COMUNICACIONES

UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION DE INVENTARIO CON DOS DEPOSITOS

LUIS M. BOGGIA * y O.M. SORARRAIN * *

Introducción

En la mayoría de las operaciones industriales o comerciales el almacenamiento de mercaderías es de fundamental importancia, dado que, debido al mismo, parte del capital queda inmovilizado en los depósitos.

La principal dificultad radica siempre en la determinación de un *NIVEL DE ALMACENAMIENTO OPTIMO* adecuado a la demanda de lo almacenado y a la política de reabastecimiento que permita invertir "parte" de dicho capital en actividades más productivas sin resentir la satisfacción de la demanda.

Téngase en cuenta que en casi todos los casos el almacenamiento en si tiene un costo, en el caso más elemental proporcional a la cantidad de lo almacenado y que en particular, cuando se dispone de *MAS DE UN ALMACEN* el traslado de mercancías de un depósito a otro tambien tiene un costo proporcional a la mercancía trasladada. Se sabe que los parámetros que caracterizan a un almacenamiento no dependen unicamente de aspectos físicos, ingenieriles o financieros sino también de aspectos sicológicos ligados al comportamiento humano y un análisis práctico debería siempre tener en cuenta estos últimos, sin embargo y pese a ello nosotros trataremos de solucionar un problema

* Profesor de la Universidad Nacional de La PLata. Director del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la Facultad de Ciencias Económicas. Profesor de computación de la U.T.N.-

** Profesor de la Universidad Nacional de La Plata. Miembro de la carrera de Investigación de la C.I.C. de la Pcia. de Buenos Aires.

propuesto por SASIENI et al. [1] en forma puramente matemático-computacional con la aclaración de que el resultado solo tiene en cuenta una parte del problema.

El problema de los dos depósitos

Supongamos que una empresa posee para el almacenamiento de sus mercaderías dos depósitos X e Y en los que los reabastecimientos se realizan *PERIODICAMENTE* llevando las existencias (Stock) a ciertos niveles máximos prefijados S_x y S_y respectivamente.

La demanda en cada depósito sea x e y respectivamente, distribuída uniformemente en cada *PERIODO* pero regida por una función densidad de probabilidad f(x) y g(y) respectivamente.

El conocimiento de la función densidad de probabilidad de la demanda futura se puede a menudo "estimar" de "experiencias pasadas". En tales casos lo que se optimiza no son los "costos reales" sino los "costos esperados" integrando los costos reales multiplicados por la función probabilidad.

Denominemos C_a el costo de almacenamiento unitario por período y supongamos sea el mismo en ambos almacenes y fijemos la siguiente política: De producirse *CARENCIA* de mercadería en un determinado instante t_r en *UNO* de los depósitos, se solicita el traslado desde el *OTRO* del excedente, con la condición prioritaria de satisfacer integramente la propia demanda del resto del período, hasta agotar sus existencias si fuera necesario.

Obsérvese que esto supone que en el instante t_r en que uno de los depósitos agota su almacenamiento el otro está en condiciones de "estimar" la demanda para el resto del período.

Denominemos C_t al costo unitario para trasladar mercadería de un depósito al otro. Nos proponemos calcular el "costo esperado"

1 M. SASIENI, A. YASPAN and L. FRIEDMAN: *Operations Research Methods and Problems*. A. Wiley, 1959.

del almacenamiento en función de S_x y S_y conocidos los parámetros C_a y C_t supuesta conocidas f(x) y g(y). Esto permitirá luego optimizar el funcionamiento de los depósitos.

El Costo Esperado

Comenzaremos por admitir que las demandas x e y sean completamente *INDEPENDIENTES* para poder aplicar el teorema de la probabilidad compuesta. En cada período pueden ocurrir distintas situaciones según sean los valores adquiridos por x e y con relación a los valores *FIJOS* S_x y S_y.

Estas situaciones pueden ser clasificadas en 6 *CASOS* que denominaremos casos A, B, C, D, E, y F respectivamente y que corresponden a los valores adquiridos por x e y que se ven en la tabla 1 y que se grafican en el gráfico 1.

FIGURA 1

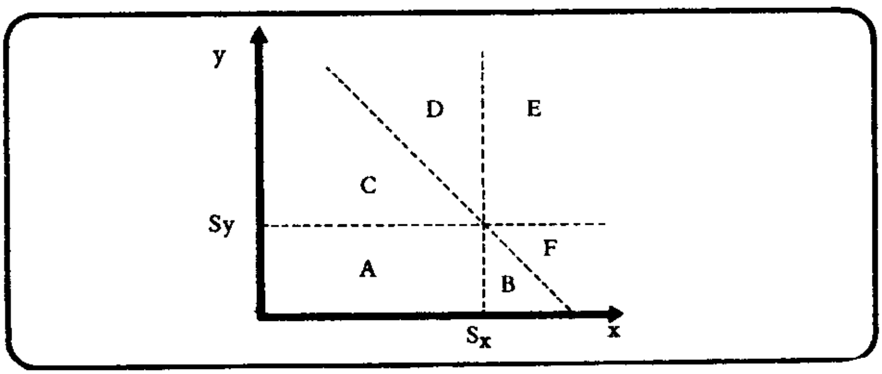


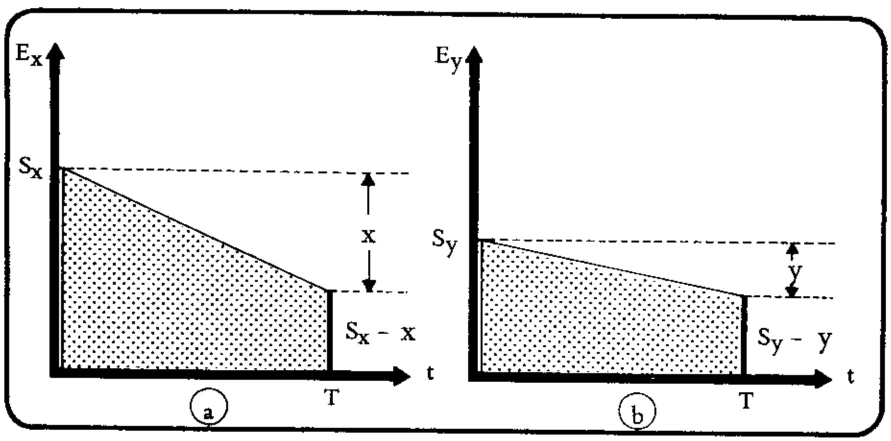
TABLA 1

CASO	x	y
A	$O \leqslant x \leqslant S_x$	$O \leqslant y \leqslant S_y$
B	$S_x \leqslant x$	$O \leqslant y \leqslant S_x + S_y - x$
C	$O \leqslant x \leqslant S_x + S_y - y$	$S_y \leqslant y$
D	$O \leqslant x \leqslant S_x$	$S_x + S_y - x \leqslant y$
E	$S_x \leqslant x$	$S_y \leqslant y$
F	$S_x + S_y - y \leqslant x$	$O \leqslant y \leqslant S_y$

Si se dan las condiciones del caso A, el inventario debería variar en la forma indicada en la fig. 2 en la que sobre el eje de las abscisas se ha marcado el tiempo correspondiente a un período como T mientras que en las ordenadas se indica la situación de inventario, es decir las existencias de inventario en el depósito X (E_x en fig. 2 a) y las existencias en el depósito Y (E_y en fig. 2 b) en función del tiempo t.

Los "costos esperados" resultarán de integrar en dicha zona A, el costo de almacenamiento multiplicado por la probabilidad compuesta f(x).g(y) de que se produzca la demanda (x,y).

FIGURA 2



El costo de almacenamiento será

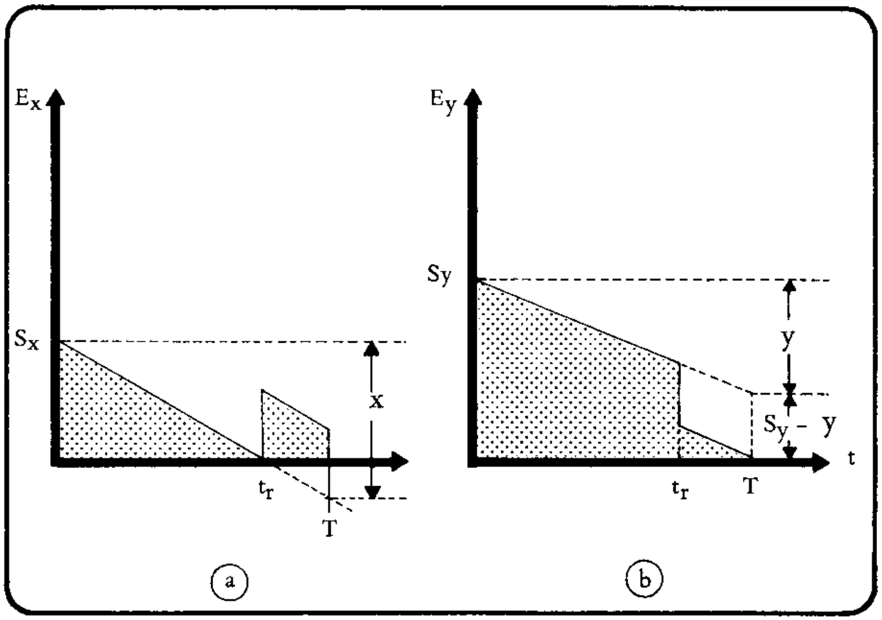
$$\frac{S_x + S_x - x}{2} \quad C_a + \frac{S_y + S_y - y}{2} \quad C_a = (S_x + S_y - \frac{x+y}{2}) \, C_a = C_a^A$$

y el "costo esperado" en la zona A

$$F_A \; (S_x, S_y) = \int_o^{S_x} \int_o^{S_y} C_a^A \; f(x) \, . \, g(y) \, dx \, dy \qquad 1$$

Si la situación de demanda correspondiera al caso B, los inventarios variarán en la forma indicada en la fig. 3 a y b y en el instante de reposición t_r se trasladaría el sobrante en el depósito Y (igual a S_y - y) hacia el depósito X, sin analizar si dicho traslado es mayor, igual o menor que la demanda en el mismo. El costo de almacenamiento se ha ahora modificado por el traslado de la mercadería S_y - y desde Y hacia

FIGURA 3



X y la integración se debe hacer sobre la zona B, siendo por ello el "costo esperado" en la zona B

$$F_B (S_x, S_y) = \int_{x = S_x}^{x = S_x + S_y} \int_{y = o}^{y = S_x + S_y - x} (C_a^A + (S_y - y) C_t) \, f(x) \, g(y) \, dx \, dy \qquad 2$$

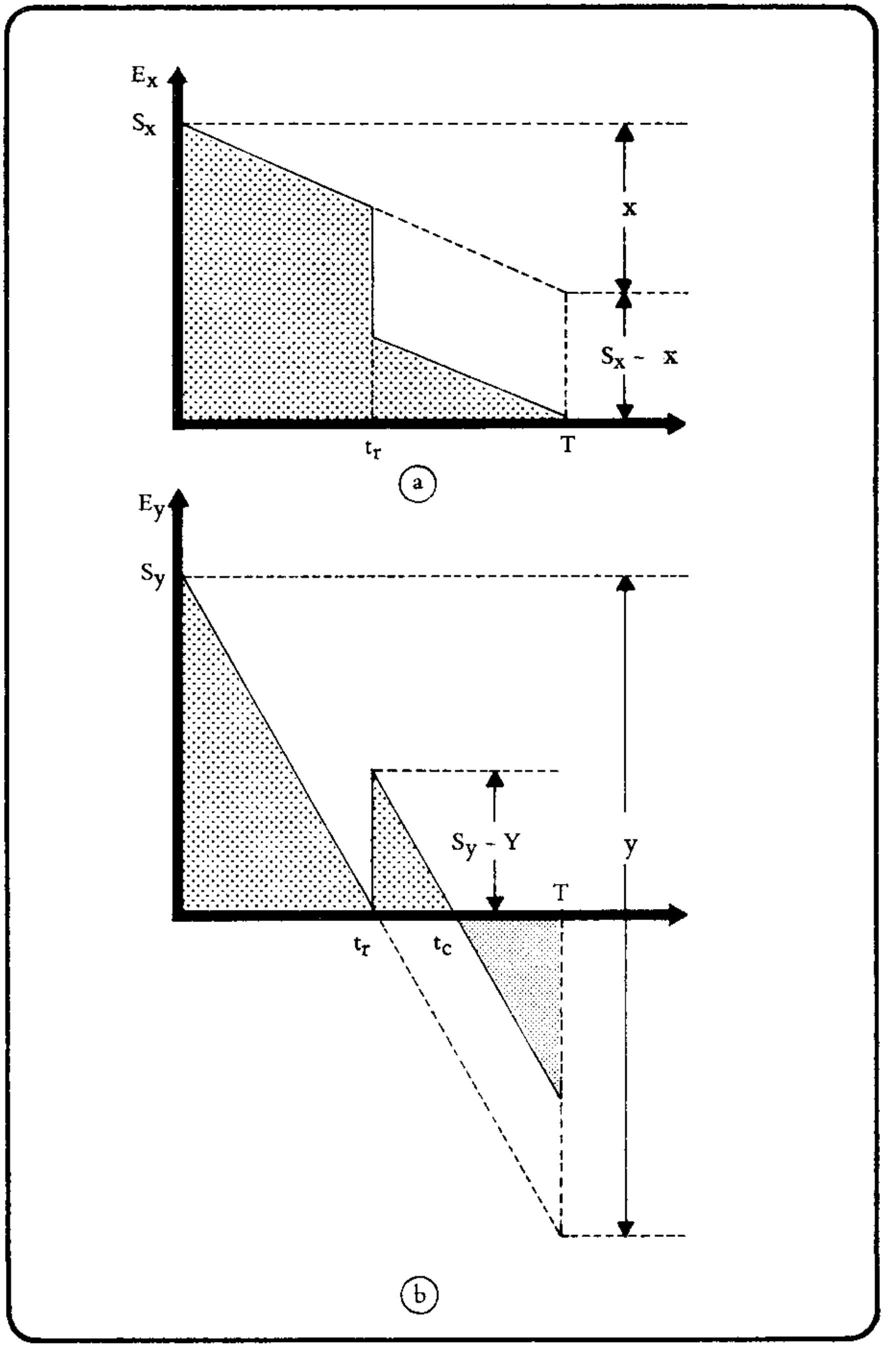
Si las demandas correspondieran a la situación denominada caso C, los razonamientos son idénticos a los de la zona B, solo que habría que intercambiar la variable x con la variable y, obteniéndose para el "costo esperado" en la zona C

$$F_c (S_x, S_y) = \int_{y = S_y}^{y = S_y + S_x} \int_{x = o}^{x = S_x + S_y - y} (C_a^A + (S_x - x) C_t) \, f(x) \, . \, g(y) \, d_x \, d_y \qquad 3$$

Si ocurriera la situación denominada caso D nos encontraríamos con un problema insalvable, la demanda TOTAL es mayor que la suma de los inventarios S_x y S_y y por lo tanto, si bien el deposito X podrá satisfacer la demanda x y eventualmente podrá trasladar sus excedentes al deposito Y, este no podrá satisfacer la demanda y aparecerá UN NUEVO PARAMETRO, la pérdida o "costo por falta de inventario" que supondremos proporcional a dicha carencia introduciendo para ello un C_f, unitario, por falta de existencias.

El comportamiento de los depositos X e Y se observa en el esquema de la fig. 4.

FIGURA 4



E_x
S_x
x
$S_x - x$
t_r
T
a
E_y
S_y
$S_y - Y$
y
T
t_r
t_c
b

Efectivamente en ella queda en evidencia que en el instante t_r en que se requiere reposición desde el otro depósito, la cantidad trasladada S_x - x no es suficiente para abastecer la demanda en Y, produciéndose en el instante t_f la falta total de mercadería, imposible de reabastecer pues el depósito X tiene SOLO existencias para satisfacer su demanda (estimada en base a la "uniformidad" de la misma). A partir de dicho instante t_f aparecerá el costo por "falta de inventario" que en la forma más simple puede suponerse proporcional a la cantidad perdida de entregar.

Por lo tanto el costo total estará formado por cuatro costos parciales:

C_1 costo del almacenamiento en el depósito X
C_2 costo del almacenamiento en el depósito Y (solo hasta el instante t_f).
C_3 costo del traslado de S_x - x desde X hacia Y.
C_4 costo por falta de inventario.

A los efectos del cálculo conviene suponer que el almacenamiento de la cantidad S_x - x desde el comienzo del ciclo hasta el instante t_r se hace en el depósito Y en lugar de en el depósito X, en tal caso tendremos:

$$C_1 = C_a \cdot \frac{x}{2}$$

$$C_2 = C_a \cdot \frac{S_x + S_y - x}{2} \cdot \frac{t_f}{T}$$

pero por semejanza de triángulos

$$\frac{t_f}{T} = \frac{S_x + S_y - x}{y}$$

y por lo tanto

$$C_2 = C_a \, \frac{(S_x + S_y - x)^2}{2y}$$

$$C_3 = C_t \, (S_x - x)$$

$$C_4 = C_f \, [\, y - (\, S_x + S_y - x) \,]$$

debiendose calcular, para tener el costo esperado en la zona D

$$E_D \, (S_x, S_y) = \int_{x=o}^{x=S_x} \int_{y=S_x+S_y-x}^{y=+\infty} (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$$
$$f(x) \, . \, g(y) \, d_x \, d_y \qquad 4$$

Para simplificar la escritura podemos introducir

$S = S_x + S_y$		como inventario o stock total
$d = x + y$		como demanda total
$D = d - S$		

El costo por falta de inventario se reduce a

$$C_4 = C f \, . \, D$$

y en tal caso podemos poner que:

$$F_D \, (S_x, S_y) = \int_{x=o}^{x=S_x} \int_{y=S-x}^{y=+\infty} [\, C_a \, (\frac{x}{2} + \frac{(S-x)^2}{2y}) +$$
$$+ \; C_t \, (S_x - x) + C_f \, D \,] \, f(x) . \, g(y) \, d_x \, d_y \qquad 5$$

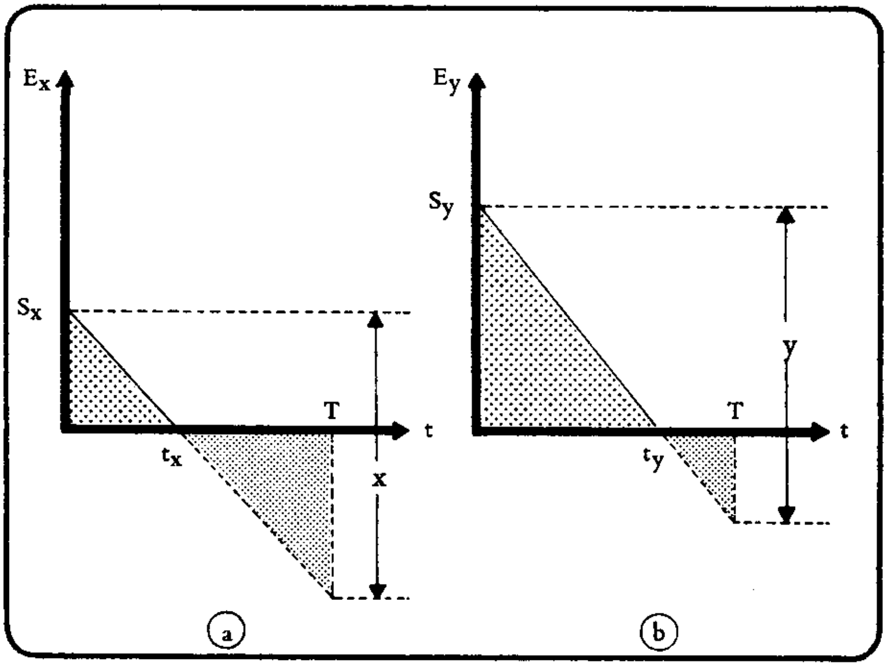
Cuando la situación de demanda sea la correspondiente al caso F, el planteo resultará completamente análogo pero SIMETRICO. El valor del "costo esperado" $F_F \, (S_x, S_y)$ se obtendrá intercambiando las variables x e y en la expresión anterior y por lo tanto:

$$F_F(S_x, S_y) = \int_{y=o}^{y=S_y} \int_{x=S-y}^{x=+\infty} [\, C_a \left(\frac{y}{2} + \frac{(S-y)^2}{2x} \right) + C_t (S_y - y) +$$

$$+ C_f D \,]\, f(x) \cdot g(y)\, d_x\, d_y \qquad 6$$

Para terminar solo nos faltaría evaluar el costo esperado en el último caso, es decir en el caso E. En este caso (ver fig. 5 a y b) ambos depósitos llegarán a quedarse sin inventario. El depósito X lo hará en el instante t_x y el depósito Y en el instante t_y, pero cualquiera sea el menor de ellos, no se producirá traslado de mercaderías, pues el OTRO manifestará no estar en condiciones de satisfacer su propia demanda " estimada". Solo habrá entonces costos de almacenamiento hasta el instante en que se produzca la falta de inventario y luego el costo por falta de dicha mercadería.

FIGURA 5



En el depósito X se producirá un costo C_x suma del debido al almacenamiento, más el debido a la falta de inventario

$$C_x = C_a \frac{S_x}{2} \frac{t_x}{T} + C_f (x - S_x) = C_a \frac{S_x^2}{2x} + C_f (x - S_x)$$

y análogamente en el depósito Y

$$C_y = C_a \frac{S_y^2}{2y} + C_f (y - S_y)$$

llegándose al costo total

$$C_T = C_x + C_y = C_a \left(\frac{S_x^2}{2x} + \frac{S_y^2}{2y}\right) + C_f D$$

y por lo tanto el costo esperado en la zona E será:

$$F_E (S_x, S_y) = \int_{x = S_x}^{x = +\infty} \int_{y = S_y}^{y = +\infty} \left[C_a \left(\frac{S_x^2}{2x} + \frac{S_y^2}{2y}\right) + C_f D \right] f(x) \cdot g(y)\, d_x\, d_y \qquad 7$$

Evidentemente la función que expresa el "costo esperado" para los valores dados de S_x y S_y en función de los parámetros C_a, C_t y C_f resulta de suma de las 6 integrales (1), (2), (3), (5), (6) y (7).

El problema matemático queda ya teóricamente resuelto si se plantea el minimizar la función costo, definida mediante las integrales vistas, pero en la práctica resulta casi imposible de realizar analíticamente.

El uso de computadoras digitales simplifica el problema si se admite un estudio de la función costo, en forma discreta, en vez de continua; para ello se procede de la siguiente manera:

1o. Se debe elegir un espaciado o malla de los inventarios, es decir se establece "a priori" cual es el incremento de stock mínimo, que para el particular problema, tiene sentido (puede ser una tonelada, un camión, un litro, una docena, etc.).

2o. Debe estimarse de acuerdo a datos estadísticos una función probabilidad f(x) y una g(y) como función demanda probable, que por supuesto en este caso puede ser reemplazada por una función a escalones (histograma) y con datos espaciados segun el incremento mínimo fijado en la etapa anterior (o quizás múltiplos de estos).

3o. Se reemplaza el cálculo de las integrales (1), (2), (3), (5), (6) y (7) por una evaluación aproximada mediante simples sumatorias (teniendo en cuenta que f(x) y g(y) son ahora valores discretos) para valores de C_1 C_2 C_3 y C_4 tabulados para los valores discretos de x, para valores de C_a^A tabulados para la malla discreta de x e y y extendida unicamente a la zona en que f(x).g(y) tenga valores significativos (no próximos a cero).

4o. Se hace una tabla a doble entrada para distintos valores de S_x y S_y en la zona significativa, con el resultado de la evaluación de la integral aproximada, de la cual, por observación directa, se verá cual es la Zona de Stocks óptima, que corresponderá a la zona en que la función "costo esperado" se hace mínima.

BIBLIOGRAFIA

SASIENI, M., YASPAN A. and FRIEDMAN L., *Operations Research Methods and Problems.* A Wiley 1959.

ARROW K., KARLING S. and H. SCARF, *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production,* Standford University Press 1958.

WHITIN T.M., *The theory of inventory Management,* Princeton Un. Press 1957.

GODDARD L.S., *Mathematical Techniques of Operational Research,* Pergamon Press 1963.