\star)), k\ \epsilon\ K\}$$

constituye un Equilibrio General Walrasiano (EGW), o sea, una situación en la cual todos los agentes cumplen sus planes óptimos con respecto a los precios dados, no hay demanda excedente (positiva) en ningún mercado y sólo puede haber oferta excedente (positiva) en un mercado si el precio correspondiente es nulo (o sea, se ha convertido en un bien gratuito). En un EGW tanto las familias como las empresas maximizan utilidad sujetas a sus restricciones "naturales" y sólo puede haber desempleo si el salario es nulo.

Podemos sintetizar los resultados precedentes en el siguiente Teorema:

*Teorema 1.* Si para todo $i\ \epsilon\ I$ $(k\ \epsilon\ K)$, $S^i$ $(A^k)$ es compacto, convexo

9 *Lema de Gale-Nikaido:* Sea $Z \subset R^m$ un conjunto compacto y $R = \{p\ \epsilon\ R^m_+ / ap = 1\}$ donde $a > o$. Sea $F : R \rightarrow Z$ una correspondencia s.c.s. tal que para todo $p\ \epsilon\ R$, $F(p)$ es no-vacío y convexo y verifica $F(p)p \leqq o$. Entonces existe $p^\star\ \epsilon\ R$ tal que $F(p^\star)$ contiene un elemento $Z^\star \lneqq o$.
En nuestro caso, dado $p\ \epsilon\ P$, $E(p)$ es no-vacío. Se desprende de (6) de la Sección 5 que $q^k(p)$ es convexo. Como la suma y las transformaciones lineales conservan la convexidad, $E(p)$ también es convexo (Cfr. Rockafellar (1970), Cap. I.3). Además, $E(p)$ tiene codominio compacto y es s.c.s. pues lo mismo ocurre con todas las funciones y correspondencias involucradas en su definición. Luego, teniendo en cuenta (4), se cumplen todas las condiciones del Lema.

y contiene el origen, $a^i{}_o$ $(a^k{}_o)$ es estrictamente positivo y se verifican S1 y S2, entonces existen $p^\star \epsilon P$ y $q^\star \epsilon q(p^\star)$ tales que:

a) $(S(p^\star), - L(p^\star)) + a(p^\star) \leqq q^\star B + a_o$

b) $S_g(p^\star) + a_g(p^\star) = q^\star B^g + a_{og}$ si $p^\star{}_g > o, g = 1, \ldots, n$

c) $L(p^\star) + a_{o(n+1)} = q^\star t + a_{(n+1)} (p^\star)$ si $p^\star{}_{n+1} > o$.

Obsérvese que el Teorema no descarta la posibilidad de que se $Bp^\star < o$, en cuyo caso $q^\star = o$, o sea, se obtiene un equilibrio sin producción en el cual todos los intercambios se refieren a bienes que provienen del período precedente [10].

## *5. Maximización de beneficios*

Puede verificarse que (3) equivale al siguiente proceso de optimización secuencial [11]:

$$(5a) \quad q^k(p) = \arg\max_{q^k}\{ U^k (q^k Bp + a^k{}_o p - a^k p, a^k) : q^k \;\epsilon\; Q^k\}$$

$$(5b) \quad a^k(p) = \arg\max_{a^k}\{ U^k(q^k(p) Bp + a^k{}_o p - a^k p, a^k) : a^k \;\epsilon\; A^k, \; a^k p \leqq q^k (p) Bp + a^k_o p\} .$$

10 Podríamos haber supuesto que $u^i$ y $U^k$, en lugar de ser estrictamente cuasi-cóncavas fueran meramente *semi-estrictamente cuasi-cóncavas* (cfr. Arrow-Hahn (1971), p. 87):

$$U(x_2) \geqq U(x_1) \Rightarrow U(x(a)) \geqq U(x_1) \quad \forall a \;\epsilon\; [o,1]$$

$$U(x_2) > U(x_1) \Rightarrow U(x(a)) > U(x_1) \quad \forall a \;\epsilon\; [o,1],$$

donde $x(a) = ax_1 + (1-a) x_2$. En ese caso, $(S^i(p), L^i(p))$ y $a^k(p)$ serían correspondencias s.c.s. como se demuestra en las Notas 6 y 7. (4) aún tendría validez y podría aplicarse igualmente el Lema de Gale-Nikaido. Se concluiría que existe un $p^\star \epsilon P$ tal que $E(p^\star)$ contiene un elemento $E^\star \leqq o$. O sea, existen $(S^\star, L^\star) \epsilon (S(p^\star), L(p^\star))$ y $(q^\star, a^\star) \epsilon (q^k(p^\star), a^k(p^\star))$ tales que:

a) $(S^\star, - L^\star) + a^\star \leqq q^\star B + a_o$

b) $S^\star{}_g + a^\star{}_g = q^\star B^g + a_{og}$ si $p^\star{}_g > o, g = 1, \ldots, n$

c) $L^\star + a_{o(n+1)} = q^\star t + a^\star{}_{n+1}$ si $p^\star{}_{n+1} > o$.

11 Es evidente que todo elemento de (3) pertenece a (5). Para comprobar que vale la inclusión recíproca, supongamos que (q, a) pertenece a (5) pero no a (3). Entonces

Como se demostró en la Nota 5, S2 implica que $U^k$ es estrictamente creciente. Por ello, $q^k(p)$ es independiente del valor que se le dé a $a^k$ en (5a) y puede reformularse del siguiente modo:

$$(6) \qquad q^k(p) = \{q^k \in Q^k \,/\, q^k Bp \text{ es máx}\}$$

De (6) podemos deducir que los procesos que rinden beneficios positivos (si alguno existe a los precios dados) deben ser operados por cada empresa hasta el límite de su capacidad, o sea, hasta que se le agote algún stock. Por otro lado, los procesos que dan pérdida no deben ser operados. Para formalizar estas observaciones, definimos:

$$N = \{1, \dots, n\}\ ,\ G(p) = \{g \in N \,/\, B_g p > o\}$$

$$H(p) = \{g \in N \,/ B_g p < o\},\ \dot{Q}^k = \{q^k \in R^n_+ \,/ q^k(A,t) \leqq a^k_o\}$$

G(p) y H(p) son los procesos que (a los precios p) rinden beneficios positivos y negativos, respectivamente. $\dot{Q}^k$ es la frontera de eficiencia del conjunto de posibilidades de producción $Q^k$. Puede demostrarse el siguiente teorema [12].

existe $(\overline{q}, \overline{a}) \in Y^k$ que satisface la restricción de (3) y tal que

(a) $\quad \overline{U}^k(\overline{q}, \overline{a}) > \overline{U}^k(q, a)$

donde $\overline{U}^k(q,a) \equiv U^k(q^k Bp + a^k_o p - a^k p, a^k)$. Como q pertenece a (5a) (dado cualquier $a^k \in \underline{A}^k$) se tiene

(b) $\quad \overline{U}^k(q, \overline{a}) \geqq \overline{U}^k(\overline{q}, \overline{a})$.

Combinando (a) y (b) se tiene:

(c) $\quad \overline{U}^k(q, \overline{a}) > \overline{U}^k(q, a)$

por lo cual a no puede pertenecer a (5b).

12 *Demostración del Teorema 2;*

a) sean $g' \in G(p)$ y $q^k \in q^k(p)$ y supongamos que $\sum_{g \in G(p)} q^k_g (A,t)_g < a^k_o$.
Entonces para $\epsilon > o$ suficientemente pequeño

$$\overline{q}^k \equiv \sum_{g \in G(p)} q^k_g\, e_g + \epsilon e_{g'} \in Q^k.$$

Además,

$$q^k Bp = \sum_{g \in N \sim G(p)} q^k_g B_g p + \sum_{g \in G(p)} q^k_g B_g p \leqq$$

$$\sum_{g \in G(p)} q^k_g B_g p < \sum_{g \in G(p)} q^k_g B_g p + \epsilon B_{g'} p = \overline{q}^k Bp.$$

*Teorema 2.* Para todo $p \geqq o$ y todo $k \in K$ se tiene:

a) Si $G(p) \neq \emptyset$ y $q^k \in q^k(p)$ entonces $\sum_{g \in G(p)} q^k{}_g e_g \in Q^k$

b) Si $g \in H(p)$ y $q^k \in q^k(p)$ entonces $q^k{}_g = o$.

## 6. *El costo imputado al uso de stocks.*

Relacionemos nuestro resultado con el marco típico de la economía lineal. Defínase la tasa de ganancia del proceso g:

$$r_g \equiv B_g p \;/\; (A,t)_g p$$

Luego se cumple la ecuación de precios para el caso del salario pagadero por adelantado y tasas de ganancias no-uniformes:

$$\hat{r}\,(A,t)p = Bp \quad \text{ó} \quad p^1 = (I + \hat{r})\;(Ap^1 + tp_{n+1})$$

donde $\hat{r} \equiv \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_n)$. Algunas (o todas las) tasas de ganancia pueden ser negativas.

Por (6), $q^k(p)$ puede expresarse alternativamente como el conjunto de soluciones óptimas del siguiente programa lineal:

$$(P^k) \quad \max_{q^k} \quad q^k Bp \quad ; \quad q^k (A,t) \leqq a^k{}_o \quad , \quad q^k \geqq o.$$

Como este programa tiene solución, también debe tenerla el siguiente programa dual [13]

$$(D^k) \quad \min_{Z^k} \quad a^k{}_o Z^k \quad ; \quad (A,t)Z^k \geqq Bp \, , \quad Z^k \geqq o\, .$$

lo cual contradice a $q^k \in q^k(p)$.

b) Supongamos que $q^k \in q^k(p)$ y $q^k{}_g > o$ para $g \in H(p)$.
Como $q^k \in Q^k$ se tiene $q^k - \epsilon q^k{}_g e_g \in Q^k$ para $\epsilon > o$ suficientemente pequeño. Pero

$$(q^k - \epsilon q^k{}_g e_g)Bp = q^k Bp - \epsilon q^k{}_g B_g p > q^k Bp$$

lo que contradice $q^k \in q^k(p)$.

13 Véase Nikaido (1978), Teorema 25. 2d (iii), p. 182.

Podemos interpretar la solución $\overline{Z}^k$ de $(D^k)$ como el vector de costos que k imputa a la utilización de sus sotcks. Si $\overline{q}^k$ es solución de $(P^k)$, sabemos por dualidad que debe verificarse [14].

(7) $\overline{q}^k \; [ \, (A,t) \, \overline{Z}^k \; - \; Bp \; ] = o \, .$

Como tanto $\overline{q}^k$ como el término entre corchetes son no-negativos, se deduce que

$$(A,t)_g \; \overline{Z}^k > B_g p \equiv r_g \; (A,t)_g p \; \Rightarrow \; \overline{q}^k{}_g = o \, .$$

O sea, si la empresa le imputa al uso de sus stocks en un proceso un costo superior al que le asigna el sistema de precios opta por no operar al proceso.

## 7. *Racionamiento en el mercado de trabajo.*

De ahora en adelante suponemos que el salario es completamente rígido y que, consecuentemente, el mercado de trabajo se ajusta por racionamiento de cantidades. También suponemos que cuando un agente es racionado en el mercado de trabajo reformula sus demandas de bienes. Mientras sus demandas originales son la "nocionales" llamaremos "efectivas" a las formuladas en la "segunda vuelta de decisión". Por simplicidad, en lugar de manejarnos con un esquema general de racionamiento, suponemos que existe un mecanismo determinado que explicamos a continuación. Esquemas diferentes son, por supuesto posibles.

Los planes nocionales $S^i(p)$, $q^k(p)$ y $a^k(p)$ son determinados por (1) y (3). Definamos la correspondencia de demanda de trabajo de k:

$$N^k(p) = a^k_{(n+1)} \; (p) \; - \; a^k{}_{o\,(n+1)} + q^k(p)t.$$

Si bien la empresa comunica $N^k(p)$ al "mercado", éste (o un "subastador no-walrasiano") registra solamente el valor máximo de dicho intervalo:

$$\tilde{N}^k(p) = \max \; N^k(p) \, .$$

14 Ibid., Observación 7, p. 183.

Como a lo largo de este trabajo hemos estado suponiendo que la empresa puede ofrecer al mercado sus stocks sobrantes de trabajo, es posible que $\tilde{N}^k(p)$ sea negativo. Para definir nuestro mecanismo de racionamiento será conveniente distinguir entre las empresas que demandan trabajo y las que sólo lo ofrecen. Con tal propósito, defínase

$$K_1(p) = \{k \in K \,/\, \tilde{N}^k(p) \geqq o\},\ K_2(p) = \{k \in K \,/\tilde{N}^k(p) < o\}$$

Luego la oferta y demanda agregadas de trabajo que el mercado registra son las siguientes

$$O(p) = L(p) - \sum_{k \in K_2(p)} \tilde{N}^k(p),\ D(p) = \sum_{k \in K_1(p)} \tilde{N}^k(p).$$

Sea

$$M(p) = \max\ (O(p)\ ,\ D(p)).$$

Como $O(p) \geqslant o$ y $D(p) \geqslant o$, se tiene $M(p) \geqslant o$. Si $M(p) = o$ se tiene $O(p) = D(p) = o$ y el mercado de trabajo se "despeja" sin necesidad de intercambio. Si $M(p) > o$, pueden definirse las ofertas y demandas racionadas de trabajo del siguiente modo:

$$\bar{L}^i(p) = \frac{D(p)}{M(p)} L^i(p);\qquad \bar{N}^k(p) = \begin{cases} \dfrac{O(p)}{M(p)}\ \tilde{N}^k(p) & \text{si } k \in K_1(p) \\ \dfrac{D(p)}{M(p)}\ \tilde{N}^k(p) & \text{si } k \in K_2(p). \end{cases}$$

Como verificamos a continuación, tales demandas y ofertas racionadas necesariamente despejan al mercado de trabajo:

$$(8)\quad \bar{L}(p) - \bar{N}(p) = \frac{D(p)}{M(p)} L(p) - \frac{O(p)}{M(p)} \sum_{k \in K_1(p)} \tilde{N}^k(p) - \frac{D(p)}{M(p)} \sum_{k \in K_2(p)}$$

$$= y\,\tilde{N}^k(p)\,\frac{D(p)}{M(p)}\,(L(p) - \sum_{k \in K_2(p)} \tilde{N}^k(p)) - \frac{O(p)}{M(p)} \sum_{k \in K_1(p)} \tilde{N}^k(p) =$$

$$= \frac{D(p)}{M(p)}\ O(p)\ -\ \frac{O(p)}{M(p)}\ D(p)\ =\ o$$

Una vez que la empresa conoce su demanda racionada de trabajo recalcula su plan teniendo en cuenta dicha restricción. Su plan de *producción efectivo* y su *demanda efectiva de stocks finales* se determinan, entonces, mediante el siguiente proceso:

$$(9)\quad (\bar{q}^k(p), \bar{a}^k(p)) = \underset{(q^k,\ a^k)}{\arg\max} \{U^k(q^k Bp + a_o^k p - a^k p,\ a^k):$$

$$(q^k, a^k) \in Y^k, q^k Bp + a_o^k p - a^k p \geqq o,\ a^k_{(n+1)} - a^k_{o(n+1)} + q^k t = \bar{N}^k(p)\}.$$

Una vez más, por la compacidad de $Y^k$ y la continuidad de $U^k$, para todo $p \in P, (\bar{q}^k(p), \bar{a}^k(p))$ es no-vacío. Puede probarse que $\bar{q}^k(p)$ es una correspondencia s.c.s. y $\bar{a}^k(p)$ es una función continua en P [15]. Definamos los *beneficios distribuidos efectivos* de k y el *ingreso efectivo por beneficios* de i:

$$\bar{b}^k(p) = \bar{q}^k(p)Bp + a_o^k p - \bar{a}^k(p)\,p$$

$$\bar{b}^i(p) = \sum_{k \in K} \bar{b}^k(p)\, C_{ik}.$$

15 Si la correspondencia

$$\bar{V}^k(p) = \{(q^k, a^k) \in Y^k / q^k Bp + a_o^k p - a^k p \geqq o,\ a^k_{(n+1)} - a^k_{o(n+1)} + q^k t = \bar{N}^k(p)\}$$

es continua en P, la semi-continuidad superior de $(\bar{q}^k(p), \bar{a}^k(p))$ se deduce por aplicación del Teorema del Máximo (cfr. Nota 6). Comprobemos que $\bar{V}^k(p) \neq \emptyset$.
Para ello definimos

$$F(n) = \{y \in Y^k / y\binom{-B}{I} p \leqq a_o^k p,\ y\binom{t}{e_{n+1}} = n\}.$$

Obsérvese que $y^1 \equiv (o, a^k_o e_{n+1}) \in F(o)$ y que existe $y^2 \in F(\tilde{N}^k(p))$ por definición de $\tilde{N}^k(p)$. Por definición de $\bar{N}^k(p)$ se tiene $\bar{N}^k(p) = C\,\tilde{N}^k(p)$, para $C \in [o,1]$. Se comprueba inmediatamente que $Cy^2 + (1 - C)\,y^1 \in F(\bar{N}^k(p)) \equiv \bar{V}^k(p)$. Ahora puede aplicarse el Teorema del Máximo como se hizo en la Nota 7 para comprobar que

$$(\bar{q}^k(p), \bar{a}^k(p)) = \{(q^k, a^k) \in \bar{V}^k(p) / \bar{U}^k(p, a^k, a^k) \text{ es max}\}$$

es una correspondencia s.c.s. Nuevamente, S2 c) implica que $a^k(p)$ es unívoca y, por lo tanto, una función continua.
Demostremos ahora que $\bar{V}^k(p)$ es continua en P. Obsérvese que $\bar{V}^k(p) = V^k(p) \cap W^k(p)$
donde $V^k$ se define como en la Nota 7 y

Ambos son funciones continuas en P.[16]

En forma análoga, una vez que la familia conoce su oferta racionada de trabajo y sus ingresos efectivos por beneficios determina su *demanda efectiva de bienes:*

$$(10)\quad \bar{S}^i(p) = \underset{S^i}{\arg\max}\ \{U^i(S^i, a^i_{o(n+1)} - \bar{L}^i(p)) \ :\ S^i \in \underline{S}^i\ ,\quad S^i p^1 \leqslant \bar{L}^i(p)\ p_{n+1} + a^i_{o1}\ p^1 + \bar{b}^i(p)\}\ .$$

Nuevamente, $S^i(p)$ resulta ser una función continua en P.[17]

## 8. *Equilibrio General No-Walrasiano*

La solución de (10) para todo i, debe satisfacer la restricción presupuestaria con igualdad. Agregando sobre i y teniendo en cuenta las definiciones de $b^i(p)$ y B se obtiene:

$$\bar{S}(p)\, p^1 = \bar{L}(P) P_{n+1} + a_o p + \bar{q}(p)Bp - \bar{a}(p)p =$$

$$W^k(p) = \{(q^k, a^k) \in Y^k / (q^k, a^k) \binom{t}{e_{n+1}} = a^k_{o(n+1)} + \bar{N}^k(p)\ \}.$$

Como demostramos en la Nota 7, $V^k(p)$ es continua en P, por lo cual nos basta con demostrar la continuidad de $W^k(p)$ (cfr. Berge (1959), Cap. VI. 2, Teoremas 2' y 3). La s.c.s. de $W^k(p)$ se desprende de su codominio compacto y su gráfico cerrado. Para comprobar la s.c.i. notemos que $W^k(p) = f(g(p))$ donde

$$g : P \to \text{int}\, R_+ \ ,\qquad g(p) = a^k_{o(n+1)} + \bar{N}^k(p)$$

$$f : \text{int}\, R_+ \to Y^k\ ,\qquad f(w) = \{\ (q^k, a^k)\ \in Y^k /\ (q^k, a^k) \binom{t}{e_{n+1}} = w\}\ .$$

Como $\bar{N}^k(p)$ es continua, g(p) también lo es. La s.c.i. de f(w) puede comprobarse usando el mismo método que empleamos en la Nota 7 para comprobar la s.c.i. de $f^{-1}(Z)$, usando esta vez la matriz

$$D = \begin{pmatrix} I & o & t \\ o & I & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$$

16 Como en el caso de $q^k(p)$, si bien $\bar{q}^k(p)$ es una correspondencia s.c.s., $\bar{q}^k(p)Bp$ no puede ser multívoca. Luego debe ser una función continua.

17 Una vez más, hay que aplicar el Teorema de Continuidad y el Teorema del Máximo en forma análoga a lo efectuado en la Nota 6.

$=[\bar{L}(p) - \bar{a}_{(n+1)}(p) + a_{o(n+1)} \cdot \bar{q}(p)t]\, p_{n+1} + [\bar{q}(p)(I\text{-}A) + a_{o I} \cdot \bar{a}_{I}(p)]\, p^1.$

Teniendo en cuenta la última restricción de (9) se tiene:

$[\bar{S}(p) - \bar{q}(p)(I\text{-}A) - a_{oI} + \bar{a}_{I}(p)]\, p^1 + [\bar{N}(p) - \bar{L}(p)]\, p_{n+1} = o.$

Pero, como el racionamiento despeja al mercado de trabajo (véase (8)), esta expresión se reduce a:

(11) $\bar{E}(p^1, p_{n+1})\, p^1 = o$

donde $\bar{E}(p^1\ p_{n+1}) = \bar{S}(p) - \bar{q}(p)(I\text{-}A) - a_{oI} + \bar{a}_{I}(p)$

Como $p_{n+1}$ es fijo, podemos restringir los precios de los bienes al conjunto

(12) $P(p_{n+1}) = \{\, p^1 \in R^n_+ \ /\ ep^1 = 1 - p_{n+1} \,\}$.

Haciendo uso otra vez del Lema de Gale-Nikaido (cfr. Nota 9) podemos inferir que para todo $\bar{p}_{n+1} \in [o,1)$ existe un vector $\bar{p}^1 \in P(\bar{p}_{n+1})$ tal que $\bar{E}(\bar{p}^1, \bar{p}_{n+1})$ contiene un elemento no-positivo. Como $\bar{q}(p)$ es la única función integrante de $\bar{E}(p)$ que puede ser multívoca, se desprende que $q(\bar{p})$ contiene un elemento $\bar{q}$ tal que

$$\bar{S}(\bar{p}) - \bar{q}(I - A) - a_{oI} + \bar{a}_{I}(\bar{p}) \leqq o.$$

Además, como (11) se cumple en $\bar{p}$, se tiene

$$\bar{S}_g(\bar{p}) - \bar{q}(I\text{-}A)^g - a_{og} + \bar{a}_g(\bar{p}) = o \text{ si } \bar{p}_g > o,\ g = 1, \ldots, n.$$

Sintetizamos estos resultados en el siguiente teorema:

*Teorema 3*: Bajo las condiciones del Teorema 1, para todo $\bar{p}_{n+1} \in [o,1)$, existe un $\bar{p}^1 \in P(\bar{p}_{n+1})$ y un $\bar{q} \in \bar{q}(\bar{p})$ que verifican:

a) $\bar{S}(\bar{p}) - \bar{q}(I - A) - a_{oI} + \bar{a}_{I}(\bar{p}) \leqq o$.

b) $\bar{p}_g > o \Rightarrow \bar{S}_g(\bar{p}) - \bar{q}(I - A)^g - a_{og} + \bar{a}_g(\bar{p}) = o, g = 1, \ldots, n$.

c) $\bar{L}(\bar{p}) - \bar{N}(\bar{p}) = o$.

Siempre que $\bar{p}$ despeje al mercado de trabajo sin necesidad de racionamiento, o sea, siempre que $O(\bar{p}) = D(\bar{p})$, las demandas efectivas de todos los agentes coinciden con las nocionales y se obtiene un EGW. Sin embargo, como $\bar{p}_{n+1}$ es fijo, es poco probable que esto ocurra. Si el mercado de trabajo se despeja por racionamiento, los agentes reformulan sus planes en los restantes mercados. Hemos comprobado que dado cualquier salario fijo $\bar{p}_{n+1} \in [o,1)$, siempre existe un vector de precios $\bar{p}^1$ que torna no-positivas a las demandas excedentes efectivas de todos los bienes y nulas a las de aquéllos bienes que tienen precio positivo. El conjunto $\{\bar{p}; (\bar{S}^i(\bar{p}),\bar{L}^i(\bar{p})), i \in I; (\bar{q}^k, a^k(\bar{p})), k \in K\}$ define un Equilibrio General No-walrasiano.

Obsérvese que en este modelo siempre podemos hacer variar $\bar{p}_{n+1}$ hasta el salario $p^{\star}_{n+1}$ que integra el vector de precios $p^{\star}$ de un EGW. A ese salario el mercado de trabajo se despeja sin necesidad de racionamiento. Por ello no hay necesidad de calcular los planes efectivos, o dicho de otro modo, ellos coinciden con los nocionales. O sea, si puede lograrse suficiente flexibilidad salarial volvemos a un modelo de equilibrio general walrasiano. Como observan Grandmont y Laroque (1976), sin embargo, no puede decirse que el sistema de precios $p^{\star}$ sea mejor que $\bar{p}$, pues, como en *ambos* modelos los agentes formulan sus planes sobre la base de expectativas con respecto al futuro que pueden no realizarse, ninguno de ellos constituye necesariamente un óptimo paretiano.

# BIBLIOGRAFIA

AGUILO E. y J. FERNANDEZ de CASTRO (eds.) (1979), *Desequilibrio, inflación y desempleo,* Vicens.

ARROW K.J. y F.H. HAHN (1971), *General Competitive Analysis,* Holden Day.

BARRO R.J. y H. GROSSMAN (1971) *Un modelo de desequilibrio general de la renta y el empleo,* en Aguiló-Fernández de Castro (1979).

BENASSY, J.P. (1976), *La teoría del desequilibrio y los fundamentos microeconómicos de la macroeconomía,* en Aguiló-Fernández de Castro (1979).

BERGE, C. (1959), *Espaces Topologiques,* Dunod, París.

CLOWER, R. (1965), *La contrarrevolución keynesiana: una valoración teórica, en Teoría de los tipos de interés,* F. Hahn y F.P.R. Brechling (eds.) Labor, 1974.

DEBREU, G. (1959), *Teoría del valor,* Bosch, 1973.

ESCUDE, G.J. (1981), *El modelo de Sraffa y el modelo lineal general de producción simple,* Tesis Doctoral (no publicada), Universidad de Bs.As.

ESCUDE, G.J. (1982), *La Mercancía Patrón Generalizada para trabajo heterogéneo y equilibrio general,* Económica, La Plata, 1, 1982.

GALE, D. (1956), *The law of supply and demand,* Mathematica Scandinavica, 3.

GANTMACHER, F.R. (1959), *The theory of matrices,* Vol. II, Chelsea, New York.

GRANDMONT, J.M. (1977), *Temporary General Equilibrium,* Econometrica 46.

GRANDMONT, J.M. y G. LAROQUE (19[illegible]) *On Temporary keynesiana equilibrium,* Review of Economic Studies, 4[illegible]

HICKS, J.R. (1939), *Valor y capital,* Fondo de Cultura Económica, 1968.

HICKS, J.R. (1965), *Capital y crecimiento,* Bosch, 1967.

JOHANSEN, L. (1963), *Labour theory of value and marginal utilities,* Economics of planning, Vol. 3, No. 2, Setiembre.

MORISHIMA, M. (1964), *Equilibrium, stability and growth, Clarendon Press, Oxford.*

NIKAIDO, H. (1959), *On the classical multilateral exchange problem,* Metroeconomica.

NIKAIDO, H. (1970), *Métodos matemáticos del análisis económico moderno,* Vicens, 1978.

ROCKAFELLAR, R.T. (1970), *Convex Analysis,* Princeton U.P.

SCHWARTZ, J.T. (1961), *Lectures on the mathematical method in analytical economics,* Gordon and Breach, New York.

# EQUILIBRIO GENERAL WALRASIANO Y NO-WALRASIANO EN UNA ECONOMIA DE LEONTIEF

## SUMARIO

En una economía de producción con empresas dotadas de una tecnología de Leontief, restricciones de stocks y preferencias sobre los beneficios distribuidos y stocks finales se determina la existencia de un equilibrio walrasiano. Se trata de relacionar los resultados con los modelos lineales usuales. Luego se transforma al modelo en uno no-walrasiano suponiendo que el salario es fijo y que el mercado de trabajo se ajusta por racionamiento proporcional. Por medio de la hipótesis de decisión dual de Clower se obtienen los conceptos de *plan de producción efectivo*, ***demandas efectivas de bienes***, e ***ingresos efectivos*** y se demuestra la existencia de un equilibrio no-walrasiano.

# GENERAL WALRASIAN AND NON-WALRASIAN EQUILIBRIUM IN A LEONTIEF ECONOMY

## SUMMARY

In a non-monetary production economy in which firms have a Leontief technology, stock constraints and preferences on distributed profits and final stocks, a walrasian equilibrium is shown to exist. The results are related to those of standard linear models. Then the model is transformed into a non-walrasian one by assuming a fixed wage and proportional rationing in the labor market. By means of Clower's dual decision hypothesis, concepts of ***effective production plans,*** *effective demands for goods* and *effective incomes* are obtained and a non-walrasian equilibrium is shown to exist.