

ASPECTOS DINAMICOS DE LA TASA DE INTERES EN ALGUNOS MODELOS MACROECONOMICOS SIMPLES*

ELIAS SALAMA **

1. El propósito principal del presente trabajo es examinar algunos aspectos dinámicos de la tasa de interés cuando se modifica la tasa de creación de dinero. Para efectuar el análisis, se ha utilizado un modelo macroeconómico muy simple al que se le han incorporado las expectativas de inflación agregando la ecuación correspondiente a la "curva de Phillips aumentada". En ésta se ha introducido un término correspondiente a la variación de la tasa de interés.

Las trayectorias de las principales variables, incluyendo la tasa de interés nominal, la tasa de interés real esperada y la tasa de interés real observada, han sido examinadas. Se han incluido algunos ejemplos numéricos que ayudan a visualizar el análisis (sección 9).

Las secciones 2 a 8 contienen el desarrollo del modelo. En la sección 10 se incluyen las conclusiones.

2. El modelo que se utilizará tiene solamente dos activos: dinero y bonos (privados). Se ha supuesto que bonos, acciones y otros activos financieros son sustitutos perfectos. Por dinero se entiende billetes y monedas. Los depósitos en cuenta corriente, si estuviesen sujetos a un efectivo mínimo del 100% , quedarían comprendidos en la definición de dinero. Los depósitos de ahorro en los intermediarios financieros y los préstamos de éstos quedan comprendidos en la definición de bonos si los depósitos no están sujetos a efectivo mínimo y si, para simplificar, se supone que los intermediarios financieros no tienen reservas voluntarias o libres. Se ha supuesto también la inexistencia de bonos del gobierno.

* Este trabajo refleja exclusivamente opiniones personales del autor.
** Universidad Nacional de La Plata y Banco Central de la República Argentina.

Las funciones de demanda de cada activo siguen principios usuales en la materia: la demanda de cada activo depende positivamente de su propia tasa de interés real y negativamente de la tasa de interés real del otro activo, además de depender del ingreso y de la cantidad real de dinero (riqueza). Se ha especificado la siguiente forma funcional de las ecuaciones¹:

$$B_1 \ln Y + B_2 (i - \pi^*) + B_3 \ln \frac{M}{P} + B_4 (-\pi^*) = \ln b \quad (1)$$

$$L_1 \ln Y + L_2 (i - \pi^*) + L_3 \ln \frac{M}{P} + L_4 (-\pi^*) = -\ln b + \ln \frac{M}{P} \quad (2)$$

La ecuación (1) corresponde al mercado de bonos y la ecuación (2) al mercado del dinero. La notación es la siguiente: Y, ingreso real; i, tasa nominal de interés de los bonos; π^* , tasa esperada de inflación; M, cantidad nominal de dinero; P, nivel de precios; $(i - \pi^*)$, tasa real de interés de los bonos; $y - \pi^*$, tasa real de interés del dinero; b es una constante.

Los coeficientes tienen los siguientes signos: $B_1 < 0$, $B_2 > 0$, $B_3 > 0$, $B_4 < 0$, $L_1 > 0$, $L_2 < 0$, $L_3 > 0$, $L_4 > 0$.

El análisis es en tiempo continuo² y no discreto. Las siguientes restricciones rigen para los coeficientes (ley de Walras de los activos): $B_1 + L_1 = 0$; $B_2 + L_2 = 0$; $B_3 + L_3 = 1$; $B_4 + L_4 = 0$.

La ecuación (2) puede reescribirse así:

$$L_1 \ln Y + L_2 i + (L_3 - 1) \ln \frac{M}{P} - (L_2 + L_4) \pi^* = -\ln b \quad (2a)$$

Para compatibilizar esta ecuación con la siguiente presentación de la demanda de dinero:

$$\frac{M}{P} = L(Y, i, \pi^*, M/P) \quad L_Y > 0, L_i < 0, L_{\pi^*} < 0, L_{M/P} > 0$$

es necesario suponer que $(L_4 + L_2) > 0$, lo que lleva a suponer que $|B_4| > |B_2|$ por aplicación de la ley de Walras. No ha sido necesario hacer este supuesto para los resultados que se obtienen en este trabajo.

Se ha supuesto que la demanda excedente de bienes está determinada por el ingreso real, la tasa real de interés de los bonos y la can-

1 Por los resultados obtenidos por G. K. YARROW (7) se puede conjeturar que la forma funcional utilizada hace menos estrictas las condiciones de estabilidad.

2 Para una discusión del análisis en tiempo continuo, ver (17) y (18). Ver también el capítulo 3 de (2) y (16). Para una discusión reciente, el cap. 4 de (12).

tividad real de dinero:

$$E_1 \ln Y + E_2 (i - \pi^*) + E_3 \ln \frac{M}{P} = \ln a \quad (3)$$

Los signos de los coeficientes son $E_1 < 0$, $E_2 < 0$, $E_3 > 0$.

La oferta de bienes está dada por la llamada "curva de Philips aumentada"³. Peel y Metcalfe (6) han sostenido recientemente que en la curva de Phillips se debe incluir a la tasa real de interés porque afecta el "mark-up" entre precios y salarios que supone la curva de Phillips. En otras palabras, suponen que la tasa real de interés y el salario real se mueven en direcciones opuestas. Otros autores, con distintos fundamentos, han señalado que corresponde incluir una variable que represente los costos financieros en las funciones de precio o en las funciones de oferta⁴.

En este trabajo seguimos la especificación de la curva de Phillips hecha por Peel y Metcalfe. Estos autores se han limitado a determinar las condiciones de estabilidad sin considerar las trayectorias de las variables; por otra parte, hay diferencias en la especificación que hacen estos autores de las ecuaciones de los mercados monetarios y de bienes con respecto a la que se hace en este trabajo.

La curva de Phillips esta dada por la siguiente expresión:

$$Y = \bar{Y} \cdot e^{\epsilon(\pi - \pi^*)} \cdot e^{-s(i - \dot{\pi}^*)} \quad \epsilon > 0, s > 0 \quad (4)$$

donde \bar{Y} es el ingreso "natural" o de pleno empleo; π la tasa de inflación y el punto sobre la tasa de interés indica su derivada respecto del tiempo.

Las expectativas de inflación se forman según el esquema de adaptación de expectativas:

$$\dot{\pi}^* = \beta (\pi - \pi^*) \quad (5)$$

La hipótesis de adaptación de expectativas ha sido calificada de "irracional" o "no racional". Sin embargo, se ha llegado a concluir que el mecanismo de adaptación de expectativas puede ser una aproximación útil a procesos de formación de expectativas que involucran un

3 Para un análisis de la literatura sobre la curva de PHILLIPS, ver (13) y (20).

4 Ver (8), (9), (11), (15) y, especialmente, (14).

aprendizaje óptimo (3).⁵

Las ecuaciones (1) a (3) son usuales en modelos de equilibrio general (1). La incorporación de la llamada "curva de Phillips aumentada" en modelos como el utilizado en este trabajo es también frecuente en la literatura lo mismo que la incorporación de la hipótesis de adaptación de expectativas. El modelo de las ecuaciones (1) a (5), para $s = 0$, puede verse como una simplificación del utilizado en el capítulo 7 del libro de S. J. Turnovsky (2).

La utilización de un modelo como el que se utiliza en este trabajo se justifica porque, al incorporar a la tasa de interés, permite determinar su trayectoria ante un shock exógeno como es una modificación de la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. El modelo utilizado es reconocidamente muy simple; a pesar de ello lleva a expresiones relativamente complejas. Por ello, no se intentó utilizar modelos más "realistas" o "complejos" que llevan usualmente a resultados más indeterminados. El análisis que se efectúa ha sido denominado de "cuasi equilibrio" ((2), (10)) por ser un análisis en tasas de variación y no en niveles de las variables.

3. En esta sección se indicarán brevemente los pasos necesarios para llegar a un sistema de dos ecuaciones diferenciales partiendo de las ecuaciones (1), (3), (4) y (5).

De las ecuaciones (1), (3) se obtiene:

$$(E_2 B_1 - E_1 B_2) \dot{Y} = (E_3 B_2 - E_2 B_3) (\mu - \pi) + E_2 B_4 \dot{\pi}^* \quad (6)$$

donde μ es la tasa de creación de dinero $\left(\frac{1}{M} \cdot \frac{dM}{dt}\right)$ la que se supone es determinada exógenamente por la autoridad monetaria.

Una expresión para Y (donde el punto indica la derivada logarítmica respecto del tiempo) se obtiene de (4):

$$\dot{Y} = \epsilon (\ddot{\pi} - \dot{\pi}^*) - s (\ddot{i} - \dot{\pi}^*) \quad (7)$$

donde el doble punto indica la segunda derivada respecto del tiempo.

⁵ Para la utilización de otros esquemas de formación de expectativas en modelos monetarios, en relación con el análisis de estabilidad, puede verse el trabajo de D. A. PEEL (5).

De (1) y (3) se obtiene:

$$\ddot{i} = \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\dot{\mu} - \dot{\pi}) + \left[1 - \frac{E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] \dot{\pi}^* \quad (8)$$

Si se introduce (8) en (7) y ésta en (6) permite llegar, después de diversas operaciones y de utilizar (5), a la siguiente ecuación diferencial, que completa un sistema de dos ecuaciones diferenciales con la (5):

$$\dot{\pi} = \frac{1}{p} \{ [q\beta - e] \pi - q\beta \pi^* + e\mu + s(E_1 B_3 - E_3 B_1) \dot{\mu} \} \quad (9)$$

donde,

$$p = (E_2 B_1 - E_1 B_2) \cdot \epsilon + s\beta E_1 B_4 + s(E_1 B_3 - E_3 B_1)$$

$$q = (E_2 B_1 - E_1 B_2) \cdot \epsilon + s\beta E_1 B_4 + E_2 B_4 > 0$$

$$e = (E_3 B_2 - E_2 B_3) > 0.$$

4. Análisis de estabilidad. La ecuación característica correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales (9) y (5) es:

$$\lambda^2 + \left[\frac{\beta(p-q) + e}{p} \right] \lambda + \frac{\beta e}{p} = 0 \quad (10)$$

Como $e > 0$ y $\beta > 0$, se tiene que para la estabilidad se requiere

$$p > 0 \quad (11)$$

El primer término de p es positivo: el segundo término tiene signo positivo y el tercero es ambiguo. Si $(E_1 B_3 - E_3 B_1) < 0$, se torna más difícil que $p > 0$. Para $s = 0$, $p = (E_2 B_1 - E_1 B_2) \epsilon > 0$. Obsérvese que cuando $s = 0$, valores pequeños de ϵ no afectan la estabilidad del modelo; cuando $s > 0$, valores más pequeños de ϵ hacen más difícil el cumplimiento de la condición de estabilidad.

Para la estabilidad se requiere, además, que $[\beta(p-q) + e] > 0$. Dividiendo por e y reemplazando $p - q$ por las expresiones correspondientes se llega a:

$$1 - \frac{\beta E_2 B_4}{e} > -\beta s \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{e} \right) \quad (12)$$

El lado derecho de (12) será positivo si $(E_1 B_3 - E_3 B_1) < 0$. En este caso, la condición de estabilidad es más estricta que la que se obtiene para $s = 0$. Si, por el contrario, $(E_1 B_3 - E_3 B_1)$ fuese positivo, la condición sería menos estricta que en el caso $s = 0$. Se verá más adelante (secciones (6) y (7)) que $(E_1 B_3 - E_3 B_1) > 0$, puede traer como resultado trayectorias "anormales" de la tasa de interés y del ingreso real, por lo que habría que descartar esta posibilidad. La conclusión que se obtendría entonces es que las condiciones de estabilidad son más estrictas cuando $s > 0$ que cuando $s = 0$.

Las raíces de la ecuación característica (10) son:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\left[\frac{\beta(p-q) + e}{p}\right] \pm \sqrt{\left[\frac{\beta(p-q) + e}{p}\right]^2 - \frac{4\beta e}{p}}}{2} \quad (13)$$

La condición para un acercamiento no oscilatorio al punto de equilibrio es:

$$\left[\frac{\beta(p-q) + e}{p}\right]^2 - \frac{4\beta e}{p} > 0 \quad (14)$$

que se puede reescribir así:

$$\left[\frac{\beta(p-q)}{e} + 1\right]^2 e - p > 0 \quad (14a)$$

5. Solución de equilibrio de largo plazo. Cuando $\dot{\pi}^* = 0$, se obtiene en (5) que $\pi = \pi^*$. Para $\dot{\mu} = 0$, en (9) se obtiene, para $\dot{\pi} = 0$, y $\pi = \pi^*$, que $\pi = \pi^* = \mu$. En el largo plazo el modelo cumple con el conocido resultado de la teoría cuantitativa que la tasa de inflación y la tasa de creación de dinero son iguales.

6. Graficación. La pendiente de la ecuación diferencial (9), en el plano de las variables π y π^* , está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d\pi}{d\pi^*/\dot{\pi}=0} = \frac{q\beta}{q\beta - e} \approx 0 \quad (15)$$

donde $(q\beta - e)$ puede ser positivo o negativo.

La pendiente de la ecuación diferencial (5) es igual a la unidad.

Los casos posibles de graficación son:

a) $q\beta > 0$ y $(q\beta - e) < 0$, lo que significa $\frac{d\pi}{d\pi^*/\dot{\pi}=0} = 0 < 0$.

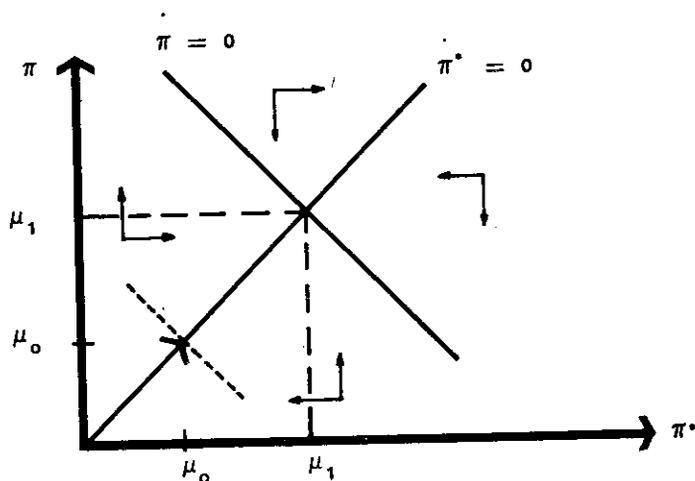


GRAFICO 1

El determinante del sistema, J , es igual a $\frac{\beta e}{p}$. Este se puede reescribir así:

$$J = \frac{-[q\beta - e]\beta + q\beta^2}{p} > 0 \quad (16)$$

Multiplicando por $p > 0$, en el caso estable, se obtiene

$$-[q\beta - e] + q\beta > 0$$

Dividiendo por $-[q\beta - e] > 0$

$$1 - \frac{q\beta}{q\beta - e} > 0 \quad (17)$$

que corresponde a la resta de las pendientes en este caso.

Partamos de $q\beta - e < 0$. Sumando y restando βp y trasponiendo términos, se llega a

$$\left[\frac{\beta(p-q)}{e} + 1 \right] e - p > 0 \quad (18)$$

La condición (18) es compatible con el cumplimiento o no de la (14): es decir, el acercamiento al punto de equilibrio puede ser oscilatorio o no.

El siguiente razonamiento sigue de cerca a (4). Se supondrá que $(E_1 B_3 - E_3 B_1) < 0$ y el caso de acercamiento no oscilatorio al punto de equilibrio.

La pendiente de la trayectoria de las variables π y π^* se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales (9) y (5). Se obtiene (para $\dot{\mu} = 0$):

$$\frac{\dot{\pi}}{\dot{\pi}^*} = 1 + \frac{1}{p} \left\{ [E_2 B_4 - s(E_1 B_3 - E_3 B_1)] + \frac{e(\mu - \pi)}{\beta(\mu - \pi^*)} \right\}$$

Al aumentar μ de μ_0 a μ_1 , π comienza a aumentar y a alejarse de π^* , por lo que el valor de π^* es a su vez modificado según la ecuación (5). Los aumentos iniciales de π y π^* , cuando aumenta μ se pueden obtener de las ecuaciones (9) y (5): $\dot{\pi}(0) = \frac{e}{p}(\mu_1 - \mu_0) > 0$ y $\dot{\pi}^*(0) = 0$. En el comienzo de la trayectoria, la inflación observada aumenta más que la inflación esperada. Un punto especial de esta trayectoria es $\mu = \pi$. En este caso la pendiente es igual a

$$\left[1 + \frac{E_2 B_4 - s(E_1 B_3 - E_3 B_1)}{p} \right] > 1$$

y hasta este punto la cantidad real de dinero ha crecido; después, comienza a disminuir. Cuando la trayectoria cruza la recta $\dot{\pi} = 0$ alcanza π su valor máximo y después tiene la trayectoria una pendiente negativa, yendo directamente a su nuevo punto de equilibrio de largo plazo con π cayendo. (Para un ejemplo numérico ver S. 2). Previamente, la pendiente de la trayectoria ha sido igual a la unidad, registrándose en ese punto la máxima brecha entre π y π^* .

En lo que respecta a π^* crece continuamente desde su punto inicial de equilibrio hasta su punto final de equilibrio.

b) $q\beta > 0$ y $[q\beta - e] > 0$, lo que significa $\frac{d\pi}{d\pi^*/\dot{\pi}} = 0 > 0$.

El determinante se puede escribir, como ya se vio, del siguiente

$$\text{modo: } J = \frac{[q\beta - e]\beta + q\beta^2}{P} > 0$$

de donde P
 $- [q\beta - e] + q\beta > 0$

Dividiendo por $- [q\beta - e] < 0$:

$$1 - \frac{q\beta}{q\beta - e} < 0$$

(19)
 expresión que se corresponde con la resta de las pendientes en este caso.

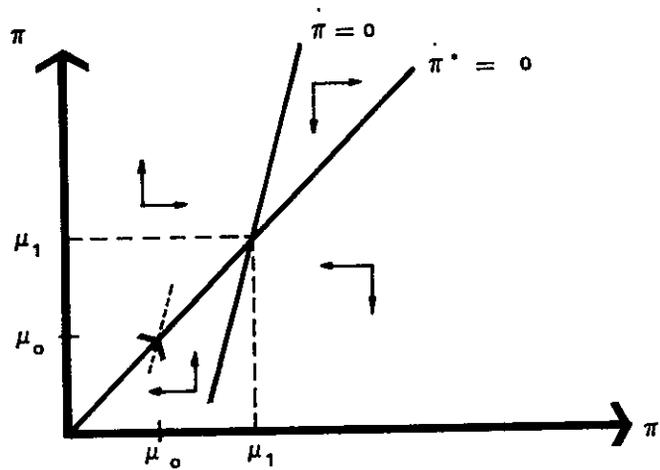


GRAFICO 2

Partiendo de $(q\beta - e) > 0$ se llega a:

$$\left[\frac{\beta(p-q)}{e} + 1 \right] e - p < 0 \quad (20)$$

La expresión $\left[\frac{\beta(p-q)}{e} + 1 \right]$ debe ser positiva en el caso estable, es decir, $\left[\frac{\beta(p-q)}{e} + 1 \right] > 0$

Veamos si puede ser mayor que la unidad. Se tiene que,

$$\frac{\beta(p-q)}{e} + 1 > 1 \Rightarrow \frac{\beta(p-q)}{e} > 0 \Rightarrow (p-q) > 0 \Rightarrow [s(E_1 B_3 - E_3 B_1) - E_2 B_4] > 0.$$

Se tendrá, entonces, que si $[s(E_1 B_3 - E_3 B_1) - E_2 B_4] < 0$ la expresión $\left[\frac{\beta(p-q)}{e} + 1 \right] < 1$. En este caso, (20) es incompatible con (14) y el acercamiento al punto de equilibrio no puede ser no oscilatorio (Un ejemplo numérico de trayectoria en este caso se encuentra en S.1). Si

$$[s(E_1 B_3 - E_3 B_1) - E_2 B_4] > 0 \text{ se tiene entonces que } \left[\frac{\beta(p-q)}{e} + 1 \right] > 1$$

y la expresión (20) es compatible con el cumplimiento de la expresión (14). El acercamiento al punto de equilibrio puede ser oscilatorio o no.

Para que se de este caso, se requiere que $(E_1 B_3 - E_3 B_1) > 0$, que puede significar trayectorias "anormales" del ingreso y de la tasa de interés. Si $E_3 = 0$, este caso no se puede dar.

7. La trayectoria de la tasa de interés se puede establecer del siguiente modo. Tomando logaritmos en la ecuación (4) y usando (5) se tiene⁶:

$$\ln Y = \ln \bar{Y} + (\epsilon + s\beta) (\pi - \pi^*) - s \dot{i} \quad (21)$$

Una expresión para \dot{i} se obtiene de las ecuaciones (1) y (3):

$$\dot{i} = \left[1 - \frac{E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] \dot{\pi}^* - \left(\frac{E_3 B_1 - E_1 B_3}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\mu - \pi)$$

Remplazando en (21) se tiene:

$$\begin{aligned} \ln Y = \ln \bar{Y} + (\epsilon + s\beta) (\pi - \pi^*) \\ - s \left\{ - \left(\frac{E_3 B_1 - E_1 B_3}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\mu - \pi) + \left(1 - \frac{E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) \dot{\pi}^* \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

Sustituyendo $\ln Y$ de acuerdo con (22) en (1) y (3) permite llegar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} i + \frac{E_3}{E_2} \ln \frac{M}{P} = \frac{1}{E_2} (\ln a - E_1 \ln \bar{Y}) + \pi^* \\ - \frac{E_1}{E_2} \left(\epsilon + \frac{s\beta E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\pi - \pi^*) + \frac{E_1}{E_2} s \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\mu - \pi) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} i + \frac{B_3}{B_2} \ln \frac{M}{P} = \frac{1}{B_2} (\ln b - B_1 \ln \bar{Y}) + \left(\frac{B_2 + B_4}{B_2} \right) \pi^* \\ - \frac{B_1}{B_2} \left(\epsilon + \frac{s\beta E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\pi - \pi^*) + \frac{B_1}{B_2} s \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\mu - \pi) \end{aligned} \quad (24)$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones (23) y (24) se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{i} = \frac{(\ln a - E_1 \ln \bar{Y}) B_3 - (\ln b - B_1 \ln \bar{Y}) E_3}{-e} + \left[1 + \frac{E_3 B_4}{e} \right] \pi^* \\ + \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{e} \right) \left(\epsilon + \frac{s\beta E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\pi - \pi^*) \\ - \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{e} \right) s \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\mu - \pi) \end{aligned} \quad (25)$$

6 Para consideraciones adicionales sobre el tema de esta sección, ver (19).

En el equilibrio de largo plazo, se tiene que $\pi = \pi^* = \mu$ y los dos últimos términos desaparecen, quedando sólo los dos primeros.

El segundo término de (25) tiene el signo ambiguo (si $E_3 \neq 0$, es igual a la unidad); se supondrá que es positivo. Cuando μ_0 aumenta μ_1 , π^* también crece continuamente, en el caso no oscilatorio, hasta su nuevo valor de equilibrio en que $\pi_1^* = \mu_1$. Entonces, el segundo término crece continuamente y ejerce una influencia al ascenso de la tasa de interés.

El signo del tercer término depende del signo de $E_1 B_3 - E_3 B_1$. La distancia entre π y π^* crece hasta un cierto punto y después disminuye continuamente hasta anularse en el caso no oscilatorio. Entonces, el tercer término ejerce una influencia al descenso transitorio de la tasa de interés (si $(E_1 B_3 - E_3 B_1) < 0$) que se hace máxima en un punto y después disminuye hasta desaparecer. El cuarto término es negativo hasta el momento en que π alcanza a μ , y después se hace positivo. Ejerce, entonces, una influencia negativa inicial sobre la tasa de interés y después positiva, hasta anularse en el nuevo punto de equilibrio de largo plazo en que $\mu_1 = \pi_1$.

La trayectoria del ingreso se obtiene reemplazando $\dot{\pi}^*$ de acuerdo con (5) en la expresión (22).

$$\ln Y = \ln \bar{Y} + \left(\epsilon + \frac{s\beta E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\pi - \pi^*) - s \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right) (\mu - \pi) \quad (26)$$

Cuando $s = 0$, un aumento de μ da como resultado que el ingreso aumenta transitoriamente ya que $(\pi - \pi^*)$ aumenta transitoriamente, como se vió. Para que este tipo de trayectoria se mantenga cuando $s > 0$, es condición suficiente aunque no necesaria que $E_1 B_3 - E_3 B_1 < 0$. Si se cumple esta condición se hace positivo el tercer término de (26), para $\mu > \pi$. Como ya se vió, $(E_1 B_3 - E_3 B_1) < 0$ hace más difícil el cumplimiento de las condiciones de estabilidad.

De la expresión (25) se puede obtener la trayectoria de la tasa real de interés esperada, restando π^* de ambos lados de la ecuación. Si $E_3 = 0$, entonces desaparece el segundo término del lado derecho de la ecuación. La expresión que se obtiene se puede comparar con la del ingreso. Además, de la ecuación (25) se puede obtener una expresión para la tasa real de interés observada. En conjunto, se tiene,

$$(i - \pi^*) - \text{Constantes} = \left(\frac{E_3 B_4}{e}\right) \pi^* + \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{e}\right) \left\{ \left[\epsilon + \frac{s\beta E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] (\pi - \pi^*) - s \left[\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] (\mu - \pi) \right\} \quad (27)$$

$$\ln Y - \ln \bar{Y} = \left\{ \left[\epsilon + \frac{s\beta E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] (\pi - \pi^*) - s \left[\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] (\mu - \pi) \right\} \quad (28)$$

$$(i - \pi) - (\text{Constantes}) = -(\pi - \pi^*) + \left(\frac{E_3 B_4}{e}\right) \pi^* + \left(\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{e}\right) \left\{ \left[\epsilon + \frac{s\beta E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] (\pi - \pi^*) - s \left[\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] (\mu - \pi) \right\} \quad (29)$$

Surge que para $E_3 = 0$ las trayectorias de la tasa real de interés esperada y del ingreso son las mismas, salvo un factor multiplicativo negativo en la trayectoria de la tasa real de interés esperada.

La tasa real de interés observada difiere de la esperada en el término $-(\pi - \pi^*)$. Inicialmente, cuando aumenta μ , este término es negativo; por lo tanto, la tasa real de interés observada caerá más que la esperada.

Cuando $E_3 > 0$, las trayectorias de la tasa real de interés esperada y del ingreso difieren, además del factor multiplicativo, en el término aditivo $\frac{E_3 B_4}{e} \pi^*$.

Para la cantidad real de dinero, se obtiene de las fórmulas (23) y (24) la siguiente expresión:

$$\ln \frac{M}{P} = \frac{E_2 (\ln b - B_1 \ln Y) - B_2 (\ln a - E_1 \ln \bar{Y}) - \frac{B_4 E_2}{e} \pi^* + \frac{(E_2 B_1 - E_1 B_2)}{e} \left\{ \left[\epsilon + \frac{s\beta E_1 B_4}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] (\pi - \pi^*) - s \left[\frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} \right] (\mu - \pi) \right\}}{-e} \quad (30)$$

En el largo plazo se hacen cero los dos últimos términos ya que $\mu = \pi = \pi^*$ y disminuye la cantidad real de dinero debido al signo negativo del segundo término y al aumento de π^* . Al comienzo del proceso, para $s = 0$ la cantidad real de dinero sube ya que el signo del tercer término es positivo. Cuando $s > 0$, aumenta el valor absoluto del tercer término y se agrega el cuarto término que también influye para hacer subir transitoriamente a la cantidad real de dinero.

De acuerdo con los resultados dados más arriba ($\dot{\pi}(t_0) = \frac{e}{P} (\mu_1 - \mu_0)$ y $\dot{\pi}^*(t_0) = 0$), se pueden obtener las variaciones iniciales de las restantes variables de las fórmulas correspondientes:

De (30) se obtiene:

$$\dot{i}(t_0) = \frac{E_1 B_3 - E_3 B_1}{E_2 B_1 - E_1 B_2} (\mu_1 - \mu_0) < 0$$

De (31) se obtiene:

$$\dot{Y}(t_0) = \frac{e}{E_2 B_1 - E_1 B_2} (\mu_1 - \mu_0) > 0$$

De (35) se obtiene:

$$\ln \frac{\dot{M}}{P}(t_0) = (\mu_1 - \mu_0) > 0$$

El efecto de s sobre $\dot{\pi}(t_0)$ depende del signo de $[\beta E_1 B_4 + (E_1 B_3 - E_3 B_1)]$. Si es positivo, valores mayores de s significan valores menores de $\pi(t_0)$.

8. Las ecuaciones (23) y (24) se pueden representar gráficamente en el plano de las variables $(i, \ln M/P)$ de un modo análogo, en términos generales, a los modelos macroeconómicos usuales. La ecuación (23) corresponde al mercado de bienes y tiene pendiente positiva; la ecuación (24) corresponde al mercado de bonos y tiene pendiente negativa. Dada la ley de Walras utilizada, el mercado de dinero tiene también pendiente negativa y su representación gráfica coincide con la del mercado de bonos.

En equilibrio de largo plazo, las respectivas ordenadas al origen están dadas por el término con las constantes y por el término en π^* del lado derecho de las ecuaciones (23) y (24). La tasa de interés de largo plazo se determina resolviendo el sistema de las ecuaciones (23) y (24). Dado que en largo plazo se obtiene que $\mu = \pi^*$, de (23) y (24) se llega a:

$$\frac{d \ln M/P}{d \mu} = -B_4 E_2 / e < 0 \quad (31)$$

$$\frac{di}{d \mu} = (1 + B_4 E_3 / e) > 0 \quad (32)$$

De acuerdo con (31), un aumento de μ produce en el largo plazo una caída de la cantidad real de dinero (que es el resultado ya visto en (30)). El resultado (32) da, para $E_3 = 0$, el conocido resultado que la tasa de interés nominal tiene un aumento igual al de la tasa esperada de inflación.

Cuando μ aumenta, inicialmente, el sistema sale del equilibrio de largo plazo. En el plano de las variables tasa de interés, cantidad real de dinero, las ordenadas al origen de las ecuaciones (23) y (24) están dadas por todos los términos del lado derecho de las ecuaciones. En cada instante, se determina la tasa de interés y la cantidad real de dinero por la intersección de ambas curvas. Pero siendo un equilibrio de corto plazo, los valores determinados se modifican continuamente, mientras no se alcance el equilibrio de largo plazo.

Cuando el ingreso está fijo ($\epsilon = s = 0$), el modelo de las ecuaciones (1) a (5) se simplifica bastante. Siguiendo un procedimiento análogo al utilizado más arriba se llega a una única ecuación diferencial⁷, que formalmente es análoga al análisis de P. Cagan. La trayectoria de la tasa de interés que describe este modelo, ante un aumento de μ , se puede ver directamente de la ecuación (25) haciendo cero los parámetros ϵ y s ; se obtiene que la tasa de interés no puede bajar transitoriamente ante aumento de μ . Esta imposibilidad de modelar caídas transitorias de la tasa de interés no parece corresponderse con la observación empírica.

Cuando $\epsilon > 0$, se puede modelar una caída transitoria de la tasa de interés ante un aumento de μ . Si se examina el tercer término de la ecuación (25) se verá que es condición necesaria para ello que $E_1 B_3 - E_3 B_1$ sea negativo.

Cuando $\epsilon > 0$ y $s > 0$, se agrega en la ecuación (25) el cuarto término que, transitoriamente, ante aumentos de μ , toma signo negativo, por lo que contribuye a la caída transitoria de la tasa de interés.

De las ecuaciones (23) y (24) se obtuvo para $\ln M/P$ en la ecuación (30) una expresión análoga a la obtenida para i en la ecuación (25). Se tiene, entonces, que un aumento inicial transitorio de la cantidad real de dinero y una caída inicial transitoria de la tasa nominal de interés se modelan simultáneamente.

9. El ejemplo numérico S.1 se obtuvo de los siguientes valores

7 La ecuación es $\pi^* = \frac{\beta}{(1-E_2 B_4 \beta/\epsilon)} \mu - \frac{\beta}{(1-E_2 B_4 \beta/\epsilon)} \pi^*$. La correspondiente condición de estabilidad es análoga a la determinada por P. CAGAN.

asignados a los parámetros del modelo:

$$\begin{aligned} E_1 &= -0,3; E_2 = -0,1; E_3 = 0 \\ B_1 &= -0,5; B_2 = 0,05; B_3 = 0,2; B_4 = -0,8 \\ \epsilon &= 0,1; \beta = 2,45; s = 0 \text{ y } s = 0,0015 \\ \mu_0 &= 0,1; \mu_1 = 0,2 \end{aligned}$$

El ejemplo numérico S.2 se obtuvo de los siguientes valores asignados a los parámetros del modelo:

$$\begin{aligned} E_1 &= -0,3; E_2 = -0,3; E_3 = 0 \\ B_1 &= -0,25; B_2 = 0,1; B_3 = 0,4; B_4 = -0,11 \\ \epsilon &= 0,05; \beta = 1,5; s = 0 \text{ y } s = 0,005 \\ \mu_0 &= 0,1; \mu_1 = 0,2 \end{aligned}$$

En el ejemplo S.1, se obtienen los siguientes valores para las derivadas en (t_0) , para $s = 0$ ($s = 0,0015$)

$$\begin{aligned} \dot{\pi}(t_0) &= 0,30769 \quad (0,27427) & \dot{i}(t_0) &= -0,09231 \\ \dot{Y}(t_0) &= 0,03077 & \ln\left(\frac{M}{P}\right)(t_0) &= 0,1 \end{aligned}$$

En el ejemplo S.2, se obtienen los siguientes valores para las derivadas en (t_0) , para $s = 0$ ($s = 0,005$)

$$\begin{aligned} \dot{\pi}(t_0) &= 2,28571 \quad (2,45023) & \dot{i}(t_0) &= -0,11429 \\ \dot{Y}(t_0) &= 0,11429 & \ln\left(\frac{M}{P}\right)(t_0) &= 0,1 \end{aligned}$$

La caída inicial de la tasa nominal de interés es muy reducida y breve, por lo que no puede ser graficada adecuadamente. En vista de ello, en Anexo 2 se proporcionan los datos numéricos correspondientes a las trayectorias iniciales de la tasa nominal de interés.

10. Conclusiones. En este trabajo se examina, por medio de modelos macroeconómicos, la trayectoria que sigue la tasa de interés cuando se modifica la tasa a la que aumenta la cantidad de dinero.

El crecimiento de la tasa de aumento de la cantidad de dinero se traduce en un aumento inmediato de la tasa de inflación observada y en un aumento retrasado de la tasa de inflación esperada. Inicialmente, aumenta la cantidad real de dinero y caen las tasas de interés nominal, real esperada y real observada. El movimiento descendente de la tasa nominal de interés se revierte rápidamente reflejando el aumento en la tasa de inflación esperada que sigue a su vez a la tasa de inflación observada.

La trayectoria hacia el equilibrio de largo plazo puede ser oscila-

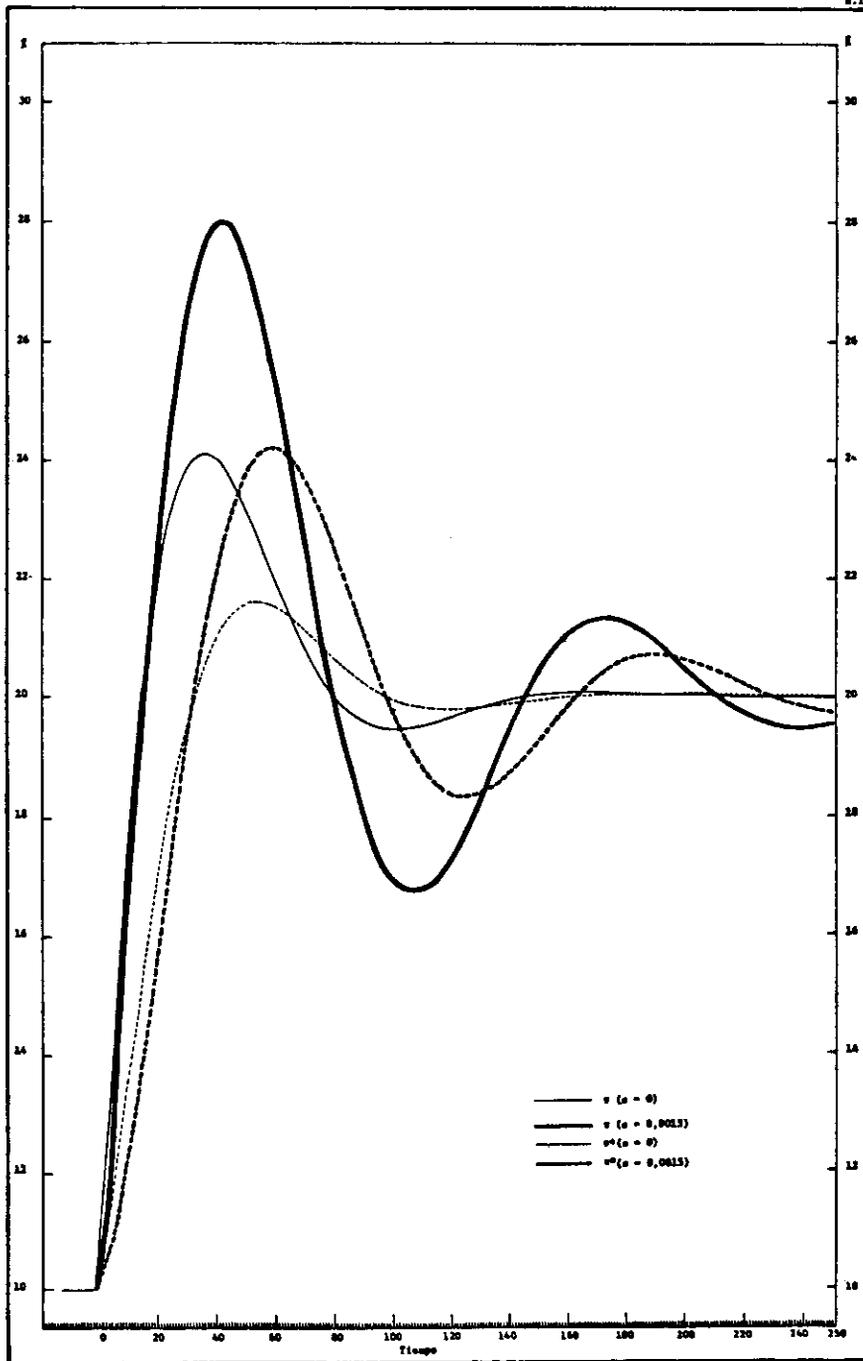
toria o no. Si no hay efectos riqueza en la demanda de bienes, las tasas reales de interés, esperada y observada, no se modificarán en el largo plazo y la tasa nominal de interés habrá aumentado como lo hizo la tasa de aumento de la cantidad de dinero y las tasas de inflación, esperada y observada.

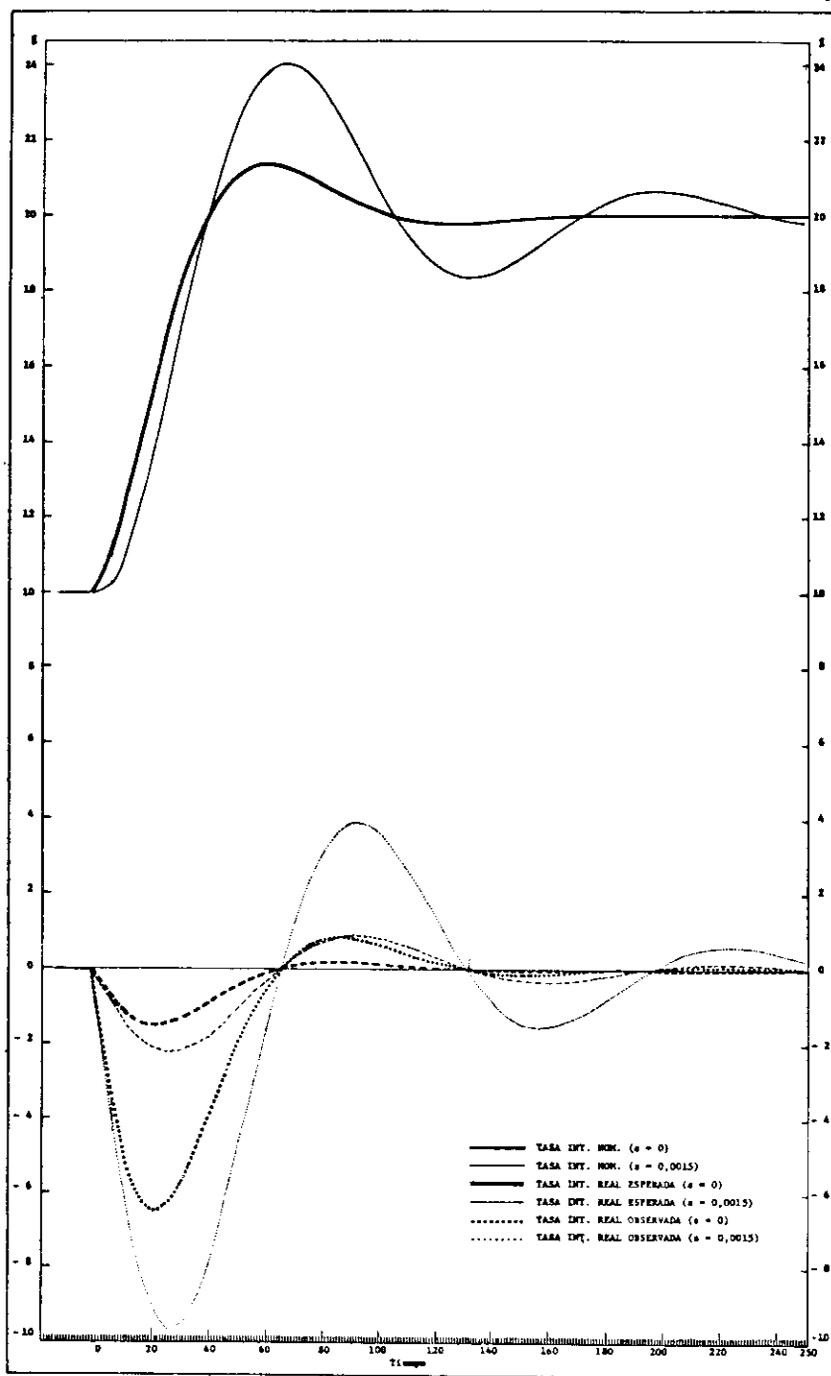
La introducción de la curva de Phillips en los modelos utilizados es la ecuación que permite modelar tanto la caída temporaria de la tasa nominal de interés como un aumento de la cantidad de dinero. Cuando el ingreso real esta fijo no se puede modelar una caída de la tasa nominal de interés con el modelo de las ecuaciones (1) (2) y (3).

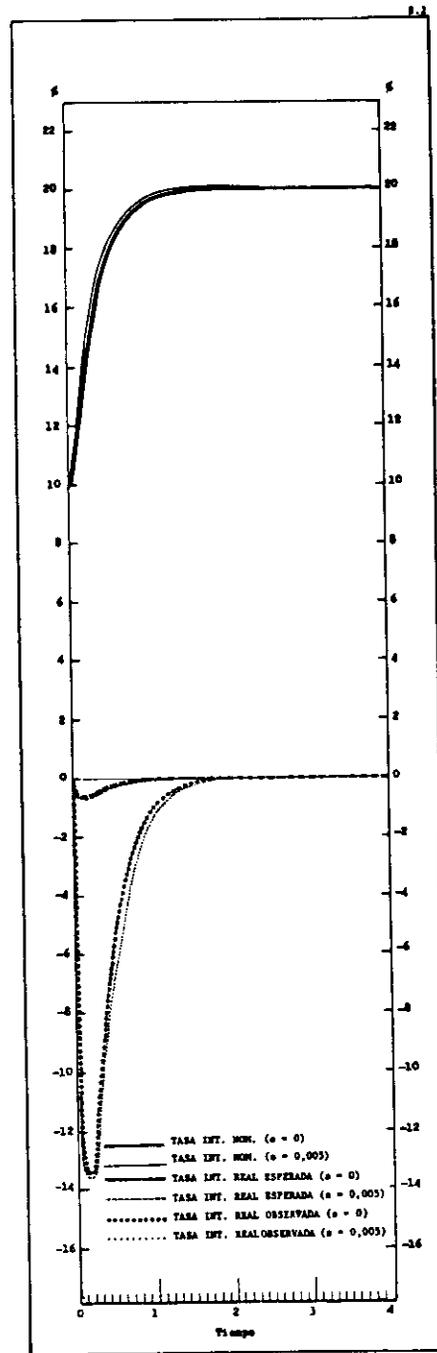
La introducción de un término adicional en la curva de Phillips, con la variación de la tasa de interés, agrega un factor más para modelar esta caída de la tasa de interés.

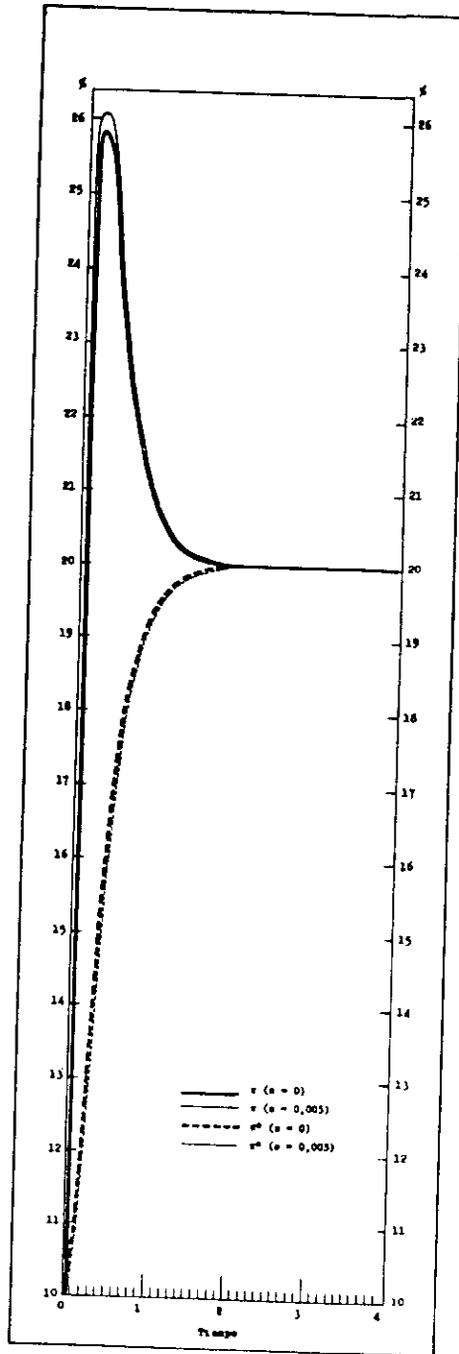
Las variaciones iniciales del ingreso son más intensas cuando se introduce un término adicional con la variación de la tasa real de interés en la curva de Phillips que cuando no se lo hace. Da, por lo tanto, un cierto apoyo a la afirmación que disminuciones significativas de la tasa de creación de dinero pueden ocasionar recesos severos.

La posibilidad de que la economía sea inestable se acentúa con la introducción del término con la tasa de interés en la curva de Phillips.









ANEXO I

1. De las ecuaciones (9) y (5) se pueden obtener las dos siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden en π y π^* :

$$D^2\pi + \left[\frac{\beta(p-q) + e}{p} \right] D\pi + \frac{\beta e}{p} \pi = \frac{e}{p} [D + \beta] \mu$$

$$D^2\pi^* + \left[\frac{\beta(p-q) + e}{p} \right] D\pi^* + \frac{\beta e}{p} \pi^* = \frac{e}{p} \beta \mu$$

La solución de estas ecuaciones esta dada por las siguientes expresiones:

a) Caso no oscilatorio

$$\pi(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \mu$$

$$\pi^*(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \mu$$

b) Caso oscilatorio

$$\pi(t) = e^{at} [A_1 \cos \theta t + A_2 \text{sen } \theta t] + \mu$$

$$\pi^*(t) = e^{at} [A_1 \cos \theta t + A_2 \text{sen } \theta t] + \mu$$

$$\text{donde } a = -\frac{1}{2} \left[\frac{\beta(p-q) + e}{p} \right]$$

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \left[\frac{\beta(p-q) + e}{p} \right]^2 - \frac{4\beta e}{p} \right|}$$

Para π , las constantes arbitrarias se determinan a partir de las siguientes condiciones:

$$\pi(t_0) = \mu_0$$

$$\dot{\pi}(t_0) = \frac{e}{p} (\mu_1 - \mu_0)$$

Para π^* , las constantes arbitrarias se determinan a partir de:

$$\pi^*(t_0) = \mu_0$$

$$\dot{\pi}^*(t_0) = 0$$

Se llega a las siguientes expresiones:

a) Caso no oscilatorio

$$\pi(t) = \frac{-(\lambda_2 + \frac{e}{p})}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (\mu_1 - \mu_0) e^{\lambda_1 t} + \frac{(\frac{e}{p} + \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (\mu_1 - \mu_0) e^{\lambda_2 t} + \mu_1$$

$$\pi^*(t) = \frac{-\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mu_1 - \mu_0) e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mu_1 - \mu_0) e^{\lambda_2 t} + \mu_1$$

b) Caso oscilatorio

$$\pi(t) = e^{at} \left[\cos \theta t - \left(\frac{\frac{e}{p} + a}{\theta} \right) \sin \theta t \right] (\mu_0 - \mu_1) + \mu_1$$

$$\pi^*(t) = e^{at} \left[\cos \theta t - \frac{a}{\theta} \sin \theta t \right] (\mu_0 - \mu_1) + \mu_1$$

Las cuatro últimas expresiones fueron utilizadas para preparar los ejemplos numéricos de la sección 9.

2. Para π , en el caso no oscilatorio, un valor extremo de la función se encuentra derivando e igualando a cero:

$$\dot{\pi}(t) = \left\{ -\frac{\lambda_1(\lambda_2 + \frac{e}{p})}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mu_1 - \mu_0) \right\} e^{\lambda_1 t} + \left\{ \frac{\lambda_2(\frac{e}{p} + \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mu_1 - \mu_0) \right\} e^{\lambda_2 t} = 0$$

Efectuando operaciones se llega a:

$$\left[-\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \frac{e}{p} \right] e^{\lambda_1 t} + \left[\lambda_2 \lambda_1 + \lambda_2 \frac{e}{p} \right] e^{\lambda_2 t} \frac{\mu_1 - \mu_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0$$

Para que esta expresión sea cero se requiere que

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = \frac{\lambda_2 \left[\lambda_1 + \frac{e}{p} \right]}{\lambda_1 \left[\lambda_2 + \frac{e}{p} \right]}$$

de donde se obtiene

$$t^* = \ln \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1 + e/p}{\lambda_2 + e/p} \right] / (\lambda_1 - \lambda_2)$$

Se tiene que:

$$\lambda_1 + \frac{e}{p} = \frac{-\beta(p-q)}{p} + \frac{e}{p} + \sqrt{\left[\frac{\beta(p-q)}{p} + e \right]^2 - 4 \frac{\beta e}{p}}$$

$$\lambda_2 + \frac{e}{p} = \frac{-\beta(p-q)}{p} + \frac{e}{p} - \sqrt{\left[\frac{\beta(p-q)}{p} + e \right]^2 - 4 \frac{\beta e}{p}}$$

Si $(E_1 B_3 - E_3 B_1) < 0$ se tiene que $p < q$; entonces, tanto el numerador como el denominador son positivos y su cociente es mayor

que la unidad. Dado que $\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1 + \frac{e}{p}}{\lambda_2 + \frac{e}{p}} \right]$ también lo es y que $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, se obtiene que $t^* > 0$.

3. En el caso oscilatorio, la amplitud de la oscilación depende del término e^{at} . Comparando la amplitud en el caso $s > 0$ con el caso $s = 0$, se tiene que

$$\frac{e^{a(s)t}}{e^{at}} > 1 \text{ si } a(s) - a > 0$$

donde $a^{(s)}$ corresponde al caso $s \neq 0$ y a al caso $s = 0$.

Se llega a:

$$a(s) - a = \frac{e}{2\rho} \left\{ \left[1 - \frac{\beta E_2 B_4}{e} \right] s \frac{[\beta E_1 B_4 + (E_1 B_3 - E_3 B_1)]}{(E_2 B_1 - E_1 B_2) \epsilon} + \left[-\frac{\beta s (E_1 B_3 - E_3 B_1)}{e} \right] \right\}$$

Bajo el supuesto que $(E_1 B_3 - E_3 B_1) < 0$, la expresión $\left[1 - \frac{\beta E_2 B_4}{e} \right]$ es positiva (por aplicación de la desigualdad (12)); ρ es positivo (por aplicación de la desigualdad (11)). Por lo tanto, $a(s) - a > 0$, si la expresión entre llaves es positiva. Para ello, es suficiente, pero no necesario, que $[\beta E_1 B_4 + (E_1 B_3 - E_3 B_1)] > 0$.

ANEXO II

TRAYECTORIA INICIAL DE LA TASA DE INTERES NOMINAL

Ejemplo S.1

Tiempo	Para $s = 0$	Para $s = 0,0015$
0	0,1	0,1
0,05	0,10007	0,09957
0,1	0,10014	0,09956
0,2	0,10028	0,09954
0,3	0,10043	0,09952
0,4	0,10058	0,09950
0,5	0,10073	0,09949
1,0	0,10152	0,09946
1,5	0,10237	0,09949
2,0	0,10327	0,09959
2,5	0,10422	0,09974
3,0	0,10521	0,09996
3,5	0,10626	0,10023

Ejemplo S.2

Tiempo	Para $s = 0$	Para $s = 0,005$
0	0,1	0,1
0,01	0,09909	0,09854
0,02	0,09862	0,09811
0,03	0,09854	0,09809
0,04	0,09879	0,09843
0,05	0,09934	0,09906
0,1	0,10524	0,10548

REFERENCIAS

- PATINKIN, D.: "Money, Interest and Prices; TOBIN, J. "A general Equilibrium Approach to Monetary Theory, en *Journal of Money, Credit and Banking*, 1969.
- TURNOVSKY, S. J.: "*Macroeconomic analysis and stabilization policy*."
- FRIEDMAN, B. M.: Optimal Expectations and the Extreme Information Assumptions of "Rational Expectations" Macromodels, *Journal of Monetary Economics*, 1979.
- FRENKEL, J. A. y RODRIGUEZ, C. A.: "Notes on Output and Expectations in the Process of Inflation, en *Weltwirtschaftliches Archiv*, 1977.
- PEEL, D. A.: Inflationary Expectations and "Self-Generating" Inflation, en *Weltwirtschaftliches Archiv*, 1977.
- PEEL, D. A. y METCALFE, J. S.: The Dynamic Properties of a Monetary Model With and Endogenous Real-Interest Rate, en *Economía Internazionale*, November 1979.
- YARROW, G. K.: The Demand for Money function and the Stability of Monetary Equilibrium, *The Economic Journal*, March 1977.
- CAVALLO, D. F.: Los efectos recesivos e inflacionarios iniciales de las políticas monetaristas de estabilización, en *Ensayos Económicos* (B. C. R. A.), Diciembre 1977.
- FAIR, R. C.: Inflation and Unemployment in a Macroeconomic Model, in *After the Phillips Curve: Persistence of High Inflation and High Unemployment*, *Conference Series*, 19 (Boston, Federal Reserve Bank, June 1978).
- HANSEN, B.: *A Survey of General Equilibrium Systems* cap. 10 (Mc-Graw-Hill, 1970).
- BRUNO, M.: Stabilization and Stagflation in a Semi-Industrialized Economy, in DORNBUSCH R. y FRENKEL, J. A., (comp.), *International Economic Policy: Theory and Evidence* (1979).
- TOBIN, J.: *Asset Accumulation and Economic Activity*, The University of Chicago Press, 1980.
- HUMPHREY, T. M.: Some Current Controversies in the Theory of Inflation, en *Readings of Inflation*, publicado por el Federal Reserve Bank of New York, 1979.
- CAVALLO, D. F.: *Stagflationary Effects of Monetary Stabilization Policies*, Tesis presentada en Harvard University, Abril 1977.
- NORDHAUS, W.: Recent Developments in Price Dynamics, en *The Econometrics of Price Determination*, publicado por el Board of Governors of the Federal Reserve System (1972).
- BUIITER, W. H.: *Temporary Equilibrium and Long-Run Equilibrium* (Garland Publishing, Inc., New York and London, 1979).
- MAY, J.: Period Analysis and continuous Analysis in Patinkin's Macroeconomic Model, *Journal of Economic Theory*, 1970.
- FOLEY, D. K.: On two Specifications of Asset Equilibrium in Macroeconomic Models, *Journal of Political Economy*, 1975.

FREEDMAN, CH.: Monetary Aggregates as Targets: Some Theoretical Aspects, *Bank of Canada, Technical Report 27, July 1981*.

SANTOMERO, A. M. y SEATER, J. J.: The inflation -Unemployment Trade- Off: A Critique of the Literature, *Journal of Economic Literature*, June 1978.

ASPECTOS DINAMICOS DE LA TASA DE INTERES EN ALGUNOS MODELOS MACROECONOMICOS SIMPLES

RESUMEN

El propósito del artículo es desarrollar un modelo macroeconómico para examinar las trayectorias de las principales variables macroeconómicas, incluyendo las tasas de interés nominal y real cuando se modifica la tasa de aumento de la cantidad de dinero. El modelo incluye ecuaciones correspondientes a los mercados de bienes, dinero y bono y la "curva de Phillips aumentada". En ésta última, y siguiendo un trabajo de Peel y Metcalfe, se ha introducido a la tasa real de interés afectando el "mark-up" entre precios y salarios.

DYNAMIC ASPECTS OF THE INTEREST RATE IN SOME SIMPLE MACROECONOMIC MODELS

SUMMARY

This article aims at developing a macroeconomic model in order to survey the main macroeconomic variables, including nominal and real interest rates when the rate of increase of money is modified.

The model includes equations for the goods, money and bond markets, and the "augmented Phillips curve". Consistent with a paper by Peel and Metcalfe, the real interest rate affecting the "mark-up" between prices and wages, has been added to the Phillips curve.