

COMPLEMENTARIEDAD, EXENCIONES Y TRIBUTACIÓN ÓPTIMA

OSVALDO H. SCHENONE
CARLOS A. RODRIGUEZ
ROLF R. MANTEL

Resumen

El debate entre impuestos directos versus impuestos indirectos se resolvió en la década de los años cincuenta, haciendo notar que la existencia de bienes no susceptibles de ser gravados destruye la presunción teórica que los impuestos directos son preferibles, desde el punto de vista de la eficiencia y el bienestar, a los impuestos indirectos. Como una consecuencia de este debate se estudió la estructura tributaria óptima cuando ciertos bienes no son gravables. Utilizando un modelo con dos bienes gravables y uno que no es susceptible de ser gravado, Corlett y Hague en 1953 y Meade en 1955 demostraron que la estructura tributaria óptima consiste en gravar más al bien más complementario con el no gravable y menos al más sustituto con ese bien.

Este trabajo demuestra que este resultado no es necesariamente correcto si los bienes gravables son más de dos, y en tal caso, la estructura tributaria óptima depende de las relaciones de complementariedad y sustituibilidad entre los bienes susceptibles de ser gravados.

1. Introducción

El debate que tuvo lugar a principios de la década de los años cincuenta en la literatura de finanzas públicas, acerca de la superioridad de los impuestos directos (típicamente, el impuesto al ingreso) sobre los impuestos indirectos, fue resuelto casi simultáneamente por, al menos, dos autores: Little y Samuelson. El primero demostró en 1951 que la inevitable existencia de bienes no susceptibles de ser gravados (por ejemplo, el ocio) destruye la presunción teórica que el impuesto al ingreso (equivalente a un impuesto a tasa uniforme sobre todos los bienes susceptibles de ser gravados) sea superior,

desde el punto de vista del bienestar y la eficiencia, a un sistema de impuestos que grave con tasas, posiblemente no uniformes, a un conjunto (no necesariamente a la totalidad) de los bienes gravables.

En el mismo año Samuelson demostró que las tasas óptimas (es decir las que generan el mínimo costo de bienestar) de impuestos sobre los bienes, que generan una recaudación dada, serán aquellas que induzcan disminuciones porcentuales idénticas en la cantidad demandada (si se considera sólo el efecto sustitución) de todos los bienes. Este resultado confirma el obtenido por Ramsey en 1927, quien anticipó el resultado que la uniformidad de las tasas de impuestos a los bienes no era necesariamente la solución óptima para obtener una recaudación dada.

En 1953 Corlett y Hague, y en 1955 Meade, continúan el análisis de Little y obtienen el resultado que en un modelo con dos bienes susceptibles de ser gravados y un tercer bien no gravable (ocio), las tasas óptimas de impuestos consisten en gravar más el bien complementario con el ocio y menos al bien sustituto con el mismo.

Por supuesto, la validez de este resultado se extiende al caso en que los bienes no gravables son más de uno, sujeto a la condición de que se produzcan a costo marginal constante, ya que en esas condiciones la imposición de gravámenes a los restantes bienes dejará inalterado el precio de cada bien no gravado en relación al de los otros bienes no gravados. Consecuentemente, los bienes no gravables constituyen un bien compuesto, en el sentido de Hicks, y pueden tratarse como un único bien, al cual podemos llamar "ocio" para abreviar.

Este trabajo demostrará que el resultado de Corlett y Hague y de Meade no es válido, en general, cuando los bienes susceptibles de ser gravados son más de dos. Esto no significa que el resultado encontrado por estos autores sea imposible cuando se gravan más de dos bienes. Simplemente en ese caso, dependiendo de los valores de las elasticidades precio cruzadas de todos los bienes, puede ser óptimo gravar más a los bienes menos complementarios (o más sustitutos) del ocio contrariamente al resultado de Corlett y Hague y de Meade. En 1975 Dixit indicó que el resultado de Corlett y Hague y de Meade parecía no cumplirse cuando se pueden gravar más de dos bienes, y este trabajo confirma esta conjetura de Dixit.

2. El modelo

Considere una economía perfectamente competitiva con n bienes, de los cuales $k \leq n$ son susceptibles de ser gravados, producidos bajo condiciones de costos de oportunidad constantes. Existe una autoridad fiscal que recauda un monto fijo en impuestos, cualquiera sea el sistema impositivo adoptado. Consecuentemente, al comparar sistemas impositivos alternativos sólo se deben considerar los efectos sustitución sobre las cantidades demandadas de los bienes, ya que el efecto ingreso de adoptar un sistema impositivo en vez de cualquier otro es idénticamente cero.

Los consumidores maximizan una función de utilidad $u(x)$ del vector x de n coordenadas, dada su restricción de presupuesto. De este proceso se obtiene una función de utilidad indirecta $v(q, m) \equiv \text{Max} \{u(x) / q \cdot x \leq m\}$,

donde $q = p + t$ es el vector columna de precios brutos (que a su vez, es igual a la suma del vector de precios netos, p , más el vector de impuestos t), y m representa el ingreso disponible. Sea $h(q, m)$ el vector de cantidades demandadas en función de los precios brutos y del ingreso disponible. Entonces la recaudación fiscal constante para cualquier vector de impuestos que se adopte, R , se puede escribir como $t^* h(q, m) = R$, donde el asterisco indica la transposición del vector señalado. El objetivo de la imposición óptima es encontrar el vector de impuestos que maximiza la función de utilidad indirecta $v(q, m)$ sujeto a la restricción que la recaudación fiscal sea igual a R :

$$\text{Max } v(q, m)$$

$$t^*$$

sujeto a:

$$t^* h(q, m) = R$$

$$q = p + t$$

A fin de solucionar este problema construimos el Lagrangeano:

$$L = v + \mu(t^* h - R),$$

donde μ es el multiplicador de Lagrange que será igual, en equilibrio, al costo marginal de la recaudación en términos de utilidad. Las condiciones de máximo son:

$$1) \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)^* = 0 = \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^* + \mu \left(h^* + t^* \frac{\partial h}{\partial q} \right)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 = t^* h - R$$

Se puede demostrar¹ que se cumple la identidad de Roy $\left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^* = -\lambda h^*$,

donde λ es la utilidad marginal del ingreso, y consecuentemente de (1) se obtiene:

$$2) 0 = (\mu - \lambda) h^* + \mu t^* \frac{\partial h}{\partial q}$$

Pero dado que las cantidades demandadas óptimas satisfacen la restricción presupuestaria, $q^* h = m$, y por lo tanto la derivada de esta expresión con respecto a q^* da $h^* + q^* \frac{\partial h}{\partial q} = 0$, reemplazando en (2) se obtiene:

$$3) 0 = [(\lambda - \mu) q^* + \mu t^*] \frac{\partial h}{\partial q}$$

Pero, por la ecuación de Slutsky se puede escribir:

$$4) 0 = [(\lambda - \mu) q^* + \mu t^*] \left[S - \left(\frac{\partial h}{\partial m} \right) h^* \right],$$

donde S es la matriz de Slutsky cuyo término genérico es el cambio en la cantidad demandada del i-ésimo bien ante cambios en el j-ésimo precio manteniendo constante el nivel de utilidad. En virtud de las conocidas propiedades

$q^* S = 0$ y $q^* \frac{\partial h}{\partial m} = 1$, se puede reescribir la ecuación (4) como:

¹ Ver, por ejemplo, Varian H. R., Microeconomic Analysis (Norton, New York, 1978). Una demostración muy formal puede verse en Diewert, W. E. "Duality Approaches to Microeconomic Theory", pág. 558, Vol. II, en Arrow, K. e Intriligator, M. (eds.) Handbook of Mathematical Economics (North Holland, Amsterdam, 1979).

$$5) t^* S = \left[\frac{\lambda - \mu}{\mu} + t^* \frac{\partial h}{\partial m} \right] h^*$$

La expresión entre corchetes en el lado derecho de la igualdad (5) es un escalar², que por brevedad se denominará θ

$$-1 + \frac{\lambda}{\mu} + t^* \frac{\partial h}{\partial m} = \theta$$

Debido a la simetría de la matriz de Slutsky se puede escribir la ecuación (5) de la siguiente manera:

$$6) St = \theta h$$

En esta ecuación se puede notar que $\theta \leq 0$ ya que $t^* St = \theta^* h$, es decir $t^* St = \theta R$ y dado que la matriz de Slutsky es negativa semidefinida, y la recaudación fiscal, R, positiva, entonces θ no puede ser positivo.

Sean \hat{h} y \hat{q} matrices diagonales cuyos elementos son los elementos de los vectores h y q respectivamente. Entonces (6) puede escribirse como:

$$7) \hat{h}^{-1} S \hat{q} \hat{q}^{-1} t = \theta e,$$

donde e indica un vector cuyos elementos son todos iguales a 1.

El vector $\hat{q}^{-1} t$ representa el vector de impuestos expresados como porcentaje del precio bruto y se denomina T.

$$8) T = \hat{q}^{-1} t.$$

Reemplazando (8) en (7), y notando que la matriz $\hat{h}^{-1} S \hat{q}$ es, por definición, la matriz de elasticidades compensadas de demanda, que se denominará η , podemos escribir (7) como:

$$9) \eta T = \theta e.$$

Por lo tanto, el vector de impuestos T que satisface la ecuación (9) es la estructura óptima de impuestos para obtener una recaudación dada. Nótese que éste es el resultado obtenido por Samuelson y mencionado antes ya que, precisamente, la ecuación (9) indica que los impuestos óptimos serán los que induzcan disminuciones porcentuales idénticas para todos los bienes e iguales a θ .

² Esta es la misma expresión que obtienen Stiglitz y Atkinson, Lectures on Public Economics, Cap. 12, Sección 2.

3. Impuestos uniformes a todos los bienes son óptimos.

La matriz η es de orden $n \times n$ y es una matriz singular, ya que $\sum_j \eta_{ij} = 0$ por la homogeneidad de grado cero en precios relativos de las demandas compensadas; es decir:

$$10) \eta e = 0$$

Pero dado que la matriz η incluye las elasticidades precio de todos los bienes en la economía, se puede escribir:

$$\sum_i \alpha_i \eta_{ij} = 0, \text{ o sea, } \alpha^* \eta = 0$$

donde α_i es la participación del bien i -ésimo en el gasto total. Premultiplicando la ecuación (9) por el vector α^* , de participaciones en el gasto, y notando que $\alpha^* e = 1$ se obtiene:

$$0 = \alpha^* \eta T = \theta \alpha^* e = \theta,$$

de donde $\theta = 0$ y, consecuentemente la ecuación (9) se puede escribir como el sistema homogéneo³:

$$11) \eta T = 0.$$

Multiplicando la igualdad (10) por un escalar X , da:

$$X \eta e = 0,$$

de donde $T = Xe$ es una solución de la ecuación (11). Es decir, impuestos uniformes de $100X\%$ sobre el precio bruto satisfacen las condiciones necesarias para un óptimo cuando todos los bienes son gravados.

La siguiente cadena de relaciones nos demuestra que tales impuestos uniformes son en efecto, óptimos.

Recordando que el vector de impuestos t es la diferencia entre los precios al consumidor q y los precios netos p , y teniendo en cuenta la restricción presupuestaria del consumidor, la restricción de recaudación puede escribirse como:

³ El significado intuitivo de $\theta = 0$ para el caso en que todos los bienes son gravables es claro: En tal caso la estructura óptima de impuestos consiste en generar precios relativos brutos idénticos a los precios relativos que prevalecerían sin impuestos; es decir, no producir efecto sustitución alguno en las demandas de cada uno de los bienes y, consecuentemente la disminución de las cantidades relativas, θ , debe ser nula.

$$p * h(q, m) \leq m - R.$$

De modo que nuestro problema queda: $Max u(x)$, sujeto a $px \leq m - R$, $x = h(q, m)$. Este máximo no puede exceder el máximo de $u(x)$, sujeto sólo a $px \leq m - R$, el cual, por definición, es la función de utilidad indirecta $v(p, m - R)$. Esta, a su vez, es homogénea de grado cero y entonces $v(p, m - R) = v\left(\frac{m}{m - R} p, m\right)$. Llamando $q = \frac{m}{m - R} p$, el vector de demandas $h(q, m)$ satisface la restricción:

$$ph(q, m) = \frac{m - R}{m} q h(q, m) = m - R,$$

así que el máximo es, de hecho, alcanzado por el valor elegido de $q = \frac{m}{m - R} p$, lo cual demuestra que los impuestos óptimos son proporcionales, con tasa uniforme.

$$X = \frac{m}{m - R} - 1 = \frac{R}{m - R}.$$

Si la función de utilidad tiene derivada la solución óptima será única. En otros casos pueden existir otras soluciones, aunque la uniforme siempre será óptima.

Ejemplo: en el caso extremo de complementos perfectos existe un vector positivo a tal que $v(q, m) = m / aq$, $h(q, m) = \frac{m}{aq} a$. El problema se reduce a:

$$Max. m / aq$$

sujeto a:

$$map / aq = m - R.$$

Por lo tanto cualquier vector positivo q que satisfaga la restricción:

$$aq = \frac{m}{m - R} ap,$$

es una solución óptima. Nótese que en particular esto incluye el vector

$$q = \frac{m}{m - R} p.$$

4. Estructura impositiva óptima cuando hay bienes exentos.

Este es el caso originalmente tratado por Corlett y Hague y por Meade, quienes consideraron la existencia de dos bienes gravables y un bien exento. La existencia de un solo bien exento no es una limitación demasiado seria ya que sus resultados conservan su validez aunque el número de bienes exentos aumente, en la medida que ellos se puedan agrupar en un bien compuesto de Hicks, y se los pueda entonces considerar como un solo bien. En este trabajo se adopta el supuesto de costos medios (y marginales) constantes, por lo cual el precio de cualquier bien exento respecto de otro bien en la misma categoría no cambia, cualquiera sea la estructura impositiva aplicada a los bienes gravables. Consecuentemente, los bienes exentos constituyen un bien compuesto de Hicks. Los bienes gravables, por otra parte, serán k bienes, $k < n$, y como caso particular se verificará el resultado de Corlett y Hague y de Meade cuando $k=2$. Dado que sólo k bienes son susceptibles de ser gravados, definiremos $\tilde{\eta}$, una submatriz de orden $k \times k$ de la matriz η que incluirá las elasticidades precio (compensadas) de demanda por los k bienes gravables. En general, la matriz $\tilde{\eta}$ será no singular. Asimismo, definiremos σ , un vector de elasticidades cruzadas (compensadas) de demanda de cada bien gravado respecto del bien compuesto exento, el cual se denominará ocio para abreviar. Así pues, en el caso que nos ocupa ahora, las ecuaciones (9) y (10) adoptan respectivamente las formas:

$$12) \quad \tilde{\eta} T = \theta e,$$

$$13) \quad \tilde{\eta} e = -\sigma$$

Dado que, en general, $\tilde{\eta}$ es no singular se puede definir $\Delta \neq 0$ como el determinante de $\tilde{\eta}$ y escribir, aplicando la regla de Cramer a la ecuación (12):

$$14) \quad T_1 = \frac{-\theta}{\Delta} \det[-e, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_k],$$

donde T_1 es el primer elemento del vector de impuestos óptimos y $\tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_k$ son las columnas de la matriz $\tilde{\eta}$, desde la segunda hasta la k -ésima. En virtud de la ecuación (13) se puede escribir:

$$\tilde{\eta}_k = -\sigma - \tilde{\eta}_1 - \dots - \eta_{k-1}.$$

Dada esta relación y utilizando la propiedad que un determinante no varía si a una columna le sumamos otra columna la ecuación (14) se puede

escribir:

$$T_1 = \frac{-\theta}{\Delta} \det[-e, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k-1}, -\sigma - \tilde{\eta}_1] = \frac{-\theta}{\Delta} \det[e, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k-1}, \sigma + \tilde{\eta}_1].$$

Análogamente,

$$T_k = \frac{-\theta}{\Delta} \det[\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k-1}, -e] = \frac{-\theta}{\Delta} \det[e, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k-1}, \tilde{\eta}_1].$$

De donde, por ser el determinante una función lineal de una de sus columnas,

$$15) T_1 - T_k = \frac{-\theta}{\Delta} \det[e, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k-1}, \sigma].$$

Sin pérdida de generalidad, se pueden enumerar los bienes gravables en orden creciente de sustituibilidad con el ocio. Así, $\sigma_1 < \sigma_2 \dots < \sigma_k$, donde el bien 1 es el más complementario con el ocio y el bien k el más sustituto. De esta manera, el resultado de Corlett y Hague y de Meade significa $T_1 - T_k > 0$.

En particular, para $k=2$, se confirma que:

$$T_1 - T_2 = -\theta \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & \sigma_1 \\ 1 & \sigma_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{11} & \tilde{\eta}_{12} \\ \tilde{\eta}_{21} & \tilde{\eta}_{22} \end{bmatrix}} = \frac{-\theta(\sigma_2 - \sigma_1)}{\tilde{\eta}_{11}\tilde{\eta}_{22} - \tilde{\eta}_{12}\tilde{\eta}_{21}} > 0$$

En general, sin embargo, no se cumple que la estructura impositiva óptima implica que el bien más complementario (o menos sustituto) con el ocio deba ser necesariamente más gravado. Si en el determinante en la ecuación (15) se resta de la última columna la primera multiplicada por σ_1 , se obtiene:

$$16) T_1 - T_k = \frac{-\theta}{\Delta} \det[e, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k-1}, \sigma - \sigma_1 e].$$

Resolviendo el determinante indicado en (16) se obtiene:

$$17) (T_1 - T_k) \frac{\Delta}{-\theta} = (-1)^k (\sigma_2 - \sigma_1) M_{12}^{1k} + \sum_{i=1}^2 (-1)^{k+i} (\sigma_3 - \sigma_i) M_{i3}^{1k} \\ + \sum_{i=1}^3 (-1)^{k+i+1} (\sigma_4 - \sigma_i) M_{i4}^{1k} + \dots + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} (\sigma_k - \sigma_i) M_{ik}^{1k}$$

donde M_{ij}^{1k} representa el menor de la matriz $\tilde{\eta}$ que se obtiene de eliminar las columnas primera y k-ésima y las filas i-ésima y j-ésima. Nótese que el lado derecho de la ecuación (17) es un polinomio en las diferencias $(\sigma_i - \sigma_j)$ para $i > j$, cuyos coeficientes son menores de orden $k - 2$ de la matriz η . Si bien $\sigma_i - \sigma_j > 0$ para $i > j$, los coeficientes de $(\sigma_i - \sigma_j)$ en (17) tienen signo que depende de los valores numéricos de $\tilde{\eta}_{ij}$ para $i, j < k$.

La ecuación (17) permite apreciar que si todos los bienes gravables tienen la misma relación con el ocio, y por cierto ésta debe ser de sustituibilidad, entonces $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n$ y la estructura impositiva óptima requiere impuestos iguales a todos los bienes gravables: $T_1 = T_2 = \dots = T_n$. En general, sin embargo, cuando algunos bienes gravables son complementarios del ocio, o cuando siendo todos sustitutos difieren en sus grados de sustituibilidad, la estructura impositiva óptima no será uniforme ni consistirá necesariamente en gravar más a los bienes más complementarios con el ocio, contrariamente al resultado para el caso $k=2$.

El caso más simple donde se advierte que la estructura impositiva óptima no consiste necesariamente en gravar más a los bienes más complementarios del ocio cuando $k=3$. En tal caso la ecuación (17), para $k=3$, establece que:

$$18) (T_1 - T_3) \frac{\Delta}{-\theta} = -(\sigma_2 - \sigma_1) \tilde{\eta}_{32} + (\sigma_3 - \sigma_1) \tilde{\eta}_{22} - (\sigma_3 - \sigma_2) \tilde{\eta}_{12}$$

y

$$19) (T_2 - T_3) \frac{\Delta}{-\theta} = \tilde{\eta}_{31}(\sigma_2 - \sigma_1) - \tilde{\eta}_{21}(\sigma_3 - \sigma_1) + \tilde{\eta}_{11}(\sigma_3 - \sigma_2).$$

Consecuentemente, restando (19) de (18) se obtiene:

$$20) (T_1 - T_2) \frac{\Delta}{-\theta} = \tilde{\eta}_{33}(\sigma_2 - \sigma_1) - \tilde{\eta}_{23}(\sigma_3 - \sigma_1) + \tilde{\eta}_{13}(\sigma_3 - \sigma_2).$$

Sabemos que $\theta < 0$, que $(\sigma_2 - \sigma_1)$, $(\sigma_3 - \sigma_1)$ y $(\sigma_3 - \sigma_2)$ son todos positivos y que $\Delta < 0$ cuando $k=3$, pero en general será incorrecto afirmar que $(T_j - T_i) > 0$ para $j < i$. Por cierto, si los bienes 1 y 3 son complementarios entre sí y sustitutos del bien 2 este resultado se cumplirá, pero ése sería un caso ciertamente especial.

Por el contrario, se pueden construir ejemplos en que la optimalidad requiere: 1) que la tasa más alta se aplique al mejor sustituto del ocio; o 2) que la tasa más baja se aplique al mejor complemento con el ocio. Considere este ejemplo de 1):

$$\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} -4.51 & 1.43 & -2.17 \\ 87.85 & -179.89 & 103.00 \\ -5.94 & 4.58 & -4.11 \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} 5.25 \\ -10.96 \\ 5.46 \end{bmatrix}$$

Los impuestos óptimos a los bienes 1, 2 y 3 para este caso son proporcionales a 60%, 88% y 100%, respectivamente. Adviértase que la tasa más alta recae sobre el bien 3, el que tiene mayor σ ; es decir, el mejor sustituto del ocio.

Como ejemplo del caso 2) considere:

$$\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} -3.87 & 13.73 & -8.59 \\ 0.24 & -3.00 & -2.32 \\ -0.08 & -1.15 & -3.06 \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} -1.28 \\ 5.08 \\ 4.29 \end{bmatrix}$$

Los impuestos óptimos a los bienes 1, 2 y 3 para este caso son proporcionales a 22%, 31% y 67%, respectivamente. Adviértase que la tasa más baja recae sobre el bien 1, el que tiene menor σ ; es decir, el más complementario con el ocio.

REFERENCIAS

- ATKINSON, A. B. y STIGLITZ, J. E. (1980), *Lectures on Public Economics*, McGraw Hill, England.
- CORLETT, E. J. y HAGUE, D. C. (1954), "Complementarity and Excess Burden of Taxation", *The Review of Economic Studies*, Vol. XXI.
- DEWERT, W. E. (1979), "Duality Approaches to Microeconomic Theory", en Arrow, K. e Intriligator, M. (eds.) *Handbook of Mathematical Economics*, North Holland, Amsterdam.
- DIXIT, A. (1975), "Welfare Effects of Tax and Price Changes", *Journal of Public Economics*, Vol. 4, N° 2.
- LITTLE, I. (1951), "Direct Versus Indirect Taxes", *Economic Journal*, Vol. 61.
- MEADE, J. E. (1955), *Trade and Welfare, mathematical Supplement*, Oxford University Press, London.
- RAMSEY, F. P. (1972), "A Contribution to the Theory of Taxation", *Economic Journal*, Vol. 37,
- SAMUELSON, P. A. (1951), Unpublished memorandum for the U.S. Treasury.
- VARIAN, H. R. (1978), *Microeconomic Analysis*, Norton, New York.