*LA MERCANCIA PATRON GENERALIZADA PARA TRABAJO HETEROGENEO Y EQUILIBRIO GENERAL**

GUILLERMO ESCUDE **

En las páginas que siguen elaboramos un modelo lineal de producción no-conjunta que difiere en diversos aspectos del modelo de Sraffa (1960). En primer lugar, mientras el modelo de Sraffa de producción no-conjunta es un modelo de capital circulante, el modelo que desarrollamos incluye tanto al capital circulante como al capital fijo. Para ello, diferenciamos a los requerimientos *flujo* de los requerimientos *stock* en el proceso productivo. En segundo lugar, mientras el modelo de Sraffa es de trabajo homogéneo, nosotros desarrollamos un modelo de trabajo heterogéneo. Tomamos de Sraffa el concepto de mercancía básica así como el supuesto de que existen tales mercancías. Generalizamos la Mercancía Patrón de Sraffa para nuestro modelo general y observamos que el uso de tal mercancía como numerario linealiza la frontera de precios de los factores.

En la segunda parte utilizamos los supuestos de la primera para cerrar el modelo y demostrar la existencia de equilibrio general. Si bien seguimos bastante de cerca a Schwartz (1961) en los lineamientos generales, los resultados de la primera parte nos permite relajar el supuesto de indescomponibilidad que usa Schwartz. Además, el uso de la Mercancía Patrón Generalizada nos permite simplificar el análisis de Schwartz. Otras características que distinguen al trabajo son la

* Este trabajo extiende al caso de trabajo heterogéneo conclusiones obtenidas para el caso homogéneo en la Tesis Doctoral que desarrollé bajo la dirección del Dr. J.H.G. OLIVERA y presenté este año a la UBA. Agradezco el permanente estímulo brindado a lo largo de muchos años por el Dr. OLIVERA. La investigación se realizó mientras era beneficiario de una Beca de Perfeccionamiento del CONICET.

** Profesor Adjunto de Macroeconomía e Investigador del Instituto de Investigaciones Económicas (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires).

de basar el análisis de la maximización de beneficios de las empresas en el Teorema Fundamental de Dualidad de la programación lineal y la de basar la demostración de la existencia de equilibrio general en el Lema de Gale-Nikaido.

I. EL MODELO LINEAL GENERAL Y LA MERCANCIA PATRON GENERALIZADA

1. El modelo de capital circulante de Sraffa.

Puede representarse al modelo de Sraffa mediante las siguientes ecuaciones:

$$q\Pi + s = q, \qquad s \geq 0,\ q > 0^{1} \tag{1}$$

$$\Pi p\,(1+r) + \ell w = p, \qquad r \geqq 0, \tag{2}$$

donde:

$q \in R_+^n$ = vector de producciones brutas (o niveles de actividad);

$s \in R_+^n$ = vector de producciones netas;

$\Pi \in R_+^{n \times n}$ = matriz de insumo-producto cuyo elemento π_{ij} representa la cantidad de j necesaria para producir una unidad de i cuando la producción bruta de i es q_i;

$\ell \in R_+^n$ = vector de coeficientes directos de trabajo correspondiente a los niveles de actividad q;

$p \in R_+^n$ = vector de precios;

$w \in R_+$ = tasa salarial

$r \in R_+$ = tasa de beneficios.

En su aspecto físico el modelo describe una situación estacionaria en la que los niveles de producción se repiten período tras período. Es por ello que puede representarse a la tecnología mediante una matriz constante (Π, ℓ) sin hacer supuesto alguno sobre los rendi-

1 $s \geq 0$ significa $s \geqq 0$ y $s \neq 0$, y se lee "s es semipositivo".

mientos a escala. Como (1) es una descripción del aspecto físico de la producción, constituye un punto de partida para la determinación de las relaciones de valor por medio de (2). Podemos reescribir a (1) en la forma:

S.0 Existe un $q > 0$ tal que $q\,\Pi \leq q$.

Sraffa supone que existen mercancías *básicas*, o sea, mercancías que se requieren como insumo, ya sea directa o indirectamente, en la producción de todas las mercancías. En Escudé (1981) se demuestra que ello equivale a suponer que Π es una matriz *básicamente conexa*. Esto significa que cuando se pone a Π (mediante permutaciones simultáneas de filas y columnas) en la forma normal descompuesta:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \Pi_{m1} & \Pi_{m2} & \cdots & \Pi_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

(donde cada Π_s, $s = 1, \ldots, m$, es o bien indescomponible o bien nula) se verifican:

S.1 Π_1 es indescomponible,

S.2 Si Π_s es indescomponible, $s \in \{2, \ldots, m,\}$ la matriz

$$(\Pi_{s1} \;\; \Pi_{s2} \ldots \Pi_{s,s-1}) \tag{4}$$

es semipositiva, mientras que si $\Pi_s = 0$, (4) tiene todas sus filas semipositivas.

Resulta conveniente suponer que Π es no sólo básicamente conexo sino también *dominantemente básicamente conexa* (DBC). Ello significa que, además de S.1 y S.2, se verifica:

S.3 $\operatorname{dom}\Pi = \operatorname{dom}\Pi_1 > \operatorname{dom}\Pi_s$, $s = 2, \ldots, m$,

donde:

domA= la raíz característica dominante de la matriz no-negativa A.

Para la interpretación económica de S.3 véase Zaghini (1967), Pasinetti (1975) o Escudé (1981). Debe observarse que las filas de Π_1

corresponden a los procesos básicos (o sea, procesos productores de mercancías básicas).

Supondremos adicionalmente que al menos una mercancía básica requiere al trabajo como insumo directo, o sea, que al particionar a ℓ en conformidad con (3): $\ell = {}^t(\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^m)$, se tiene

$$S.4 \qquad \ell^1 \geq 0.$$

Puede demostrarse que si Π es DBC, a) Π tiene un vector dominante de derecha (v.d.d.), $\bar{p} = (\bar{p}^1, \ldots, \bar{p}^m)$, positivo y único salvo un factor escalar [2], donde $\bar{p}^1$ es el v.d.d. de Π_1; b) Π tiene un vector dominante de izquierda (v.d.i.) único, $\bar{q} = (\bar{q}^1, 0, \ldots, 0)$, donde $\bar{q}^1 > 0$ es el v.d.i. de Π_1 (véase Escudé (1981)).

Por a), tenemos

$$\Pi \bar{p} = (\mathrm{dom}\Pi)\, \bar{p}, \quad \bar{p} > 0, \tag{5}$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta S.0:

$$(\mathrm{dom}\,\Pi)\, q\bar{p} = q\Pi\bar{p} < q\bar{p}, \quad q\bar{p} > 0. \tag{6}$$

Como S. 1 implica que $\mathrm{dom}\Pi \geqq \mathrm{dom}\Pi_1 > 0$ (por el Teorema de Perron-Frobenius una matriz indescomponible tiene raíz dominante positiva) se deduce de (6) que

$$\mathrm{dom}\Pi < 1. \tag{7}$$

o sea, que Π es *productiva*. Como $0 < \mathrm{dom}\Pi < 1$, puede ponerse

$$(1 + R)\,\mathrm{dom}\Pi = \mathrm{dom}(1+R)\Pi = 1, \quad R > 0. \tag{8}$$

Por S. 3, (8) vale para Π_1, que (por S. 1) es indescomponible. Como la raíz dominante de una matriz indescomponible es función estrictamente creciente de los elementos de la matriz, se tiene $\mathrm{dom}(1+r)\Pi_1 < 1$ para $r \in [0, R)$, y por S. 3.

$$\mathrm{dom}\,(1+r)\,\Pi < 1, \quad r \in [0, R). \tag{9}$$

Luego la matriz $(I - (1 + r)\Pi)$ es no-negativamente inversible (véase Nikaido (1968), Teorema 7 . 1). Sea

2 En lo sucesivo, siempre que mencionemos la unicidad de un vector dominante, se debe entender "unicidad salvo un factor escalar".

$$A(r) = (I - (1+r)\Pi)^{-1} \geqq 0, \quad r \in [0, R).$$

Además, teniendo en cuenta (3), S.1 y S.2, puede comprobarse que A (r) tiene su primera columna de bloques compuesta por elementos positivos y estrictamente crecientes (cada bloque tendrá a $A_1(r) = (I - (1+r)\Pi_1)^{-1}$ como factor matricial). Por ello y S.4 puede despejarse en (2)

$$p(w,r) = A(r)\,\ell\, w > 0 \quad \text{si } r \in [0,R),\ w > 0. \tag{10}$$

Si se normaliza (p,w) con una regla del tipo:

$$up(w,r) + vw = 1, \quad u \geq 0, \quad v \geqq 0, \tag{11}$$

(o sea, mediante un numerario que incluya al menos un producto y, posiblemente, al trabajo) se tiene, reemplazando (10) en (11)

$$w(r) = \frac{1}{uA(r)\,\ell + v}.$$

Como $A(r)\,\ell$ diverge en todos sus elementos cuando $r \uparrow R$, también $w(r) \downarrow 0$ cuando $r \uparrow R$. Luego (10) y (11) se convierten, respectivamente en:

$$p(r) = A(r)\,\ell\, w(r) = \frac{A(r)\,\ell}{uA(r)\,\ell + v}, \quad r \in [0,R). \tag{10'}$$

$$up(r) + vw(r) = 1, \quad u \geq 0, \quad v \geqq 0. \tag{11'}$$

De (2) también se obtiene

$$(I - (1+r)\Pi)\, p(r) = w(r).$$

Luego

$$\lim_{r\uparrow R} (I - (1+r)\Pi)\, p(r) = (I - (1+R)\Pi) \lim_{r\uparrow R} p(r) = 0.$$

Por (11) no puede ser $\lim_{r\uparrow R} p(r) = 0$. Luego debe ser (por unicidad de $\overline{p}$)

$$\lim_{r\uparrow R} p(r) = \overline{p}.$$

Podemos resumir los resultados precedentes en la siguiente proposición:

Proposición 1 Si se verifican S. 0 - S. 4, existe un intervalo no-trivial $[0, R]$ tal que, dada cualquier normalización del tipo (11), para todo r en $[0, R]$ la ecuación (2) tiene solución continua y única $(p(r), w(r))$. Además, $p(r)$ es positivo en $[0, R]$; $w(r)$ es positivo en $[0, R)$ y estrictamente decreciente en $[0, R]$; y $(p(R), w(R)) = (\bar{p}, 0)$, donde $\bar{p}$ es el v.d.d. de Π.

Tomemos ahora el v.d.i. de Π, $\bar{q} = (\bar{q}^1, 0, \ldots, 0)$ y normalicemoslo según $\bar{q}\ell = q\ell = L$ (donde L es el trabajo total consumido cuando los niveles de actividad son los de (1)). Sraffa define a la Mercancía Patrón como el vector de los productos netos físicos por unidad de trabajo que resultarían si los niveles de actividad fueran los dados por $\bar{q}$ y la tecnología estuviera aún dada por (Π, ℓ) (o sea, el vector de los productos netos físicos por unidad de trabajo del "Sistema Patrón").

La Mercancía Patrón es, pues, el vector

$$\frac{1}{L} \bar{q}(I - \Pi) = \frac{1}{L} \bar{s}, \tag{12}$$

donde definimos $\bar{s} = \bar{q}(I - \Pi)$ (Obsérvese que $\bar{s}$ es también v.d.i. de Π).

Dada la estructura de $\bar{q}$ (y de $\bar{s}$), la Mercancía Patrón incluye solamente (y a todas) las mercancías básicas. La normalización de Sraffa es, entonces,

$$\frac{1}{L} \bar{s} p(w, r) = 1. \tag{13}$$

Llamemos $(\hat{p}, \hat{w})$ al vector (p, w) cuando está normalizado según (13).

Como es obvio, esta normalización constituye un caso particular de (11). Para $r \in [0, R)$, se tiene

$$A(r) = I + (1+r)\Pi + (1+r)^2 \Pi^2 + \ldots \tag{14}$$

Luego, por (10), (12) y la normalización de $\bar{q}$, se tiene:

$$\frac{1}{L} \bar{s}p(w, r) = \frac{1}{L} \bar{s} A(r) \ell w = \frac{1}{L} \frac{1+R}{R-r} \bar{s} \ell w =$$

$$= \frac{Rw}{R-r} \frac{\bar{s} A(0) \ell}{L} = \frac{Rw}{R-r} \frac{\bar{q}\ell}{L} = \frac{Rw}{R-r}.$$

Luego (13) se verifica si y sólo si

$$r = R\ (1 - \hat{w}). \qquad (16)$$

Si se usa la normalización (13), se tiene por (16),

$$\hat{p}\ (\hat{w}, r) = \hat{p}\ (\hat{w}\ (r), r) = \hat{p}\ (r)$$

de modo que queda r como único parámetro. (15) asegura que siempre que se utilice a la Mercancía Patrón como numerario se obtiene una relación lineal entre r y w. Si se identificara al capital y al trabajo como "factores de producción" y a r y w como los "precios" de dichos factores podría decirse que el uso de la Mercancía Patrón de Sraffa torna lineal a la "frontera de precios de los factores" (FPF).

Observación Debe advertirse que la Mercancía Patrón no es necesariamente la única mercancía compuesta que linealiza a la FPF. Miyao (1977) demostró que existen *m* tales mercancías compuestas linealmente independientes si y sólo si el defecto de la matriz

$$K = (\ell \quad \Pi\ell \quad \Pi^2\ell \ldots . \Pi^{n-1}\ \ell) \in R_+^{n \times n}$$

es igual a m-1. En el caso extremo en que ℓ es v.d.d. de Π, todas las columnas de K son linealmente dependientes, rgK = 1 y m = n, o sea, cualquier mercancía compuesta linealiza la FPF. Este caso extremo es el de "igualescomposiciones de capital". En el otro caso extremo en que K es de rango pleno, la Mercancía Patrón es la única mercancía compuesta que linealiza la FPF (salvo un factor escalar). Por supuesto, si se desea linealizar la FPF sin hacer supuesto alguno sobre K, o sea, sin restringir a la tecnología (Π, ℓ), lo lógico es tomar a la Mercancía Patrón como numerario, pues ella sirve tal propósito en cualquier caso. Es esto lo que hace Sraffa.

2. El modelo Lineal General con Trabajo Homogéneo

Cuando Sraffa introduce a los bienes de capital fijo pasa a considerar un modelo de producción conjunta. Nosotros seguiremos considerando un modelo de producción no-conjunta a lo largo de todo este trabajo. No obstante, generalizaremos el modelo de Sraffa en al menos dos direcciones. En primer lugar, construiremos un modelo en que la producción requiere no sólo insumos flujo sino también insumos stock. En segundo lugar, admitiremos diferentes tipos de trabajo.

Reemplacemos la ecuación (2) por

$$\Pi p + \ell w + (\Phi p + kw)\, r = p. \qquad (17)$$

$\Phi \in R_+^{n \times n}$ = la matriz de requerimientos directos de stock cuyo elemento ϕ_{ij} representa la cantidad de j que debe mantenerse inmovilizada en promedio durante el período unitario T (digamos, un año) para producir una unidad de i (cuando los niveles de actividad están dados por q);

$k \in R_+^n$ = vector de requerimientos directos de stock de trabajo (cuando los niveles de actividad están dados por q).

Luego (17) nos dice que a los costos en insumos producidos y en trabajo debe agregarse los beneficios calculados como el producto de una cierta tasa de ganancia, r, por el capital inmovilizado: $\Phi p + kw$.

Supondremos que todos los bienes producidos y el trabajo son bienes de tipo stock-flujo. Esto significa que siempre que se requiere un insumo como flujo en un determinado proceso también se lo requiere como stock. Formalmente, definamos al *soporte* de una matriz $A \in R^{n \times m}$ del siguiente modo:

$$\text{sop} A = \{ (i, j) \in N \times M \mid a_{ij} \neq 0 \}$$

donde $N = \{ 1, \ldots, n \}$, $M = \{ 1, \ldots, m \}$.

S. 5 $\quad$ $\text{sop}\, \Pi = \text{sop}\, \Phi$; $\text{sop}\, \ell = \text{sop}\, k$.

Este supuesto es más débil de lo que parece si se tiene en cuenta que Φ y k, más que requerimientos físicos en un sentido estricto pueden interpretarse como la contrapartida física de la inmovilización de capital- valor. Como siempre que se tiene un costo por el insumo de cierto bien como flujo también se tiene una determinada inmovilización financiera (promedio) durante el período unitario, es evidente que al descomponerse esta carga financiera en un componente físico ϕ_{ij} y un componente de valor p_j el componente físico debe ser positivo. Para la implicación recíproca basta con suponer que todos los bienes que se utilizan como stock sufren un cierto desgaste.

S. 5 implica, en particular, que Π y Φ tienen idénticas propiedades de conexidad. Luego Π es básicamente conexa si y sólo si Φ lo es (y Π es indescomponible si y sólo si Φ lo es). Como seguiremos admitiendo los supuestos S. 0 - S. 4 de la Sección 1, por S. 5 sabemos que Φ verifica S. 1 y S. 2 (es básicamente conexa) y que $k^1 \geq 0$, donde $k = {}^t(k^1, \ldots, k^m)$.

La matriz $A(0)\,\Phi$ representa los requerimientos totales de stock (directos e indirectos) ya que

$$A(0)\;\Phi = \Phi + \Pi\;\Phi + \Pi^2\Phi + \ldots \tag{18}$$

Como Φ es básicamente conexa, también lo es $A(0)\,\Phi$ ya que por (18) es evidente que $A(0)\,\Phi$ tiene elementos nulos a lo sumo en los lugares (i, j) en que los tiene Φ. Para asegurar que $A(0)\,\Phi$ sea DBC, tendremos que hacer un supuesto adicional:

S. 6 $\quad \operatorname{dom}(A(0)\,\Phi)_1 > \operatorname{dom}(A(0)\,\Phi)_s, \quad s = 2, \ldots, m.$

$(A(0)\,\Phi)_s$ denota el s-ésimo bloque cuadrado en la diagonal principal de $A(0)\,\Phi$ cuando esta matriz se encuentra en la forma normal descompuesta (3). La interpretación económica de S. 6 es que, en promedio, los procesos básicos requieren una mayor proporción de productos básicos como stock, sea directa o indirectamente, que la proporción que requiere cualquier grupo interrelacionado de procesos no-básicos de sus propios productos. Obsérvese que S. 6 se verifica en el modelo de Sraffa (en el que $\Phi = \Pi$) debido a S. 3 y a la siguiente igualdad:

$$\operatorname{dom}(A(0)\,\Pi)_s = \operatorname{dom}(A(0)_s\,\Pi_s) = \operatorname{dom}((I - \Pi_s)^{-1}\Pi_s) = \frac{\operatorname{dom}\Pi_s}{1 - \operatorname{dom}\Pi_s}.$$

Como

$$\phi_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}\,\pi_{ij} & \text{si } \pi_{ij} > 0 \\ 0 & \text{si } \pi_{ij} = 0 \end{cases}$$

donde σ_{ij} = *período de rotación,* del insumo j en el proceso i (y

$\sigma_{ij} > 0$ si $\pi_{ij} > 0$), S.6 impone una limitación sobre los períodos de rotación cuando dejamos de tomarlos a todos unitarios (como lo son en el modelo de Sraffa).

Nos será útil para más adelante señalar que así como de (7) se desprende (8), también se desprende que existe un único $S \in R_+$ tal que

$$\mathrm{dom}\,(\Pi + S\,\Phi) = 1, S > 0. \tag{19}$$

Esto se debe a que la función domA es estrictamente creciente con respecto a todos los elementos de A cuando A es indescomponible (como lo son Π_1 y Φ_1) y a que dom $(\Pi + \alpha\,\Phi) \to +\infty$ cuando $\alpha \to +\infty$.

Así como hicimos en la sección precedente con respecto a Π, podemos ahora señalar que si A (0) Φ es DBC (como lo es por S.6) tiene un v.d.d. único y positivo, $\bar{\bar{p}} = {}^t(\bar{\bar{p}}^1, \ldots, \bar{\bar{p}}^m)$ y un v.d.i. único

$\bar{\bar{q}} = (\bar{\bar{q}}^1, 0, \ldots, 0)$ donde $\bar{\bar{p}}^1$ $(\bar{\bar{q}}^1)$ es el v.d.d. (v.d.i.) positivo de $(A(0)\ \Phi)_1$ (que es indescomponible pues, como A (0) Φ es básicamente conexa, cumple S.1.).

Como, por (19), se tiene

$$(\Pi + S\,\Phi)\ \bar{\bar{p}} = \bar{\bar{p}} \tag{20}$$

se obtiene, reordenando,

$$SA\,(0)\,\Phi\ \bar{\bar{p}} = \bar{\bar{p}} \tag{21}$$

de modo que dom $(SA\,(0)\,\Phi) = 1$.

Luego, para todo $r \in [\,0,S)$ se tiene

$$\mathrm{dom}\,(rA\,(0)\,\Phi) < 1. \tag{22}$$

Nótese ahora que

$$(I - \Pi - r\,\Phi) = (I - \Pi)\,(I - rA\,(0)\,\Phi). \tag{23}$$

Por (22), la matriz $(I - rA\,(0)\,\Phi)$ es no-negativamente inversible, de modo que si llamamos B (r) a su inversa podemos despejar en (17), teniendo en cuenta (23):

$$p(w,r) = B(r)\, A(0)\, (\ell + kr)\, w, \quad r \in [0, S), \quad w > 0. \tag{24}$$

Nuevamente puede comprobarse que B (r) tiene su primera columna de bloques enteramente positiva (cuando A (0) Φ está en la forma normal descompuesta). Como lo mismo ocurre con A (0), por S.4 se tiene $p(w, r) > 0$ si $r \in [0, S)$ y $w > 0$. Además, $r = S$ si y sólo si $w = 0$ y si y sólo si $p = \bar{\bar{p}} > 0$ (por (20) y (21)).

Si se utiliza una normalización como (11) se obtiene

$$w(r) = \frac{1}{uB(r)\, A(0)\, (\ell + kr) + v}, \qquad r \in [0, S)$$

$$p(r) = B(r)\, A(0)\, (\ell + kr)\, w(r) = \frac{B(r)\, A(0)\, (\ell + kr)}{uB(r)\, A(0)\, (\ell + kr) + v},$$

$$r \in [0, S)$$

y puede demostrarse del mismo modo que en la Sección 1 que w (r) y p (r) son continuos en [0, S] y w (r) estrictamente decreciente. Luego tenemos.

Proposición 2. Si se verifican S.0. - S.6, existen un intervalo no-trivial [0, S] tal que, dada cualquier normalización del tipo (11), para todo r en [0, S] la ecuación (17) tiene solución continua y única (p (r), w(r)). Además, p (r) es positivo en [0,S] ; w (r) es positivo en [0, S) y estrictamente decreciente en [0,S]; y $(p(S), w(S)) = (\bar{\bar{p}}, 0)$ donde $\bar{\bar{p}}$ es el v.d.d. de A (0) Φ.

En lugar de (15) tenemos ahora

$$\frac{1}{L}\bar{\bar{s}}\, p(w,r) = \frac{1}{L}\bar{\bar{s}}\, B(r)\, A(0)(\ell + kr)\, w = \frac{1}{L}\frac{Sw}{S-r}\bar{\bar{s}}\, A(0)(\ell + kr) =$$

$$= \frac{Sw}{S-r}\left(1 + \frac{\bar{\bar{s}}\, A(0)\, k}{L}\, r\right) = \frac{Sw}{S-r}\left(1 + \frac{\bar{\bar{s}}\, A(0)\, k}{\bar{\bar{s}}\, A(0)\, \ell}\, r\right) \tag{25}$$

donde:

$$\bar{\bar{s}} = \frac{1}{L} \bar{\bar{q}} (I - \Pi) \text{ y } \bar{\bar{q}} \text{ se normaliza según } \bar{\bar{q}}\, \ell = L.$$

Definamos

$$\bar{\sigma}_w = \frac{\bar{\bar{s}}\, A(0)\, k}{\bar{\bar{s}}\, A(0)\, \ell} = \frac{\bar{\bar{q}}\, k}{\bar{\bar{q}}\, \ell}$$

($\bar{\sigma}_w$ es entonces el período medio de rotación del trabajo en el Sistema Patrón Generalizado). Luego

$$\frac{1}{L} \bar{\bar{s}}\, p(w,r) = \frac{Sw}{S-r} (1 + \bar{\sigma}_w\, r). \tag{26}$$

Si usáramos como regla de normalización el análogo de (13) tendríamos ambos miembros de (26) igualados a la unidad, y despejando r en la segunda igualdad obtendríamos una FPF no-lineal:

$$r = \frac{S(1 - \hat{w})}{1 + \bar{\sigma}_w S \hat{w}}$$

Alternativamente , podemos reordenar (26) como

$$S\bar{\bar{s}}\, p(w,r) = r(\bar{\bar{s}}\, p(w,r) + \bar{\sigma}_w SLw) + SLw \tag{27}$$

y normalizar (p, w) según

$$\bar{\bar{s}}\, p(w,r) + \bar{\sigma}_w SLw = 1. \tag{28}$$

Llamemos $(\tilde{p}, \tilde{w})$ a los vectores (p, w) normalizados por (28). Introduciendo (28) en (27) y reordenando se obtiene

$$r = S(1 - (1 + \bar{\sigma}_w S) L\tilde{w}). \tag{29}$$

Como en el modelo de Sraffa, obtenemos así una FPF lineal, pero esta vez para un Modelo Lineal General de Producción Simple. La Mercancía Patrón Generalizada (MPG) que define (28) incluye a todos los bienes básicos, como la Mercancía Patrón de Sraffa, pero incluye adicionalmente al trabajo. Las cantidades en que entran estas mercancías en la MPG están dadas (en términos de (11)) por

$$(u, v) = (\bar{\bar{s}}, \bar{\sigma}_w\ SL) = (\bar{\bar{s}}^{\,1}, 0, \ldots, 0, \bar{\bar{s}}^{\,1}\ A_1\ (0) k^1 S) \quad (30)$$

donde:

$\bar{\bar{s}}$ está normalizado por $\bar{\bar{s}}\, A\, (0)\ \ell = \bar{\bar{q}}\ \ell =$ L.

3. El Modelo Lineal General con Trabajo Heterogéneo.

Supongamos ahora que existen l tipos diferentes de trabajo y que sus tasas salariales respectivas son los elementos del vector $w = {}^t (w_1, \ldots, w_l)$. Sea $\Psi \in R_+^{n \times l}$ la matriz de requerimientos directos de trabajo. La j-ésima columna de Ψ representa los requerimientos directos del j-ésimo tipo de trabajo en los n procesos productivos. En las secciones precedentes Ψ tenía una única columna, ℓ . Sea $\Omega \in R_+^{n \times l}$ la matriz de requerimientos directos de stocks de trabajo. Ω generaliza al vector k de la Sección 2 para el caso de trabajo heterogéneo. Si particionamos a Ψ en conformidad con (3) tenemos

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{bmatrix}$$

donde:

Ψ_1 = la matriz de insumos directos de trabajo para los procesos básicos.

La generalización directa de los Supuestos 4 y 5 para el caso de trabajo heterogéneo es:

S. 4' $\quad \Psi_1^j \geq 0,\ j = 1, \ldots, l,$

S. 5' $\quad$ sop Π = sopΦ ; sopΨ = sopΩ.

S. 4' significa que cada tipo de trabajo es necesario como insumo directo en algún proceso básico. La segunda parte de S. 5' implica que lo mismo ocurre para los requerimientos directos del trabajo como stock.

La ecuación de precios es ahora:

$$\Pi p + \Psi w + (\Phi p + \Omega w) r = p. \tag{31}$$

Las fórmulas (19) - (23) de la Sección 2 siguen vigentes de modo que si $w = 0$, se tiene $r = S$ y $p = \bar{\bar{p}}$ y para $w \geq 0$ puede despejarse

$$p(w,r) = B(r) A(0) (\Psi + \Omega r) w, \quad r \in [0, S), w \geq 0. \tag{32}$$

S. 4' implica que

$$w \geq 0 \Leftrightarrow (\Psi + \Omega r)_1 w > 0. \tag{33}$$

Como B (r) A (0) tiene su primera columna de bloques enteramente positiva, se deduce de (32) y (33) que

$$w \geq 0 \Leftrightarrow p(w,r) > 0. \tag{34}$$

Normalicemos la solución (p, w) de (31) mediante

$$up(w,r) + vw = 1, \quad u \geq 0, \quad v \geqq 0. \tag{35}$$

Esto equivale a restringir (p, w) al conjunto cerrado y convexo

$$P = \{ (p, w) \in R^{n+1}_{+} \mid up + vw = 1, u \geq 0, v \geqq 0 \}$$

La continuidad de p (w, r) así normalizado para $w \geq 0$ y $0 \leqq r < S$ se desprende de (32). Como B (r) diverge cuando $r \uparrow S$, también diverge $B(r) A(0) (\Psi + \Omega r)$ en todos sus elementos. Luego si p(w, r) debe permanecer en P es evidente que $w \to 0$ cuando $r \uparrow S$, y por lo tanto $A(0)(\Psi + \Omega r)w \to 0$ cuando $r \uparrow S$. Además, de (32) se obtiene

$$(I - rA(0)\Phi_{..}) p(w,r) = A(0) (\Psi + \Omega r) w, \; r \in [0,S), w \geq 0 \tag{36}$$

Por lo tanto

$$\lim_{r \uparrow S} (I - rA(0)\Phi) p(w,r) = (I - SA(0)\Phi) \lim_{r \uparrow S} p(w,r) = 0.$$

Luego p (w, r) tiene un límite $\hat{p}$ cuando $r \uparrow S$ y (p (w, r), w) está restringido a P. Como P es cerrado, el vector límite $(\hat{p}, 0) \in P$.

Como $(\hat{p}, 0) \in P$ no puede ser $\hat{p} = 0$. Luego $\hat{p} = \bar{\bar{p}} = p(0, S)$ (téngase en cuenta (21)) y $p(w, r)$ es continuo lateralmente en $(0, S)$.

Nótese que, por (32), para $w \geq 0, r \in [0, S)$ se tiene

$$\begin{bmatrix} p(w, r) \\ \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(r) A(0)(\Psi + \Omega r) \\ \\ I_l \end{bmatrix} w = C(r) w$$

donde:

I_l = matriz unidad de $R^{l \times l}$ y la última igualdad define a $C(r)$.

Luego

$$(u, v)\ {}^t(p(w, r), w) = (u, v) C(r) w = [uB(r) A(0)(\Psi + \Omega r) + v] w \tag{37}$$

donde en el último término el vector fila que premultiplica a w es positivo (pues $u \geq 0$ y $B(r) A(0) > 0$). De (37) y del hecho de que $r = S$ si y sólo si $w = 0$ se desprende que

$${}^t(p(w, r), w) \in P \Leftrightarrow w \in W(r) \tag{38}$$

donde

$$W(r) = \begin{cases} \{ w \in R^l_+ \mid (u,v) C(r) w = 1 \} & \text{si } r \in [0,S) \\ \\ \{ 0 \} & \text{si } r = S. \end{cases}$$

Como $(u, v) C(r)$ es función vectorial estrictamente creciente de r (por S. 4' y el hecho que la primera columna de bloques de $B(r)$ tiene a $B_1(r)$ como factor matricial en cada bloque), si aumenta w_j sin que disminuya ningún w_i, $i \neq j$, entonces debe disminuir r. Resumiendo:

Proposición 3 Si se verifican S. 0 - S. 3, S. 4', S. 5' y S. 6, existe un intervalo no-trivial [0, S] tal que, dada cualquier normalización del tipo (35), para todo $(w, r) \in W(r) \times [0, S]$, la ecuación (31) tiene solución continua y única $^t(p(w, r), w)$. Además, $p(w, r)$ es positivo en $W(r) \times [0, S]$; $w = 0$ si y sólo si $r = S$; $p(0,S) = \bar{\bar{p}}$; si algunas w_j aumentan (disminuyen) mientras ninguna de las restantes disminuyen (aumentan) entonces r disminuye (aumenta).

En lugar de (25) podemos poner ahora

$$\bar{\bar{s}}\, p(w, r) = \bar{\bar{s}}\, B(r)\, A(0)\, (\Psi + \Omega r)\, w = \frac{S}{S - r}\, \bar{\bar{q}}\, (\Psi + \Omega r)\, w \quad (39)$$

que puede reordenarse como

$$S\bar{\bar{s}}\, p(w, r) = r\, (\bar{\bar{s}}\, p(w,r) + S\bar{\bar{q}}\, \Omega w) + S\bar{\bar{q}}\, \Psi w. \quad (40)$$

Normalicemos (p, w) según

$$\bar{\bar{s}}\, p(w, r) + S\bar{\bar{q}}\, \Omega w = 1. \quad (41)$$

y llamemos nuevamente $(\tilde{p}, \tilde{w})$ a los vectores resultantes. Luego (40) se reduce a

$$r = S\, [\, 1 - \bar{\bar{q}}\, (\Psi + \Omega S)\, \tilde{w}\,] \quad (42)$$

Una vez más obtenemos una FPF lineal. Obsérvese que la normalización (41) es una generalización directa de (28) ya que en esta última se tiene $\bar{\sigma}_w\, L = \bar{\bar{q}}\, k$. Llamaremos entonces a la mercancía compuesta definida mediante (41), Mercancía Patrón Generalizada (MPG). Obsérvese que por S. 4', S. 5' y la estructura de $\bar{\bar{q}}$, el vector $S\bar{\bar{q}}\, \Omega$ es positivo. Luego la MPG incluye a todas las mercancías básicas y a todos los tipos de trabajo . Las cantidades en que entran las mercancías y los trabajos en la MPG están dadas por:

$$(u, v) = (\bar{\bar{s}}, S\bar{\bar{q}}\, \Omega) = (\bar{\bar{s}}^1, 0, \ldots, S\bar{\bar{s}}^1\, A_1(0)\, \Omega_1).$$

Con tal especificación de (u, v) se tiene

$$W(r) = \{ w \in R_+^{\ell} \mid r = S\, [\, 1 - \bar{\bar{q}}\, (\Psi + S\Omega)\, w\,] \} =$$
$$= \{ w \in R_+^{\ell} \mid [\, \bar{\bar{q}}\, (\Psi + S\Omega), \frac{1}{S}\,]\, (w, r) = 1 \}$$

de modo que $(w, r) \in W(r) \times [0, S]$ si y sólo si

$$(w,r) \in W = \{ (w,r) \in R_+^{\ell+1} \mid r = S\, [\, 1 - \bar{\bar{q}}\, (\Psi + S\Omega)\, w\,] \} =$$
$$= \{ (w,r) \in R_+^{\ell+1} \mid [\, \bar{\bar{q}}\, (\Psi + S\Omega), \frac{1}{S}\,]\, (w, r) = 1 \} \quad (43)$$

Obsérvese que W es un conjunto no-vacío, compacto y convexo.

El caso de Sraffa es aquel en que $\wp = \Pi$, $\Omega = 0$, $\Psi = \ell$, y $\bar{q}$ $(=\bar{\bar{q}})$ se normaliza según $\bar{q}\Omega = q\ell = L$. Por ello, (41) se reduce a $\bar{s}p(w, r) = 1$ y (42) a (16). El caso de Schwartz (1961) (pp.204-214) es aquel en que $\Omega = 0$. En este caso (42) se reduce a $r = S(1 - \bar{\bar{q}}\Psi\tilde{w})$ que al ponerse en la forma

$$r + S\bar{\bar{q}}\Psi\widetilde{w} = S.$$

es muy parecido a una de las normalizaciones que utiliza Schwartz, i.e.

$$r + ew = S, \qquad e = (1, \dots, 1) \tag{44}$$

(Schwartz (1961), p. 207).

II. EQUILIBRIO GENERAL EN EL MODELO LINEAL GENERAL

4. Maximización de beneficios con restricción de capital.

En esta segunda parte admitiremos la variabilidad en los niveles de actividad de las empresas. Supondremos, sin embargo, que las matrices de requerimientos de flujo (Π, Ψ) y de stock $(\wp, \Omega)$ siguen describiendo a la tecnología. Como estas matrices son constantes esto equivale a suponer que se tiene rendimientos constantes a escala y proporciones fijas entre los insumos (sean éstos flujo o stock).

En el análisis que sigue una empresa podrá operar en cualesquiera de los n procesos productivos. Sea $x \in R^n_+$ un vector de producción bruta para una empresa particular. Sea $\alpha \in R^n_+$ el vector de activos que son propiedad de la empresa. Los elementos de α son cantidades de los n bienes producidos. Sea $\beta \in R^l_+$ el vector que indica las cantidades de los diversos tipos de trabajo que están comprometidos con la empresa (digamos, por contrato) para el período de producción en cuestión. Luego $(\alpha, \beta) \in R^{n+l}_+$ representa los bienes (producidos o no) en que está corporizado el capital de la empresa y $\alpha p + \beta w$ constituye el capital de la empresa. Supondremos, en esta sección, que todas las empresas tienen capital positivo, o sea, $\alpha p + \beta w > 0$. Supondremos también que ninguna empresa puede inmovilizar en la producción más capital que el de su propiedad. El capital inmovilizado en la producción está dado por el valor de los requerimientos directos de stock $(x\rho\,,\ x\Omega)$ necesarios para producir en los niveles x. Luego podemos representar el objetivo de una empresa como el de

$$\max x\,(p - \Pi p - \Psi w) \text{ sujeto a } x \geqq 0 \text{ y } x\,(\rho p + \Omega w) \leqq \alpha p + \beta w. \qquad (45)$$

Este constituye un problema de programación lineal que podemos reformular en forma abstracta como:

$$P: \qquad \max xc, \quad x \in X = \{ x \in R^n_+ \mid xa \leqq b \},$$

donde:

$c \in R^n$, $a \in R^n_+$, $b \in R$, $b > 0$, son constantes dadas. El dual de este programa es:

$$D: \qquad \min by, \quad y \in Y = \{ y \in R_+ \mid ay \leqq c \}.$$

Como el programa dual es pecualiarmente sencillo, adoptaremos la estrategia de resolverlo y utilizar las propiedades de dualidad para resolver el programa primal.

Lema 4 Sea $r = \max\limits_{i} \phi(i)$, donde $\phi(i) = \begin{cases} c_i/a_i & \text{si } a_i > 0 \\ 0 & \text{si } a_i = 0 \text{ y } c_i \leqq 0 \\ +\infty & \text{si } a_i = 0 \text{ y } c_i > 0. \end{cases}$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) r está bien definida ($r < +\infty$)

(b) $Y \neq \phi$

(c) D tiene solución óptima en $y = r$.

Demostración: La equivalencia de (a) y (b) es trivial.
(b) $\Rightarrow$ (c). Si $Y \neq \phi$, r debe estar bien definida. Obsérvese que $r \in Y$. Si existiera un $r' \in Y$ tal que $br' < br$ se tendría $r' < r$, lo cual implica, o bien que $r' < c_i / a_i$ para algún i, o bien que $r < 0$. En cualquiera de estos casos se tendría $r' \notin Y$. Luego r minimiza by en Y.
(c) $\Rightarrow$ (b). Si D tiene solución, Y no puede ser vacío. Q.E.D.

Utilizaremos seguidamente al Teorema Fundamental de Dualidad para la Programación Lineal en la formulación de David Gale (1960).

Teorema F Sean $\bar{P}$ y $\bar{D}$ los siguientes programas duales:

$\bar{P}$: max xc, $x \in X = \{ x \in R^n_+ \mid xA \leqq b \}$,

$\bar{D}$: min by, $y \in Y = \{ y \in R^m_+ \mid Ay \geqq c \}$,

donde $A \in R^{n \times m}$.

a) Si $X \neq \phi$ y $Y \neq \phi$, entonces $\bar{P}$ y $\bar{D}$ tienen ambos soluciones óptimas. Si estas soluciones se dan en $\bar{x}$ y $\bar{y}$, respectivamente, entonces $\bar{x}c = b\bar{y}$.

b) Si $X = \phi$ ó $Y = \phi$, entonces ni $\bar{P}$ ni $\bar{D}$ tiene solución óptima.

Lema 5 P tiene solución óptima en x = q si y sólo si $q \in X$, D tiene solución óptima en $y = r = \max_i \phi(i)$ y $qc = br$.

Demostración

Necesidad. Es trivial que $q \in X$. Si fuera $Y = \phi$, por T.F. b) P no tendría solución óptima. Luego $Y \neq \phi$ y, por Lema 4, D tiene solución óptima en $y = r = \max \phi(i)$. Finalmente, por T.F.a), se tiene $qc = br$.

Suficiencia. Como $q \in X$, $r \in Y$, por T.F. a) P también tiene solución óptima. Si q no fuera solución óptima de P, la solución óptima sería un $q' \in X$ tal que $q'c > qc$. Además, por T.F. a) se tendría $q'c = br$. Pero entonces $qc < br$ lo que contradice a la igualdad de qc y br. Q.E.D.

Corolario al Teorema F Si $x \in X$ y $y \in Y$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $xc = by$,

b) $xc = xAy = by$,

c) $x_i > 0 \Rightarrow A_i y = c_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$y_i > 0 \Rightarrow xA^i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Demostración

a) $\Leftrightarrow$ b). Como $x \in X$ y $y \in Y$, se tiene $xA \leqq b$ y $Ay \geqq c$. Luego $xc \leqq xAy \leqq by$. Si además $xc = by$, se tiene b). La recíproca es trivial.

b) $\Leftrightarrow$ c) b) equivale a $x(Ay - c) = 0$ y $(b - xA)\,y = 0$, lo cual equivale a c) ya que x, $Ay - c$, $b - xA$, y, son todos vectores no-negativos. Q.E.D.
Utilizando este Corolario y el Lema 4 podemos reformular el Lema 5 del siguiente modo.

Lema 6 P tiene solución óptima en $x = q$ si y sólo si $q \in X$, $r = \max \phi$ (i) está bien definida, y

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad q_i > 0 \Rightarrow a_i r = c_i, \qquad i = 1, \ldots, n,\\
&(2)\quad r > 0 \Rightarrow qa = b.
\end{aligned}
$$

Si ahora traducimos este Lema a nuestra terminología originaria, tenemos:

Proposición 7 Sea $r = \max\limits_{i} \phi(i)$ donde

$$
\phi(i) = \begin{cases}
\dfrac{(p - \Pi p - \Psi w)_i}{(\Phi p + \Omega w)_i} & \text{si } (\Phi p + \Omega w)_i > 0,\\[2ex]
0 & \text{si } (\Phi p + \Omega w)_i = 0 \text{ y } (p - \Pi p - \Psi w)_i \leqq 0,\\[1ex]
+\infty & \text{si } (\Phi p + \Omega w)_i = 0 \text{ y } (p - \Pi p - \Psi w)_i > 0.
\end{cases}
$$

Entonces q maximiza $x\,(p - \Pi p - \Psi w)$ en $Q = \{\, x \in R^n_+ \mid x\,(\Phi p + \Omega w) \leqq (\alpha p + \beta w) \,\}$ si y sólo si $q \in Q$, r está bien definida y

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad q_i > 0 \Rightarrow (p - \Pi p - \Psi w)_i = (\Phi p + \Omega w)_i\, r, \qquad i = 1, \ldots, n,\\
&(2)\quad r > 0 \Rightarrow q\,(\Phi p + \Omega w) = (\alpha p + \beta w).
\end{aligned}
$$

Interpretemos a las condiciones de la Proposición 7 desde un punto de vista económico. Que $q \in Q$ nos dice que la empresa en cuestión no inmoviliza en la producción más capital que el de su propiedad.
Obsérvese que para nosotros el término "capital" es, en primer lugar, una suma de valor, lo que de por sí implica que no puede determinarse una cantidad física de capital con independencia de la determinación de los precios y salarios. En el análisis precedente, por supuesto, supusimos que las empresas son tomadoras de precios y, por lo tanto, toman a los vectores p y w como datos. La condición de que r esté

bien definido equivale a suponer que ningún proceso tiene una tasa de ganancia infinita (si interpretamos a ϕ (i) como la tasa de ganancia del proceso i). Esta condición equivale, a su vez, al supuesto de que ningún proceso puede rendir un beneficio positivo sin requerir una cierta inmovilización de capital. La condición (1) significa que una empresa cualquiera sólo va a operar los procesos que rindan la máxima tasa de ganancia, o sea, r. La condición (2) significa que si la tasa de ganancia máxima es positiva, la empresa utilizará todo su capital en la producción.

Si existen K empresas, cada una de ellas tendrá un vector (α^k, β^k) de activos. Supondremos que estos vectores son tales que $\alpha^k p + \beta^k w > 0$, $k = 1, \ldots, K$. Luego cada empresa debe maximizar el funcional $x(p - \Pi p - \Psi w)$ en su conjunto factible $Q^k = \{ x \in R^n_+ \mid x(\Phi p + \Omega w) \leq \alpha^k p + \beta^k w\}$ La Proposición 7 nos asegura que cada empresa maximiza beneficios sujeta a su restricción de capital si y sólo si r está bien definido, y

$$(0) \quad q^k \in Q^k$$
$$(1) \quad q^k_i > 0 \Rightarrow (p - \Pi p - \Psi w)_i = (\Phi p + \Omega w)_i r, \; i = 1, \ldots, n$$
$$(2) \quad r > 0 \Rightarrow q^k (\Phi p + \Omega w) = (\alpha^k p + \beta^k p),$$

$k = 1, \ldots, K.$

Supongamos que las empresas adaptan su producción neta agregada a la demanda neta agregada de los consumidores. Esto implica que existe algún mecanismo a través del cual las empresas se asignan entre sí la producción que satisface a la demanda. Si, dados p y w, s (p, w) es el vector de demanda neta agregada de los consumidores,

$$s(p,w)(I + \Pi + \Pi^2 + \ldots) = s(p,w)(I - \Pi)^{-1} = s(p,w) A(0)$$

es el vector de producción bruta que no sólo satisface a la demanda final sino también a los requerimientos de insumos intermedios. Si s (p, w) A (0) tiene algún componente nulo, el proceso correspondiente no necesita ser operado para satisfacer a la demanda final. En tal caso, excluimos a tal proceso de nuestro análisis, o sea, eliminamos las filas correspondientes de (Π, Ψ) y (Φ, Ω). También eliminamos las columnas respectivas de Π y Φ de modo tal que estas sigan siendo cuadradas.

Esto último puede hacerse porque una vez que se eliminaron todas las filas Π_i tales que $(s(p,w)\,A(0))_i = s(p,w)\,A(0)^i = 0$, la matriz rectangular que queda tiene columnas de ceros correspondientes a las filas eliminadas. Pues si existiera un proceso j tal que $(s(p,w)\,A(0))_j > 0$ y $\pi_{ji} > 0$, el proceso i no podría haber sido eliminado ya que su producto es requerido en la producción de j y este último bien es producido en cantidad positiva. Por ello, siempre que $s(p,w)\,A(0)^i = 0$ y $s(p,w)\,A(0)^j > 0$ debe ser $\pi_{ij} = 0$. Por último, también podemos olvidarnos de los componentes de p correspondientes a las filas y columnas eliminadas de Π y Φ.

Sea $q = \sum_{k=1}^{K} q^k$. Como $q = q(p,w) = s(p,w)\,A(0) > 0$ y $q^k \geqq 0$, $k = 1, \ldots, K$, es necesario que para todo i exista un k tal que $q_i^k > 0$. Si todas las empresas maximizan beneficios, la condición (1) se satisface para todo k y, en particular, para el k tal que $q^k_i > 0$. Luego, para todo i debe verificarse

$$(p - \Pi p - \Psi w)_i = (\Phi p + \Omega w)_i\, r,$$

lo que puede ponerse en forma vectorial como

$$\Pi p + \Psi w + (\Phi p + \Omega w)\, r = p. \tag{31}$$

De tal modo, la ecuación de precios que desarrollamos en la primera pa.te de este trabajo es condición necesaria para la maximización de beneficios bajo restricción de capital por parte de todas las empresas (siempre que incluya solamente a las mercancías que a tales precios, salarios y tasa de ganancia son demandadas).

5. *Existencia de Equilibrio General*

Estamos ahora en condiciones de introducir a los consumidores. Habrá dos clases de consumidores: los no-propietarios y los propietarios. Los no-propietarios serán necesariamente oferentes de trabajo.

Los propietarios participarán en la propiedad de las empresas y podrán, a su vez, ser oferentes de trabajo (aunque no necesariamente). Sea s^i (p,w) la función de demanda neta de productos del consumidor i y L^i (p, w) su función de oferta de trabajos. Sea a_{ik} la fracción de la empresa k que es propiedad de i. Se supone que $\sum_{i=1}^{G} a_{ik} = 1$, $k = 1, \ldots, K$, donde G es el número de propietarios. Sea H el número de no-propietarios. Explicitemos los siguientes supuestos:

S. 7 A cada individuo, $i = 1,\ldots,G+H$, le corresponde una función continua y positivamente homogénea de grado 0:

$$(s^i (p, w), - L^i (p, w)): R_+^{n+1} \sim \{ 0 \} \rightarrow R^{n+1}.$$

Además, cada individuo se ajusta a su restricción presupuestaria con igualdad.

S. 8 A cada empresa, $k = 1, \ldots, K$, le corresponde un vector de activos $(\alpha^k, \beta^k) \in R_+^{n+1}$, $\alpha^k \geq 0$, cuyo valor constituye su capital. Además, ninguna empresa puede contraer deudas.

Definición: El conjunto $\{ (p, w); (s^i, - L^i), i = 1, \ldots, G+H; q^k, k = 1, \ldots, K \}$ constituye un *equilibrio general competitivo* si:

a) $(p, w) \geq 0,$

b) $(s^i, - L^i) = (s^i (p, w), - L^i (p, w)), i = 1, \ldots, G + H,$

c) q^k maximiza $x (p - \Pi p - \Psi w)$ en $Q^k = \{ x \in R_+^n \mid x (\cdot p + \Omega w) \leq \alpha^k p + \beta^k w \}$, $k = 1, \ldots, K,$

d) $s = q (I - \Pi); q \Psi \leq L$ y $q \Psi^j = L_j$ si $w_j > 0, j = 1,\ldots,l,$ donde

$$s = \sum_{i=1}^{G+H} s^i ; \; L = \sum_{i=1}^{G+H} L^i ; q = \sum_{k=1}^{K} q^k.$$

Por la homogeneidad de las funciones de demanda podemos normalizar a precios y salarios. Adoptemos para ello nuestra Mercancía Patrón Generalizada. Luego (41) constituye nuestra regla de normalización. Si se verifican los supuestos S.O. - S.3, S.4′, S.5′ y S.6, sabemos por la Proposición 3 que la ecuación (31) define una función continua $\tilde{p}\ (\tilde{w}, r)$ en el dominio W definido por (43). Cabe observar que en (31) estamos tomando ahora las matrices Π y Φ completas. Luego tenemos

$$\Pi\tilde{p}\ (\tilde{w}, r) + \Psi\tilde{w} + (\Phi\tilde{p}\ (\tilde{w}, r) + \Omega\tilde{w})\, r = \tilde{p}\ (\tilde{w}, r). \qquad (46)$$

Las restricciones presupuestarias para propietarios y no-propietarios son, respectivamente,

$$s^i\ (p,w)\ p = L^i\ (p,w)\ w + \sum_{k=1}^{K} q^k\ (p - \Pi p - \Psi w)\, a_{ik},\ i = 1, \ldots, G, \qquad (47)$$

$$s^i\ (p,w)\ p = L^i\ (p,w)\ w, \qquad i = G{+}1, \ldots, G + H. \qquad (48)$$

Supongamos que los propietarios ajustan sus planes de consumo al supuesto de que las empresas de las cuales son co-propietarios emplean todo su capital. En tal caso, si los precios y salarios satisfacen (31), (47) se transforma en

$$s^i\ (p,w)\ p = L^i\ (p,w)\ w + \sum_{k=1}^{K} (a^k p + \beta^k w)\, r\, a_{ik}\ , \quad i = 1, \ldots, G. \qquad (49)$$

Si se normaliza (p,w) a $(\tilde{p}, \tilde{w})$, como este vector satisface (31) obtenemos $(\tilde{p}\ (\tilde{w},r), \tilde{w})$. Usando tales precios y salarios y agregando sobre (48) y (49) obtenemos

$$s(\tilde{w}, r)\ \tilde{p}\ (\tilde{w}, r) = L\ (\tilde{w}, r)\ \tilde{w} + (a\tilde{p}\ (\tilde{w}, r) + \beta\tilde{w})\ r \qquad (50)$$

donde $a = \sum_{k=1}^{K} a^k,\ \beta = \sum_{k=1}^{K} \beta^k$.

Supongamos que las empresas, para cada (p,w), ajustan su producción agregada neta q (p,w) (I - Π) al vector de demanda neta agregada de los consumidores s (p,w). Luego, como los precios satisfacen (46), se tiene

$$q\ (\tilde{w}, r) = s\ (\tilde{w}, r)\ A\ (0). \qquad (51)$$

Evaluemos el costo de oportunidad de la demanda excedente de capital.

Se tiene

$$[\, q(\tilde{w}, r)(\Phi\tilde{p}(\tilde{w}, r) + \Omega\tilde{w}) - (\alpha\tilde{p}(\tilde{w}, r) + \beta\tilde{w})\,]\, r =$$
$$= q(\tilde{w}, r)[\,(I - \Pi)\tilde{p}(\tilde{w}, r) - \Psi\tilde{w}\,] - [\, s(\tilde{w}, r)\tilde{p}(\tilde{w}, r) - L(\tilde{w}, r)\tilde{w}\,] =$$
$$= -[\, q(\tilde{w}, r)\Psi - L(\tilde{w}, r)\,]\tilde{w},$$

por (46), (50) y (51). Luego.

$$[q(\tilde{w}, r)\Psi - L(\tilde{w}, r)]\tilde{w} + [\, q(\tilde{w}, r)(\Phi\tilde{p}(\tilde{w}, r) + \Omega\tilde{w}) -$$
$$- (\alpha\tilde{p}(\tilde{w}, r) + \beta\tilde{w})\,]\, r = 0, \tag{52}$$

lo que podemos expresar en forma más compacta como

$$E(\tilde{w}, r) \cdot (\tilde{w}, r) = 0 \tag{53}$$

donde

$$E(\tilde{w}, r) = (E^L(\tilde{w}, r), E^K(\tilde{w}, r)) \in R^{l \times 1} \text{ y}$$
$$E^L(\tilde{w}, r) = q(\tilde{w}, r)\Psi - L(\tilde{w}, r)$$
$$E^K(\tilde{w}, r) = q(\tilde{w}, r)(\Phi\tilde{p}(\tilde{w}, r) + \Omega\tilde{w}) - (\alpha\tilde{p}(\tilde{w}, r) + \beta\tilde{w})$$

son las funciones de demanda excedente de trabajo y capital, respectivamente. Como en lo precedente hemos supuesto que $(\tilde{p}, \tilde{w})$ satisface (46), (53) tiene validez en el conjunto

$$W = \{ (\tilde{w}, r) \in R_+^{l+1} \mid [\, \bar{\bar{q}}(\Psi + S\Omega), \frac{1}{S}\,] \cdot (\tilde{w}, r) = 1 \} \tag{54}$$

Para la Proposición que sigue nos será de gran utilidad el siguiente Lema (Cfr. Gale (1955) y Nikaido (1956)).

Lema de Gale - Nikaido *Sea* $P = \{ p \in R_+^q \mid ap = 1 \}$, donde $a > 0$ y $Z \subset R^q$ un conjunto compacto. Si $F: P \to Z$ es una correspondencia semi-continua superiormente tal que para todo $p \in P$, $F(p)$ es no-vacío y convexo y satisface $F(p) \cdot p \leqq 0$, entonces existen $p^o \in P$ y $z^o \in F(p^o)$ tales que $z^o \leqq 0$.

Proposición 8 Si se verifican S.0 - S.3, S. 4', S.5', S.6 - S.8, existe algún equilibrio general. Además, a todo $(\tilde{w}, r) \in W$ que verifique

(a) $E(\tilde{w}, r) \leqq 0$

(b) $E_j(\tilde{w}, r) = 0$ si $\tilde{w}_j > 0, j = 1, \ldots, 1,$

$E_{l+1}(\tilde{w}, r) = 0$ si $r > 0,$

le corresponde algún equilibrio general.

Demostración. Así como en la Sección 4 vimos que para que las empresas maximizaran beneficios bajo restricciones de capital era necesario que (p, w, r) satisficiera (31) (donde Π, ν y p se reducían para incluir sólo a los procesos operados a nivel positivo) veremos ahora que la relación (31) es asimismo suficiente para que exista equilibrio general. Ahora, sin embargo, incluimos a todos los procesos. Partimos, entonces, de la solución continua y única de (31) garantizada por la Proposición 3. Tomamos, además, la MPG como numerario. Vimos arriba que si los propietarios ajustan sus planes de consumo a un presupuesto que implica la utilización plena del capital de las empresas y las empresas, a su vez, adaptan su producción a la demanda final, se verifica (53) en (54).

Apliquemos el Lema de Gale-Nikaido. W es compacto y E es una función vectorial continua definida en W. Luego E (W) es compacto y puede ponerse E: $W \rightarrow E(W) \subset R^{l+1}$. Además, al ser E una función (de punto a punto) continua, es asimismo una correspondencia semi-continua superiormente y E $(\tilde{w}, r)$ es no-vacío y trivialmente convexo para todo $(\tilde{w}, r) \in W$. Del Lema, se concluye que existe un $(\tilde{w}^\circ, r^\circ) \in W$ que verifica

$$E(\tilde{w}^\circ, r^\circ) \leqq 0. \tag{55}$$

Por (53) y la no-negatividad de $(\tilde{w}^\circ, r^\circ)$ se deduce que en este punto se cumplen

$$E_j(\tilde{w}^\circ, r^\circ) = 0 \text{ si } \tilde{w}_j^\circ > 0, j = 1, \ldots, l, \tag{56}$$

$$E_{l+1}(\tilde{w}^\circ, r^\circ) = 0 \text{ si } r^\circ > 0. \tag{57}$$

Estamos ahora en condiciones de especificar un equilibrio general competitivo. Tomemos un conjunto del siguiente tipo

$$\{ (\tilde{p}(\tilde{w}^\circ, r^\circ), \tilde{w}^\circ); (s^i(\tilde{w}^\circ, r^\circ), -L^i(\tilde{w}^\circ, r^\circ)), i=1, \ldots, G+H; \\ q^k(\tilde{w}^\circ, r^\circ), k=1, \ldots, K \}, \tag{58}$$

donde

$$\sum_{k=1}^{K} q^k (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) = q (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) = s (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) \; A(0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{G+H} s^i (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) \; A(0). \qquad (59)$$

Los únicos elementos que no están completamente determinados en (58) son los q^k, ya que existen múltiples maneras de dividir a q entre las empresas particulares. Además, teniendo en cuenta (55), (56), (59) y la positividad de $\widetilde{p}$ es evidente que (58) verifica las condiciones (a), (b) y (d) de un equilibrio general competitivo. Sólo falta especificar un poco más los q^k de modo tal que también verifique la condición (c).

Si $r^\circ > 0$, se tiene por (57)

$$q (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) \, (\nu \widetilde{p} \, (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) + \Omega \widetilde{w}^\circ) = \alpha \widetilde{p} \, (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) + \beta \widetilde{w}^\circ. \qquad (60)$$

Luego pueden determinarse los q^k de cualquier modo que satisfaga simultáneamente (59) y

$$q^k (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) (\nu \widetilde{p} \, (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) + \Omega \widetilde{w}^\circ) = \alpha^k \widetilde{p} \, (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) + \beta^k \widetilde{w}^\circ, \; k = 1, \ldots, K, \qquad (61)$$

o sea, de modo tal que cada empresa utilice plenamente su capital. En tal caso, la Proposición 7 nos asegura que cada empresa maximiza beneficios sujeta a su restricción de capital. Si $r^\circ = 0$, por la última desigualdad de (55) se tiene en (60) una desigualdad $\leqq$. En tal caso, pueden determinarse los q^k de cualquier modo que satisfaga simultáneamente (59) y

$$q^k (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) \, (\nu \widetilde{p} \, (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) + \Omega \widetilde{w}^\circ) \leqq \alpha^k \widetilde{p} \, (\widetilde{w}^\circ, r^\circ) + \beta^k \widetilde{w}^\circ, \; k = 1, \ldots, K \qquad (62)$$

Nuevamente, la Proposición 7 nos asegura que se verifica la condición (c) de equilibrio general competitivo.

Sólo falta comprobar que (50) corresponde realmente a la agregación de las restricciones presupuestarias de los individuos para las producciones determinadas. Si $r^\circ > 0$ se tiene por (60) y (46)

$$[\alpha \tilde{p} (\tilde{w}^\circ, r^\circ) + \beta \tilde{w}^\circ] r = q (\tilde{w}^\circ, r^\circ) (\nu \tilde{p} (\tilde{w}^\circ, r^\circ) + \Omega \tilde{w}^\circ) r^\circ =$$

$$= q (\tilde{w}^\circ, r^\circ) [\tilde{p} (\tilde{w}^\circ, r^\circ) - \Pi \tilde{p} (\tilde{w}^\circ, r^\circ) - \Psi \tilde{w}^\circ], \qquad (63)$$

lo que nos asegura que la agregación sobre (47)y (48) coincida con la a-agregación sobre (49) y (48). Si $r^\circ = 0$, también hay coincidencia pues todos los términos de (63) se anulan. Q. E. D.

Observación: La Proposición 8 vale igualmente si se sustituye en S. 7 las funciones continuas L^i (p, w) por correspondencias semi-continuas superiormente tales que, para todo (p, w) $\in R^{n+1}_+ \sim \{0\}$, L^i (p, w) sea no-vacío y convexo. En tal caso, E ($\tilde{w}$, r) se convierte en una correspondencia semi-continua superiormente. La demostración sería casi exactamente igual con la salvedad de que en (58) puede tomarse cualquiera de los elementos de los conjuntos L^i ($\tilde{w}^\circ$, r°), i = 1, . . ., G + + H.

BIBLIOGRAFIA

G. ESCUDE (1981), *Positive Prices, Basics and Non-Basics in Sraffa's Model.*

D GALE (1955), The Law of Supply and Demand, *Mathematica Scandinavica*, 3 pp. 155-69.

D. GALE (1960), *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill.

F.R. GANTMACHER (1959), *The Theory of Matrices*, Chelsea, N. York.

T. MIYAO (1977), A Generalization of Sraffa's Standard Commodity and its Complete Characterization, *International Economic Review*, Feb. pp. 151--62.

H. NIKAIDO (1956), On the Classical Multilateral Exchange Problem, *Metroeconomica* 8, pp. 135-45.

H. NIKAIDO (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press.

L. PASINETTI (1977), *Lectures on the Theory of Production*, Columbia University Press, N. York.

J. T. SCHWARTZ (1961), *Lectures on the Mathematical Method of Analytical Economics*, Gordon and Breach, N. York.

P. SRAFFA (1960), *Producción de mercancías por medio de mercancías, Oikos-tau* Barcelona, 1966.

[illegible] AGHINI (1967), On Non-Basic Commodities, *Schweizerische Zeitschrift für [illegible]wirtschaft und Statistik*, CIII, pp. 257-66.

LA MERCANCIA PATRON GENERALIZADA PARA TRABAJO HETEROGENEO Y EQUILIBRIO GENERAL

RESUMEN

Se generaliza el modelo de Sraffa de producción no-conjunta para incluir requerimientos de stocks y trabajo heterogéneo. Se generaliza la Mercancía Patrón de Sraffa y se comprueba que su utilización como numerario linealiza la frontera de precios de los factores. Luego se supone coeficientes fijos y se cierra al modelo mediante funciones de demanda y maximización de beneficios bajo restricciones de capital. La utilización como numerario de la Mercancía Patrón Generalizada, al circunscribir a las tasas salariales y de beneficios a un simplex, permite obtener una demostración sencilla de equilibrio competitivo basada en el Lema de Gale-Nikaido.

THE GENERALIZED STANDARD COMMODITY FOR HETEROGENEOUS LABOR AND GENERAL EQUILIBRIUM

SUMMARY

Sraffa's non-joint production model is generalized by including stock requirements and heterogeneous labor. The Standard Commodity is generalized so that its use as numeraire still linearizes the factor-price frontier. Then fixed coefficients are assumed and the model is closed by means of demand functions and profit maximization subject to capital constraints. The fact that using the Generalized Standard Commodity as numeraire keeps wage and profit rates inside a simplex opens the way to a simple proof of the existence of competitive equilibrium based on the Gale-Nikaido Lemma.