UNA FORMULACION COMPACTA DE LA TEORIA DE LOS NUMEROS INDICES

ALDO DÍAZ *

El tema de los números índices ha sido objeto en los últimos años de grandes avances tanto en la investigación como en la aplicación de nuevas técnicas y conceptos. Este trabajo intenta presentar una visión de conjunto de lo que existe en una gran variedad de artículos en la literatura económica. El objetivo es analizar primero en forma consistente, las bases de la mayoría de los índices que existen, como así también la aplicación de las conclusiones teóricas a la construcción de índices con variables de importancia para el economista, como ser, índices de precios y cantidades (tanto de insumos como de productos) y productividad total del proceso de producción.

En general, se han omitido las demostraciones que exigirían una elaboración larga y tediosa con poco aporte al conocimiento del tema, pero en algunos casos se menciona la fuente para el lector interesado en la rigurosidad del argumento. Se han excluido los resultados de investigaciones recientes u otros aportes al conocimiento que no han sido generalmente aceptados o se encuentran en debate. Ello hace que este sumario de la literatura sea, estrictamente hablando, incompleto, debido a que las implicaciones y aplicaciones del tema han tomado una multitud de direcciones hacia áreas de especialización.

Se ha tomado la libertad de poner énfasis en ciertos aspectos considerados básicos a riesgo de no cubrir convenientemente otras áreas y conceptos que puedan ser de interés. Con esto se espera aclarar las dificultades que deben superarse cuando se elige la forma funcional de un índice, como también brindar claridad en un tópico muchas veces contradictorio.

I. Indices no económicos

Se define como índice no económico a aquel en el cual su derivación no está basada en la teoría del consumidor. El origen de estos índices es, generalmente, la necesidad de cuantificar en una sola expresión, escalar el movimiento en el tiempo (o en el espacio) de una gran cantidad de variables de naturaleza similar, en particular de precios y cantidades. Indices de este tipo fueron intro-

* Candidato al Doctorado, Concordia University, Montreal, Canadá.

ducidos por escritores del siglo pasado tales como Jevons, Edgeworth y Walsh, para caracterizar cambios del nivel general de precios con respecto al tiempo [1]. Esto constituye lo que se ha llamado el concepto atomístico del problema de los números índices donde cada una de las observaciones es considerada independiente de las demás [2].

El tratamiento con respecto al tiempo o al espacio es simétrico en este caso, es decir, se presume que el índice es válido cuando las observaciones se derivan de una serie de tiempo o, cuando siendo en el mismo tiempo, tienen lugar en diferentes localidades. Como se apreciará más adelante, esto no es generalmente válido. Los índices construidos con datos de distintas áreas geográficas presentan más inconvenientes que los derivados para una misma localidad sobre datos en el tiempo.

El nombre más famoso en el desarrollo de la teoría de índices de precios en este siglo, es el escritor inglés Irving Fisher. En su libro sobre la construcción de números índices [12], analizó literalmente cientos de índices de diversos tipos y, mediante la aplicación de una serie de pruebas lógicas, logró seleccionar un índice que llamó Ideal y que se lo conoce subsecuentemente con el nombre de Indice Ideal de Fisher.

En su obra, Fisher se concentró enteramente en el problema de índices de precios. La formulación para los índices de cantidades es simétrica y se la considerará aquí. El índice de precios ha sido definido como el cociente de los precios de un mismo producto calculados en el transcurso del tiempo. Por ejemplo, si el precio del producto *a* en el período t_0 es P_a^0 y en el período t_1 es P_a^1, el índice de precios está dado por la expresión

$$\frac{P_a^1}{P_a^0} \tag{1}$$

Obsérvese que el índice de precios no indica el nivel de precios sino el factor de incremento (o de disminución) del precio P_a^1 con respecto al precio P_a^0. La definición es la misma si se desea comparar los precios de un mismo producto en dos localidades en un mismo instante en el tiempo. En este caso los números 0 y 1 deben interpretarse como localidades 0 y 1 entendiéndose que las observaciones han sido tomadas simultáneamente.

1 La existencia más antigua que se conoce sobre el intento de indexar precios es quizás la que menciona M. J. ULMER: "Escribiendo en 1707, William Fleetwood, Obispo de Ely, se propuso la tarea de determinar el salario que sería necesario dar a un estudiante de la Universidad de Oxford para que éste tuviera las mismas facilidades en sus días y 260 años con anterioridad".

2 Por ejemplo, cuando los precios no están relacionados con las cantidades y cada uno de los precios, o cantidades, tampoco se relaciona con los otros de su mismo género.

En el caso en que el número de productos a indexar sea más que uno, se puede pensar en hacer un promedio de los precios relativos. Este promedio puede ser simple o ponderado. Como ejemplo, se puede mencionar el promedio aritmético simple

$$\frac{\dfrac{\overset{1}{P}_1}{\overset{0}{P}_1} + \dfrac{\overset{1}{P}_2}{\overset{0}{P}_2} + \dfrac{\overset{1}{P}_3}{\overset{0}{P}_3} + \cdots\cdots + \dfrac{\overset{1}{P}_n}{\overset{0}{P}_n}}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\overset{1}{P}_i}{\overset{0}{P}_i}}{n} \qquad (2)$$

En este caso se ha construido un índice para n productos entre t_0 y t_1. Si se deseara construir un índice para más de un período, se puede proceder de dos maneras. Una es calcular el índice entre las observaciones finales t_0 y t_n. La otra posibilidad es calcularlo entre t_0 y t_1, t_1 y t_2, etc., para luego multiplicar el valor de cada uno de los índices de manera de obtener el valor del índice para el período entre t_0 y t_n. A este último se lo designa índice encadenado y al primero índice directo. En general, los valores obtenidos por uno u otro método para más de un período, no coinciden. La explicación de este fenómeno puede hacerse introduciendo algunos conceptos de la teoría del consumo, lo cual se hará más adelante cuando se trate de índices económicos.

Otras formas de índices sugeridas por Fisher son el promedio simple armónico, el promedio simple geométrico y el promedio agregativo. Estas tres formas se expresan respectivamente como:

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\overset{0}{P}_i}{\overset{1}{P}_i} \right)} \; ; \; \sqrt[n]{\frac{\overset{1}{P}_1}{\overset{0}{P}_1} \; \frac{\overset{1}{P}_2}{\overset{0}{P}_2} \cdots\cdots \frac{\overset{1}{P}_n}{\overset{0}{P}_n}} \; ; \; \frac{\sum\limits^{n} \overset{1}{P}_i}{\sum\limits^{n} \overset{0}{P}_i} \qquad (3)$$

El inconveniente con los índices no ponderados reside, precisamente, en que otorga la misma importancia a cada producto que entra en la composición del índice, cuando no siempre la composición real del consumo muestra esta propiedad. Una forma de introducir la importancia relativa de cada producto es la de ponderar cada precio relativo por el porcentaje del gasto total empleado en cada producto. Por ejemplo, el gasto en el producto 1 está dado por $p_1 \, q_1$ donde q_1 representa la cantidad del producto. La ponderación se calcula como

$$\frac{p_1 \; q_1}{\sum\limits^{n} p_i \; q_i} \qquad (4)$$

y en forma similar para los otros productos 2......n. Se pueden considerar cinco formas básicas de ponderación. La primera es ponderar cada precio relativo con la expresión (4) calculada en el período inicial o base t_1. La segunda, es calcular la ponderación en el período final t_n. Existen también dos casos intermedios que proporcionan dos alternativas adicionales. Una es la ponderación calculada usando los precios del período inicial con las cantidades del período final y, finalmente, el caso inverso a éste. En caso de contarse con suficiente información, la ponderación puede calcularse en cada período en que se calcula el índice, lo cual proporciona la quinta posibilidad. Se han presentado así diversas formas de índices y posibilidades de ponderación. Ahora cabe preguntarse: ¿Cuál es el mejor sistema de ponderación y cuál es el mejor índice?

I. Fisher analizó 134 fórmulas de índices ponderados y simples y propuso una serie de pruebas para los mismos. El propósito de las pruebas es el de establecer un criterio de calidad, de manera de seleccionar la mejor forma entre las consideradas en su momento. Las pruebas que propuso Fisher, si bien razonables, han provocado gran controversia, razón por la cual es de interés estudiar en detalle el contenido de las mismas. Esto se hará aquí en forma suscinta, para luego analizar cada una de las pruebas en forma separada.

En general, lo que se espera de una fórmula para números índices, es lo siguiente:

— Si desde un período a otro, todos los precios duplican su valor, el valor del índice de precios debe también duplicarse.
— Si se cambia el período inicial de una serie temporal, el valor relativo del índice para dos períodos cualesquiera dentro de la serie, no debe cambiar.
— Si las unidades en que se expresan los precios o las cantidades cambian, el valor del índice no debe alterarse cuando esto ocurra.
— Debido a que el producto de todos los precios multiplicados por todas las cantidades en un instante en el tiempo es igual al gasto total y, por definición, los índices de precios y cantidades deberían reflejar exactamente los cambios en precios y cantidades desde un período a otro, se espera que el producto del índice de precios multiplicado por el índice de cantidades, sea igual al cociente de los gastos entre un período y el otro.

Habiendo propuesto esta serie de pruebas, Fisher analizó todas las posibilidades que proporcionan varias fórmulas de índices y varias posibilidades de ponderación con respecto a una serie de datos de la economía norteamericana entre 1913 y 1918. Entre los índices analizados, se encuentran el índice de Laspeyres (1864) y el de Paasche (1874). El índice de precios (cantidades) de Laspeyres es un promedio agregativo ponderado donde la ponderación es constante en todos los períodos usando cantidades (precios) del período inicial. La forma matemática es la siguiente:

$$\lambda_p = \frac{\sum_{i}^{n} p_i^1 q_i^0}{\sum_{i}^{n} p_i^0 q_i^0} \qquad \lambda_q = \frac{\sum_{i}^{n} p_i^0 q_i^1}{\sum_{i}^{n} p_i^0 q_i^0} \qquad (5)$$

donde λ_p y λ_q representan la expresión del índice de precios y cantidades respectivamente.

El índice de precios (cantidades) de Paasche es un promedio agregativo ponderado donde la ponderación es constante en todos los períodos usando cantidades (precios) correspondientes al período final de la serie, como sigue:

$$\pi_p = \frac{\Sigma\ p_i^1 q_i^1}{\Sigma\ p_i^0 q_i^1} \qquad \pi_q = \frac{\Sigma\ p_i^1 q_i^1}{\Sigma\ p_i^1 q_i^0} \tag{6}$$

Como resultado de su investigación, Fisher propuso como el mejor índice, su Indice Ideal[3] dado por el promedio simple geométrico de los índices Laspeyres y Paasche. Designándolo con I_p e I_q, el Indice Ideal de Fisher está dado por la expresión:

$$I_p = \sqrt{\lambda_p\ \pi_p} \qquad I_q = \sqrt{\lambda_q\ \pi_q} \tag{7}$$

Con respecto a los criterios de calidad, Fisher no pudo encontrar un índice que satisfaga la totalidad de sus criterios. Su propio Indice Ideal no lo hace, ni tampoco los de Laspeyres y Paasche a partir de los cuales se deriva. En realidad, pocos son los índices que satisfacen la mayoría de las pruebas. Esto constituye un problema serio debido a que las pruebas parecen representar un conjunto lógico sobre el cual basarse. Sin embargo, se ha demostrado que el conjunto de pruebas debe ser modificado si se desea que las mismas sean consistentes con la teoría del consumidor. Esto hace que sea necesario considerar primero, la aplicación de esta teoría al caso de los números índices, cosa que se hará a continuación, dejando el tema de las pruebas de Fisher para más adelante.

II. Teoría del consumo y derivación de índices económicos

El problema básico con la concepción atomística de los índices es que, en realidad, existe una relación única entre los precios y las cantidades. Esta relación está dada por la función de demanda en la cual la cantidad consumida de un cierto producto depende de los precios de ese producto, de los precios de todos los otros productos y del ingreso del consumidor. Esta función de demanda se obtiene de maximizar la función de utilidad del consumidor cuando éste tiene un ingreso fijo en el período de tiempo que se considere.

Entonces, tiene sentido condicionar los números índices a la teoría del consumidor por cuanto, en la gran mayoría de los casos, los números índices son usados para determinar el costo relativo del nivel de vida, ajustar el nivel de ingresos del trabajador y en un sinnúmero de otras aplicaciones que conciernen al consumidor.

---

3 Aparentemente, la fórmula del índice ideal fue descubierta con anterioridad a FISHER por A. L. BOWLEY en 1899.

En el caso de índices de insumos y productos, también existe una relación única entre los insumos y los productos representada por la función de producción. Además, la introducción de la teoría económica, permite interpretar conceptualmente lo que cada uno de los índices representa, cosa imposible de hacer sin ésta.

Se denomina índice económico a aquel derivado de teorías económicas, como ser, la teoría del consumidor o la teoría de producción. En el primer caso, se presume que existe una función de utilidad en el sentido cardinal del término, mientras que en el segundo caso, también se considera la existencia de una función de producción, en este caso de naturaleza neoclásica.

Concentrándonos por el momento en la teoría del consumidor, se puede definir al índice económico de precios de la siguiente manera: Considérese un consumidor en dos circunstancias diferentes 0 y 1, pudiendo ser éstas en diferentes lugares o en diferentes tiempos. Asúmase que el consumidor no experimenta un cambio en su función de utilidad y que el número y calidad de los productos, entre los cuales el consumidor elige su gasto, no cambia entre 0 y 1, sólo los precios y su ingreso cambian. Ahora preguntamos: ¿Cuál es el ingreso mínimo que habría de darse al consumidor en la situación 1 para que tuviera el mismo nivel de vida que en la situación 0? El ingreso en la situación 1 relativo al ingreso en la situación 0 se define como precio índice. Mas formalmente, y haciendo uso de la igualdad entre gasto e ingreso.

Definición: El índice de precios económicos es el cociente de los gastos mínimos para un nivel de vida constante en dos situaciones diferentes.

En general, uno podría decir que el problema es calcular el ingreso mínimo para permitir al consumidor mantener el mínimo nivel de utilidad en el período 1 que en el período 0. Sin embargo, debido a que la función de utilidad está definida en forma única hasta una transformación monotómica, el ingreso entregado al consumidor en la situación 1 para que éste alcance el nivel de vida de la situación 0, no necesariamente coloca a éste en la misma curva de indiferencia o en el mismo nivel de utilidad. En general, no se puede establecer una correspondencia directa entre el nivel de vida y el nivel de utilidad. Incluso, si se hiciera esta analogía, sería inválida debido a la monotomicidad de la función utilidad. Monotomicidad hace diferentes dos situaciones en el tiempo (o en el espacio) por las mismas razones que hace imposible la comparación interpersonal de utilidades.

Para poder igualar el nivel de vida con el nivel de utilidad, haría falta presumir que los gustos del consumidor se mantienen inalterados y que la eficiencia del mismo para disfrutar del consumo también permanece constante.

Estas son las razones por las cuales se prefiere definir los índices en términos del nivel de vida. Sin embargo, debido a que problemas más graves aquejan el tema, en lo que sigue se usarán indistintamente ambos términos [4].

Defínase un vector de precios P $(p_1, p_2, \ldots\ldots p_n)$, un vector de cantidades Q $(q_1, q_2, \ldots\ldots q_n)$, una función de utilidad quasi-cóncava u(Q), con derivadas primeras y segundas continuas y con utilidades marginales positivas $u_i > 0$ definida en el espacio no negativo de dimensión *n* hasta una transformación monotómica. Designando el gasto como *e*, se puede decir que en cualquier circunstancia

$$e = \sum_{i}^{n} p_i \, q_i \qquad = P\,Q = Q\,P \tag{8}$$

Con esta notación, se puede definir al índice económico de precios como

$$p\left\{ P^1, P^0 \mid u(Q^{\alpha}) \right\} = \frac{e\,[P^1 \mid u(Q^{\alpha})\,]}{e\,[P^0 \mid u(Q^{\alpha})\,]} \tag{9}$$

donde $e\,[P \mid u(Q^{\alpha})\,]$ corresponde al mismo gasto para el nivel de utilidad dado por $u(Q^{\alpha})$.

El nivel de utilidad para el cual se calcula el índice de precios es $u(Q^{\alpha})$ el cual no tiene necesariamente que coincidir con el nivel de utilidad en cualquiera de las situaciones 1 y 0.

El índice económico de cantidades se puede definir en forma similar. Asumiendo ahora que los precios no han cambiado entre las situaciones 0 y 1, pero sí las cantidades [5], se pregunta: ¿Cuál es el ingreso mínimo requerido por el consumidor en la situación 1 para adquirir el conjunto de comodidades Q' de manera de obtener el mismo nivel de utilidad que en la situación 0 cuando compró las comodidades Q^0?

El consumidor puede finalizar con la misma cantidad Q^0 u otra cantidad Q' en las dos situaciones. Si en ambas circunstancias elige las mismas cantidades, el índice de cantidades es unitario.

Definición: El índice económico de cantidades es el cociente de los gastos mínimos necesarios para que, frente a una situación de precios constantes P^{α}, el consumidor alcance los niveles correspondientes a los dos vectores de comodidades Q^0 y Q'.

$$q\,(Q^1, Q^0 \mid P^{\alpha}) = \frac{e(Q^1 \mid P^{\alpha})}{e(Q^0 \mid P^{\alpha})} \tag{10}$$

donde

$$e(P^{\alpha}, Q) = \text{Mínimo } P.Q \text{ tal que } P = p^{\alpha}$$

4 Para los propósitos de este trabajo, la igualdad entre un término y el otro es suficiente. Por más detalles véase F. M. FISHER & K. SHELL en la referencia (13).

5 Esto puede entenderse como forzar al consumidor a elegir diferentes cantidades para luego compensar por cualquier cambio en el nivel de vida.

La función de utilidad no aparece explícitamente en la formulación del índice de cantidades como lo hace en el caso del índice de precios. Sin embargo, está implícita en Q lo cual permite también interpretar al índice de cantidad como el cociente entre dos niveles de utilidad. Téngase en cuenta que se requiere un cociente que sea cardinal, o sea, un número, cuando en realidad la utilidad es de una magnitud ordinal. Obviamente, esto departe de la teoría del ordenamiento preferencial debido a que no puede existir una función que sea cardinal, pero nada impide considerar el cociente entre las dos funciones ordinales como un escalar [6].

En forma similar para los índices de precios, si se define $u(Q^{\alpha})$ como el nivel de utilidad usado para definir $p(P^1, P^0; Q^{\alpha})$, como existe un conjunto infinito de otras utilidades resultantes de la transformación monotómica de la original, no es posible obtener el índice "único" o "verdadero" en ningún momento o circunstancia. El valor "verdadero" del índice, estaría determinado por la preferencia del individuo y, debido a que no es posible cuantificar su nivel de utilidad, no es posible (y nunca lo será) obtener un índice que sea cardinal. Con esto, se concluye que un índice "verdadero", "exacto" o "único" existe sólo en teoría, o sea en forma ordinal, pero no se puede construir un índice cardinal como sería deseable debido a que existen infinitas transformaciones de la utilidad del individuo, lo que excluye una solución escalar del problema.

Todos los índices de uso en la práctica padecen de este inconveniente. Si a esto se le agrega que la función de utilidad en sí misma cambia con el tiempo (y con el espacio) y que la eficiencia del consumidor con respecto a la satisfacción derivada del consumo no es constante, se pueden interpretar todos los índices de precios (y cantidades) cualquiera sea su naturaleza, como aproximaciones de orden inferior a un índice teórico no cuantificable.

El caso de preferencias homotéticas:

Cuando se trata no sólo de un consumidor, como en el caso anterior, sino que se desea construir un índice para un gran número de consumidores (o para un proceso de producción que sigue más que una función de producción), debería tenerse en cuenta la diferencia entre las funciones de utilidad de cada individuo o, más exactamente, existe un índice exacto teórico para cada individuo, pero no es evidente que lo exista para un conjunto de individuos. En el caso en que cada individuo posea una función de utilidad diferente, el problema se agrava debido a que no están satisfechas las condiciones para su agregación.

---

6 En forma similar a considerar el cociente entre utilidades marginales como cardinal. La utilidad marginal retiene la propiedad ordinal de la función original, pero el cociente entre utilidades marginales es cardinal.

De no restringirse la preferencia del consumidor, la forma que siguen los puntos observados del consumo en el espacio multidimensional Eucleideano de cantidades, no tiene una forma definida cuando en el tiempo cambian los precios y el ingreso del consumidor. Si la trayectoria no está definida para un consumidor individual, tampoco lo estará para el conjunto de consumidores. Consecuentemente, será necesario considerar casos especiales de la función de utilidad del consumidor, y para todos los consumidores en general, si se desea progresar en el sentido de cuantificar de manera satisfactoria (exacta) los índices de precios y cantidades. En particular, sería de interés parametrizar la función de utilidad del individuo de manera de evitar la transformación monotómica que impide la construcción de un índice cardinal exacto.

El caso a considerarse, y el que a la vez proporciona una exposición simple y elegante de la materia, es aquel en que la preferencia del consumidor es homotética. Antes de desarrollar las implicaciones de este concepto, conviene revisar los supuestos básicos sobre los que se fundamenta.

Supóngase un consumidor que maximiza su función de utilidad en circunstancias donde los precios están dados por p^1, las cantidades por Q^1 y su ingreso por y^1. Si simultáneamente, todos los precios y el ingreso se duplicaran, se espera que el punto óptimo hallado con anterioridad al cambio no se altere, esto es, el consumidor compraría las mismas cantidades de bienes y servicios que en la situación original. En este modelo, se dice que el consumidor es invariante con respecto a cambios iguales proporcionales en los precios y su ingreso, lo que equivale a decir que el consumidor no sufre de ilusión monetaria. Este es un supuesto necesario en el caso homotético.

Si las preferencias del consumidor son homogéneas de cualquier grado [7], la forma de la curva de Engel para cambios en el ingreso, es una línea recta desde el origen en el diagrama Euclediano de n dimensiones donde cada uno de los ejes representa las cantidades consumidas. Además, si la función de utilidad es homogénea de grado uno $(r = 1)$, de doblarse el ingreso del consumidor, ceteris paribus, las cantidades consumidas serán exactamente dobles, lo que indica que las distancias a lo largo de las rectas de Engel entre curvas de indiferencia que representan niveles de utilidad de diferencia constante son iguales [8].

Para obtener curvas de indiferencia sin discontinuidad y que hagan posible el proceso de maximización, se supone que la función de utilidad es cuasicóncava. Si $u(Q)$ se considera sin límite superior, se presume que el consumidor no alcanza el estado de saciedad

7 Una función $u(q_1, q_2 \ldots\ldots q_n)$ es homogénea de grado r si se verifica que

$$u(kq_1, kq_2 \ldots\ldots kq_n) = k^r\, u(q_1, q_2 \ldots\ldots q_n) \qquad k > 0$$

8 Un grado de homogeneidad mayor que uno, implica distancias cada vez más cortas, y viceversa.

en ningún momento. En términos matemáticos, esto se puede expresar en forma estricta con las siguientes condiciones:

A1) $u(O) = 0$

A2) $u(Q)$ tiene valor finito para todo $Q \varepsilon D$

A3) $u(Q^1) \geqq u(Q)$ si $Q^1 \geqq Q$

A4) Para cualquier valor de $Q > 0$, o $Q \geqq O$ de manera tal que $u(kQ) > 0$ para un escalar $k > 0$, $u(kQ) \longrightarrow \infty$ si $k \longrightarrow \infty$

A5) $u(Q)$ es semi-continua en su parte superior [9]

A6) (Q) es cuasi-cóncava en D

donde D es el dominio de cantidades no negativas en el espacio de dimensión R^n.

$$D = (Q \mid Q \geqq O,\ Q \varepsilon R^n)$$

Queda ahora por resolverse el problema de agregar las preferencias individuales. Los supuestos A1)......A6), conjuntamente con la homogeneidad de la función $u(Q)$, garantizan preferencias racionales con líneas de expansión rectas para un consumidor, pero no es suficiente para un conjunto de consumidores. Incluso, si todos los consumidores tuviesen preferencias de acuerdo a A1)......A6), las características del consumo no tienen por qué ser iguales. Un consumidor con gran riqueza adquiere productos de naturaleza diferente que un consumidor con menor riqueza. Esta diferencia en las características del consumo tiene importantes implicaciones en la construcción de un número índice. Considérese el caso de un incremento en el precio de artículos de lujo; el nivel general de precios se incrementaría pero resulta evidente que para las personas que no consumen artículos de lujo, el nivel de precios no ha cambiado.

Si se desea que las características de consumo sean idénticas para todos los consumidores, debe suponerse además de las condiciones A1)...A6), que las preferencias individuales son homotéticas. Esto constituye el teorema fundamental de los números índices: solamente preferencias homotéticas garantizan características de consumo idénticas para todos los individuos.

Debe tenerse en cuenta que el caso homotético es altamente restrictivo al extremo de no ser realistico en el contexto de la teoría del consumo debido a que ignora por completo la distribución del

---

9 La función $u(Q)$ es semi-continua en su parte superior en el punto Q^o si, y solamente si, para todo $\eta > 0$ existe un entorno $N_\eta\ (Q^o)$ tal que si $Q \varepsilon N_\eta\ (Q^o)$ implica que $u(Q) < u(Q^o) + \eta$.

ingreso. Las diferencias en el poder adquisitivo de individuos es muy difícil de incorporar en la construcción de un índice, a menos que el índice sea constreñido a un determinado nivel de ingreso para el cual sea válido presumir que existen preferencias homotéticas.

Definición: Una función homotética es una transformación de la forma $F[u(Q)]$ donde $u(Q)$ es homogénea de primer grado con propiedades A1)......A6), y la transformación $F[u(Q)]$ es tal que $F(v) \longrightarrow \infty$ cuando $v \longrightarrow \infty$, donde v es un índice del valor de $u(Q)$, y $v \varepsilon (O, \infty)$.

La función homotética tiene propiedades importantes. Primero, impone elasticidad unitaria con respecto al ingreso en todas las preferencias individuales. Segundo, las curvas de indiferencia de una función homotética pueden obtenerse por expansión radial de una de ellas cualesquiera y, tercero, las distancias entre las curvas de indiferencia medidas a lo largo de las rectas de expansión que parten del origen son iguales. Esta transformación homotética es un caso particular de la transformación general $F[\phi(x)]$ donde $\phi(x)$ no está restringida a ser una función homogénea de primer grado.

La transformación homotética mantiene la mayoría de las propiedades de la función original. En nuestro caso, si la función $u(Q)$ con propiedades A1)......A6) es homogénea de primer grado, la transformación $F[u(Q)]$ es súper aditiva, continua y función cóncava de $Q \varepsilon D$ [10]. Por medio de la homoteticidad, se fuerza a que las curvas de indiferencia del conjunto de consumidores sean idénticas y con las mismas propiedades que aquellas de un individuo del conjunto. De esta manera, el análisis y conclusiones derivadas anteriormente para un individuo, son válidas para el conjunto de ellos.

La introducción de este tipo de supuestos simplifica considerablemente la construcción de los números índices en el caso homotético. Las definiciones de los índices de precios y cantidades en este caso, están dadas por los siguientes teoremas [11]:

Indice de Precios Homotético: Si, y solamente si las preferencias son homotéticas con todas las elasticidades con respecto al ingreso unitarias y con $F[u(Q)]$ homogénea de primer grado, se cumple que

$$p(P^1, P^0; Q^{\alpha}) \equiv p(P^1, P^0; Q^{\beta}) \equiv p(P^1, P^0) = p(P^1) / p(P^0) \qquad (11)$$

para todo (Q^{α}, Q^{β}).

Indice de Cantidades Homotético: Si, y solamente si las preferencias son homotéticas con todas las elasticidades con respecto al ingreso unitarias y $F[u(Q)]$ homogénea de primer grado, se cumple que

$$q(Q^1, Q^0; P^{\alpha}) \equiv q(Q^1, Q^0; P^{\beta}) \equiv q(Q^1, Q^0) = q(Q^1) / q(Q^0) \qquad (12)$$

10 Véase R. W. SHEPPARD (26).
11 Debidos a P. A. SAMUELSON (23).

Solamente en el caso homotético el índice de cantidades será el mismo cualesquiera sea el nivel de precios elegido P. Los índices no son ahora el cociente entre gastos, sino el cociente entre los niveles de precios para el índice de precios y el cociente entre los niveles de cantidades para el índice de cantidades. Nótese que la función de utilidad no figura en ninguno de ellos. Esta es la gran ventaja que brindan los índices homotéticos; permiten expresar en forma cardinal los términos de los cocientes haciendo posible así la determinación "exacta" de los mismos. Se concluye de esto que, solamente es posible obtener índices exactos si se parametriza la función de utilidad. Todos los índices que no lo hagan no son, por consiguiente, exactos.

Para cualquier preferencia convenientemente parametrizada en forma matemática, existirá siempre un índice el cual representará exactamente esa función, y viceversa. El entendimiento de esta correspondencia entre la función de utilidad y su índice exacto, condujo a que se investigara la función de utilidad correspondiente a algunos de los índices comúnmente utilizados. Como ejemplo de ello, Buscheguennce (1925) demostró que el Indice Ideal de Fisher es exacto para una función de utilidad cuadrática homogénea. En forma similar, Afriat [1] demostró que el Indice de Palgrave corresponde a una función Cobb-Douglas de la forma

$$\pi_i \ (q_i)^{w_i}, \quad w_i \geqq 0 \ , \ \Sigma w_i = 1 \qquad \text{para cantidades,} \qquad (13)$$

$$\text{y } \pi_i \ (s_i)^{\sigma_i}, \ \sigma_i = \frac{e_i}{e} = \frac{p_i q_i}{PQ} = s_i q_i \qquad \text{para precios} \qquad (14)$$

De esta forma se puede proceder "ad infinitum" debido a que existen tantas funciones de utilidad como sea imaginable y, por lo tanto, es posible derivar por lo menos un conjunto de índices exacto para las mismas. En el caso general no homotético existen más complicaciones en el cálculo de los índices y no es posible obtener una fórmula exacta en ningún caso.

III. Números índices en la teoría de producción

La mayor parte de los resultados derivados de la teoría del consumidor pueden extenderse a la teoría de producción. Los números índices relacionados con la teoría de producción fueron derivados principalmente por la labor de A. Bergson [2], R. H. Moorsteen [21]; F. H. Fisher y K. Shell (Ensayo II en la referencia 13) y por P. A. Samuelson [23].

Considérese la Frontera de Producción (FP) de una economía caracterizada por factores de producción fijos y en la cual existe competencia perfecta en los mercados de insumos y de productos. La FP puede, entonces, representarse por la siguiente función implícita:

$$f\,(x_1, \ldots\ldots x_n \ ; \ b) = f\,(x;b) = 0 \qquad (15)$$

donde $x_1 \ldots\ldots x_n$ representan las cantidades de productos, mientras que *b* es un parámetro que determina la eficiencia de producción, o sea, el que crea la expansión de la FP cuando la tecnología, o las economías de escala, cambian. Además, se presume que $\delta f/\delta x_i > 0$ y $\delta f/\delta b < 0$ de manera que un aumento de *b* resulta en una expansión de la FP hacia afuera en todas sus dimensiones. En lugar de concavidad, ahora se requiere la convexidad de la función de producción de manera de obtener la concavidad de la FP. Esto garantiza contornos cóncavos en el espacio $x_1 \ldots\ldots x_n$ para cambios en *b*.

Por analogía con la teoría del consumidor y, haciendo uso de la definición de índices de precios y cantidades económicos, se pueden definir los índices del producto en dos situaciones 0 y 1. Dado el vector de precios de productos $Y = (y_1 \ldots\ldots y_n)$, la combinación óptima de producción ocurre en el punto de tangencia entre la FP y el hiperplano de precios, o sea, en el punto de resolución del proceso de maximización.

$$\mathrm{Max}_x \; Y.X \text{ sujeto a } f(x;b) = 0 \tag{16}$$

Entonces, se puede definir el índice de cantidades del producto conociendo los precios y cantidades del producto en dos situaciones (X^1, Y^1) y (X^0, Y^0), como el cociente de los gastos en las dos situaciones para un vector de precios de productos dado Y^α

$$x(X^1, X^0; Y^\alpha) = \frac{(X^1 : Y^\alpha)}{(X^0 ; Y^\alpha)} \tag{17}$$

donde Y^α puede ser tomado en el período básico Y^0 o en el período final Y^1. Debe tenerse en cuenta que X^0 y X^1 pertenecen a dos FP diferentes, lo que significa que *b* ha cambiado entre la situación 0 y 1. Si *b* permanece constante, X^1 y X^0 deben encontrarse sobre la misma FP y en este caso el índice de cantidades del producto es unitario.

La definición del índice de precios sigue un argumento similar, solamente que la compensación debe ser tal que coloque al producto sobre una misma FP, o sea, se calcula el cociente entre los gastos para un valor fijo de *b*.

$$y(Y^1, Y^0 ; b) = \frac{(Y^1 ; b)}{(Y^0 ; b)} \tag{18}$$

donde existe una correspondencia directa entre b y x en la función $f(x ; b) = 0$.

En el caso homotético, las expresiones de estos índices se simplifican considerablemente siempre que la función

$$b(x_1 \ldots\ldots\ldots x_n) = b(x) = k^{-1}\, b(k_x) \tag{19}$$

sea una función homogénea de primer grado. Un caso particular ocurre cuando la función de producción homotética consiste en dos insumos (trabajo y capital) y un producto. Los cambios en el parámetro tecnológico b es tal que mantiene constante la relación entre los insumos, siendo éste el caso de cambio tecnológico neutro en el sentido de Hicks.

En el caso homotético general (con más de un producto) los índices de precios y cantidades se reducen a:

$$y\,(Y^1,\ Y^0,\ b^{\alpha}) = \frac{(Y^1)}{(Y^0)} = y\,(Y^1,\ Y^0) \tag{20}$$

$$x\,(X^1,\ X^0,\ Y^{\alpha}) = \frac{(X^1)}{(X^0)} = x\,(X^1,\ X^0) \tag{21}$$

para cualquier valor de b e Y^{α}. Estos índices satisfacen la mayoría de las pruebas de Fisher. Para el índice de precios es:

(i) $y\,(Y^0,\ Y^0) = 1$ (22)

(ii) $y(Y^1,\ Y^0)\ y\,(Y^0,\ Y^1) = 1$

(iii) $y\,(Y^2,\ Y^1)\ y\,(Y^1,\ Y^0)\ y\,(Y^0,\ Y^2) = 1$

(iv) $y^*(Y^{*1},\ Y^{*0}) = y\,(Y^1, Y^0)$ para un cambio dimensional

$$Y_j = Y_j\,d_j\ ,\ d_j > 0$$

El índice de cantidades también satisface estas relaciones. Para los dos índices combinados, se satisface la prueba de inversión de factores:

$$y\,(Y^1,\ Y^0)\ x\,(X^1,\ X^0) = \frac{Y^1\ X^1}{Y^0\ X^0} \tag{23}$$

IV. Inconsistencia de las pruebas propuestas por Fisher

En su libro, Irving Fisher introdujo un conjunto de pruebas para juzgar los méritos e inconvenientes de las fórmulas comúnmente usadas para construir números índices. Estas pruebas fueron establecidas sobre bases de sentido común, es decir, representan lo que puede esperarse de un índice en diferentes circunstancias sin que se violen las reglas del razonamiento lógico. Con esta ayuda, y luego de aplicar sus pruebas a cientos de fórmulas, Fisher halló el Indice "Ideal". Sin embargo, este Indice Ideal no satisface la totalidad de las pruebas, si bien es uno que satisface la mayoría de ellos. Esta inconsistencia crea la incertidumbre sobre la existencia de algún otro índice que satisfaga todos los requisitos de Fisher, o si el conjunto de pruebas no constituye un conjunto demasiado restrictivo.

La respuesta del propio Fisher a este dilema fue la de declarar una de las pruebas inválida, basándose en que su Indice Ideal no la satisface[12]. Por otra parte, en años subsiguientes, Frisch |14|, Wald, Subramanian, Mizutani, Swamy |30| y más recientemente Eichhorn |11| han demostrado la existencia de inconsistencias entre el conjunto de pruebas y la teoría económica.

Considérense las siguientes pruebas propuestas por Fisher:

T1) *Proporcionalidad*[13]*:* Si desde un período (o lugar) a otro, los precios (cantidades) se incrementan por un factor constante, el índice de precios (cantidades) debe reflejar exactamente este incremento. Esto se puede expresar como sigue:

$$\text{Si} \quad P^1 = k\,P^0 \quad , \quad p\,(Q^0, P^0, Q^1, k\,P^0) = k \tag{24}$$

$$\text{Si} \quad Q^1 = k\,Q^0 \quad , \quad q\,(Q^0, P^0, k\,Q^0, P^1) = k \tag{25}$$

para todo $k > 0$.

T2) *Circularidad:* El número índice debería ser independiente de la elección de un tercer punto. En otras palabras, debería ser posible descomponer el valor de un índice entre dos tiempos (o lugares) de manera tal que el cambio total del índice sea el producto del cambio de cada una de las componentes. Para el caso de solamente dos componentes sería:

$$p\,(Q^0, P^0, Q^1, P^1)\; p\,(Q^1, P^1\, Q, P) = p\,(Q^0, P^0, Q, P) \tag{26}$$

$$q\,(Q^0, P^0, Q^1, P^1)\; q\,(Q^1, P^1, Q, P) = q\,(Q^0, P^0, Q, P) \text{ [14]} \tag{27}$$

T3) *Dimensionalidad*[15]*:* El índice debería ser independiente de la unidad en que se miden los precios y las cantidades. Para un cambio de unidades de, por ejemplo,

q_j a $q_j^* = d_j\, q_j$ para $d_j > 0$ debería ser

$$p^*\,(P^0, Q^{0*}, P^1, Q^{1*}) = p\,(P^0, Q^0, P^1, Q^1) \tag{28}$$

T4) *Inversión de Factores:* Si en la fórmula de un índice de precios, se intercambian los precios por las cantidades y las cantidades por los precios, se obtiene un índice de cantidades. El producto del índice de precios original y el índice de cantidades obtenido por inversión de factores, debería ser igual al

---

12 Luego de probar que su índice satisface todas sus pruebas con excepción de la Circularidad, FISHER escribió "...por consiguiente, una fórmula que satisfaga exactamente la prueba llamada de Circularidad debería tomarse en realidad como prueba de que la fórmula es errónea (p. 271).

13 Algunas veces llamado (SAMUELSON) "promedio general de precios relativos".

14 Como consecuencia de esta prueba puede escribirse que

$p\,(Q^0, P^0, Q^0, P^0) = 1$ (Prueba de Identidad)

$p\,(Q^0, P^0, Q^1, P^0) = 1$

$p\,(Q^0, P^0, Q^1, P^1)\; q\,(Q^1, P^1, Q^0, P^0) = 1$ (Prueba de inversión de tiempos)

$p\,(P^0, Q^0, P^1, Q^1)\; p\,(P^1, Q^1, P, Q)\; p\,(P, Q, P^0, Q^0) = 1$

15 También llamada prueba de medibilidad (SWAMY).

cociente entre los gastos en los períodos de tiempo (o espacios) considerados.

$$p\,(P^0, Q^0, P^1, Q^1)\; q\,(P^0, Q^0, P^1, Q^1) = \frac{e^1}{e^0} \qquad (29)$$

Estas cuatro pruebas son, básicamente, las usadas por Fisher para evaluar índices tales como el de Laspeyres, Paasche y muchos otros índices no económicos. Como en ninguno de los casos los índices no económicos satisfacen todas las pruebas, cabe preguntarse si lo harían los índices económicos en general y, en particular, los índices homotéticos. Samuelson [23] demostró que, para el caso general no homotético, la prueba de proporcionalidad se satisface para precios, pero no para cantidades

$$p\,(k\,P^0, P^0; Q^{\alpha}) = k \quad \text{pero} \qquad (30)$$
$$q\,(k\,Q^0, Q^0; P^{\alpha}) \neq k\,, \text{ similarmente,}$$
$$p\,(P^1, P^0; k\,Q^{\alpha}) = p\,(P^1, P^0; Q^{\alpha}) \text{ pero}$$
$$q\,(Q^1, Q^0; k\,P^{\alpha}) = q\,(Q^1, Q^0; P^{\alpha})$$

Estos dos últimos resultados se deben a la ausencia de ilusión monetaria característica del modelo. En general, las otras pruebas no se satisfacen sino por casos particulares, a saber:

a) **Circularidad**

$$p\,(P^2, P^1; Q^{\alpha})\; p\,(P^1, P^0; Q^{\alpha})\; p\,(P^0, P^2; Q^{\alpha}) = 1 \qquad (31)$$
$$q\,(Q^2, Q^1; P^{\alpha})\; q\,(Q^1, Q^0; P^{\alpha})\; q\,(Q^0, Q^2; P^{\alpha}) = 1$$

Un caso particular de éste es:

$$p\,(P^1, P^0; Q^{\alpha})\; p\,(P^0, P^1; Q^{\alpha}) = 1 \qquad (32)$$
$$q\,(Q^1, Q^0; P^{\alpha})\; q\,(Q^0, Q^1; P^{\alpha}) = 1$$

b) **Dimensionalidad**

$$p^*\,(P^{*1}, P^{*0}; Q^{*\alpha}) = p\,(P^1, P^0; Q^{\alpha}) \qquad (33)$$
$$q^*\,(Q^{*1}, Q^{*0}; P^{*\alpha}) = q\,(Q^1, Q^0; P^{\alpha})$$

c) **Inversión de Factores**

$$p\,(P^1, P^0; Q^1)\; q\,(Q^1, Q^0; P^0) = \frac{e^1}{e^0}$$
$$= p\,(P^1, P^0; Q^0)\; q\,(Q^1, Q^0; P^1) \qquad (34)$$

pero en general,

$$p\,(P^1, P^0; Q^i)\; q\,(Q^1, Q^0; P^i) \neq \frac{e^i}{e^0} \text{ para } i = 0 \text{ ó } 1 \qquad (35)$$

de manera similar,

$$p\,(P^1, P^0; Q^{\alpha})\; q\,(Q^1, Q^0; P^{\alpha}) \neq \frac{e^1}{e^0} \text{ para cualquier} \qquad (36)$$

valor de (Q^{α}, P^{α}).

En el caso homotético, las pruebas T1).....T4) se satisfacen por los índices homotéticos p (P^1, P^0) y q (Q^1, Q^0), para preferencias individuales homogéneas de primer grado y para $n \geqslant 1$.

En el caso general no homotético, Swamy |30| demostró que el conjunto T1, T2, T3, T4 no es consistente con la teoría económica en el sentido que no puede existir un índice económico que satisfaga todas las pruebas. Además, Frisch |14| demostró que dichas pruebas son consistentes con la teoría económica sólo en el caso que n sea unitario [17].

Para lograr un conjunto de pruebas consistentes, Eichhorn introdujo varias versiones de éstas en forma más restringida. Por ejemplo, para lograr un conjunto de cinco pruebas consistente (en el sentido que una fórmula satisfaga cuatro de ellas pero no la restante) deben modificarse las pruebas T1, T2 y T4 como sigue:

T1') Proporcionalidad Restringida: Si las cantidades no cambian, un cambio k veces $(k > 0)$ en todos los precios, debería resultar en un valor del índice igual a k.

$$p\,(P^0, Q^0, k\,P^0, Q^0) = k \tag{37}$$

T2') Circularidad Restringida [18]: El cociente

$$\frac{p\,(P^0, Q^0, P^1, Q^1)}{p\,(P, Q, P^1, Q^1)} \tag{38}$$

debería ser independiente de $P^1 Q^1$, o sea, la comparación entre los precios y cantidades en el período inicial y los precios y cantidades finales vía un tercer punto, no debería ser afectada por la elección de este tercer punto.

$$\frac{p\,(P^0, Q^0, P^1, Q^1)}{p\,(P, Q, P^1, Q^1)} = R\,(P^0, Q^0, P, Q) \tag{39}$$

o sea, debería ser una función R la que excluiría P^1 y Q^1.

T4') Inversión de Factores Restringida: En lugar de la inversión de factores (T4) sólo se requeriría que

$$p\,(P^0, Q^0, P, Q)\ q\,(P^0, Q^0, P, Q) = \frac{QP}{Q^0\ P^0} \tag{40}$$

---

17 Este caso particular no satisface la llamada Prueba de Determinación la cual requiere que el índice no deje de existir, se haga infinito o indeterminado si cualquier argumento del vector P ó Q se hace cero o infinito. SAMUELSON y SWAMY se han referido a este índice en los siguientes términos: "Esta condición, nos parece, es fuera de lo común y por cierto no deseable. Es necesariamente violada en los dos extremos y no tiene en cuenta el supuesto de insatisfacción el cual se usa corrientemente en la teoría económica estándard". Por más discusiones al respecto véase SUBRAMANIAN, MIZUTANI y WALD en SWAMY (30).

18 Debido a FRISCH (14).

donde q es un índice de cantidades que satisfaga el mismo conjunto de pruebas que el índice de precios p (es decir, no es el índice original p con los factores intercambiados).

Se puede formar un conjunto de cuatro pruebas consistentes con T1'), T2'), T3), la prueba de Determinación, y T4'). Para obtener un conjunto consistente de cinco pruebas, una de ellas tiene que ser modificada. Por ejemplo, se podría elegir una Prueba de Proporcionalidad Doblemente Restringida (T2''), tal como

$$p\,(P^0,\ Q^0,\ k\,P^0,\ k\,Q^0) = k \quad \text{para todo} \quad k > 0 \qquad (41)$$

entonces, existiría un índice tal que satisfaga las cinco pruebas T1'', T2', T3, T4' y la prueba de Determinación.

Es evidente que para lograr un conjunto de pruebas consistentes, deben restringirse el alcance de las mismas, pero esto produce propiedades no deseables desde el punto de vista práctico. Sin embargo, esto no debería dar la impresión de ser un problema sin solución aparente debido a que podría existir otro índice aún no descubierto compatible con un conjunto de pruebas mucho menos restrictivas que las aquí mencionadas. El índice continuo de Divisia a tratarse más adelante se aproxima a esta situación.

Desde el punto de vista práctico, muchas veces no se requiere un índice que sea consistente. Los trabajos empíricos con funciones de producción en la mayoría de los sectores de una economía, proceden frecuentemente a lo largo de economías de escala constantes y, como consecuencia de esto, los índices para insumos y productos utilizados corresponden a aquellos del caso homogéneo. Para la mayoría de los sectores donde no existen grandes cambios en tecnología, el supuesto de un avance tecnológico neutral en el sentido de Hicks es realístico. Por otra parte, el supuesto de homoteticidad en la teoría del consumo es altamente restrictivo. Sin embargo, debido a que la tendencia es hacia una mayor colección de datos a nivel microeconómico, se pueden resolver parcialmente los problemas creados por la distribución del ingreso y las diferencias de características del consumo regional de una manera eficiente construyendo índices para diversos niveles de ingresos y zonas geográficas, lo cual permitiría aceptar supuestos más restrictivos para los mismos.

V. *Indices de Divisia para el consumo y la producción*

Los índices tratados anteriormente consideran al tiempo como una variable discreta. Normalmente, los precios y las cantidades son vectores de observaciones realizadas a intervalos regulares, por ejemplo, cada año. Divisia [19] ha propuesto un índice, el cual considera los precios y las cantidades como funciones continuas del

19 Véase las conclusiones y recomendaciones de la Décima Conferencia Internacional de Estadísticas, Oficina Internacional del Trabajo, 1962.

tiempo derivando así un índice continuo muy conveniente, el cual se está adoptando en muchas aplicaciones prácticas debido a sus excelentes propiedades. La presentación usual es como sigue: Se puede concebir que en cualquier momento, el valor total del gasto está dado por el producto de dos factores, p y q, los cuales pueden considerarse representativos del nivel de precios y cantidades respectivamente, en forma escalar. El valor del gasto está dado por

$$P \cdot Q = \sum_i p_i q_i \tag{42}$$

diferenciado,

$$p\, dq + q\, dp = \sum_i (p_i\, dq_i + q_i\, dp_i) \tag{43}$$

dividiendo esta última expresión por la primera, y aplicando logaritmos, se puede escribir la expresión equivalente [20].

$$d \ln p + d \ln q = \sum_i \alpha_i\, d \ln p_i + \sum_i \alpha_i\, d \ln q_i \tag{44}$$

donde

$$\alpha_i = \frac{p_i q_i}{\sum_i p_i q_i}$$

representa la proporción del gasto total adjudicado al producto (o servicio) i. Supóngase por un momento que es legítimo separar los términos de la expresión (43) en la siguiente forma:

$$d \ln p = \sum_i \alpha_i\, d \ln p_i \tag{45}$$

$$d \ln q = \sum_i \alpha_i\, d \ln q_i \tag{46}$$

La integración de estos dos términos con respecto al tiempo permite obtener la siguiente expresión:

$$\ln p = \exp \left[\int \sum_i \alpha_i \frac{dp_i\ (t)}{p_i\ (t)} \right] \tag{47}$$

---

20 Usando la igualdad $\dfrac{d\ (p,\ q)}{pq} = d\ (\ln pq)$

y reemplazando α_i es:

$$\ln p = \exp \left[\int \sum_i \frac{p_i(t)\, q_i(t)}{\sum_i p_i(t)\, q_i(t)} \; \frac{d\, p_i(t)}{p_i(t)} \right] =$$

$$= \exp \left[\int \varphi(t)\, dp_i(t) \right]$$

existiendo una expresión similar para ln q. El antilogaritmo de esta expresión es el valor del índice de precios de Divisia el cual representa el cambio en el nivel de precios (en forma logarítmica) con respecto al tiempo. Como es el caso con muchos otros índices, el índice de Divisia es un promedio ponderado del cociente de precios:

$$\sum_i \alpha_i \ln \left[\frac{p_i(t)}{p_i(t-1)} \right] \tag{49}$$

donde el factor de ponderación α_i puede definirse para el período inicial, el período final o cualquier combinación de ponderación entre estos períodos de tiempo, normalmente, el promedio de los dos:

$$\frac{1}{2} (\alpha\, it + \alpha\, it\text{-}1) \tag{50}$$

En su forma discreta, el índice puede escribirse como:

$$\ln p_t - \ln p_{t-1} = \sum_i \alpha_i \, (\ln p_{it} - \ln p_{it-1}) \tag{51}$$

el cual puede calcularse directamente a partir de datos de precios y cantidades.

El índice es exacto si se conoce la función $\varphi(t)$ que genera los precios y cantidades observados, por lo que el índice sería entonces la integral definida de una función continua. De no contarse con esta información y contando solamente con datos en forma discreta, el valor de la integral dependerá, en general, del trayecto que genera la función en los puntos intermedios entre observaciones, o sea, la trayectoria de los precios y cantidades entre una observación y la siguiente.

La aproximación del índice directo mejora a medida que los intervalos de observación disminuyen, por ejemplo, tomando datos mensuales en lugar de trimestrales. Esto se debe a que el índice tiene la propiedad de ser asintótico cuando t —> 0. Sin embargo, esto no elimina la indeterminación causada por la dependencia del índice con respecto a la trayectoria. Para tratar este problema, Houlten |18| hace uso del concepto de función potencial. Si existe una función potencial, el valor de la integral curvilínea entre dos puntos no depende de la trayectoria seguida durante la integración entre el punto inicial y final de la misma, y es igual al incremento (o disminución) de potencial entre los dos puntos extremos[21]. Si la trayectoria es cerrada, de manera que los puntos inicial y final coinciden, el valor de la integral es cero.

La función potencial existe si, y solamente si se cumplen las siguientes condiciones:

i) Existe una función continua y diferenciable (tal como la función de utilidad o la función de producción).

ii) Esta función es homogénea de primer grado.

iii) En cualquier punto de su hipersuperficie existe una componente octogonal (un vector gradiente) único hasta una transformación monotómica.

La condición ii) tiene la importante propiedad de ser la condición necesaria para separar legítimamente la expresión (44) en la (45) y (46).

Otra propiedad importante del índice Divisia en su forma continua, es que satisface la totalidad de las pruebas de Fisher con la única excepción de la prueba de Inversión de Factores a la cual se aproxima. Sobre esto, Theil |31| ha demostrado que la suma de las variaciones en los logaritmos de los índices Divisia de precios y cantidades en su forma discreta, es aproximadamente igual a la variación en el logaritmo del valor. Además, y más importante, el índice de Divisia es el único que tiene la propiedad de ser invariante, tema que se tratará a continuación.

Considérese una economía caracterizada por dos productos, factores de producción fijos y competencia perfecta en los mercados de factores de producción y productos. En el instante de tiempo t la producción de los dos productos ocurre en el punto A de la figura 1, sobre la FP, y es óptimo. Si en el instante de tiempo $t + 1$ se observa que el punto óptimo se ha trasladado a B, también sobre la FP, es obvio que no ha existido mejora alguna en la eficiencia de producción; todo lo que ha cambiado es la proporción en que se producen los dos productos sin que se haya producido ninguna mejora en la productividad global. En consecuencia, cualquier índice que mida los cambios de la productividad, debería permanecer cons-

---

21 Esto es análogo al trabajo A realizado por una carga eléctrica q en un campo eléctrico de intensidad E. El trabajo por unidad de carga está dado por la expresión

$$\frac{A}{q} = V_{1\text{-}2} = \int_1^2 E\,dl$$

donde V1-2 es el cambio potencial de la carga entre los puntos 1 y 2 como resultado del movimiento, y es independiente de la trayectoria seguida por la carga

$$\oint E\,dl = 0$$

entre 1 y 2. Si los puntos 1 y 2 coinciden, cualquiera sea la trayectoria

22 En la literatura se han usado varias expresiones para este fenómeno. Por ejemplo, se lo ha llamado "cambio tecnológico" (NADIRI, SOLOW), "progreso tecnológico" (STAR), "productividad total de factores de producción" (JORGENSON, GRILICHES, KENDRICK) hasta incluso "la medida de nuestra ignorancia" (STAR).

tante entre t y t + 1. Entonces, cuando se estime el incremento de productividad de la economía (para los dos productos) desde un instante en el tiempo a otro, como el cociente entre el índice de productos y el índice de insumos en ambos tiempos, se espera que no se registre ningún cambio en el índice de insumos ni en el índice de productos para un cambio entre A y B, debido a que en ambos casos se utilizan plenamente todos los factores de producción.

Compárese esto con un índice convencional que usa los precios del período inicial (final) como ponderación del período final (inicial). Por ejemplo, el índice de Laspeyres para el producto, usaría los precios en la situación A para ponderar los productos de la situación B, indicando así una reducción aparente del producto entre A y B.

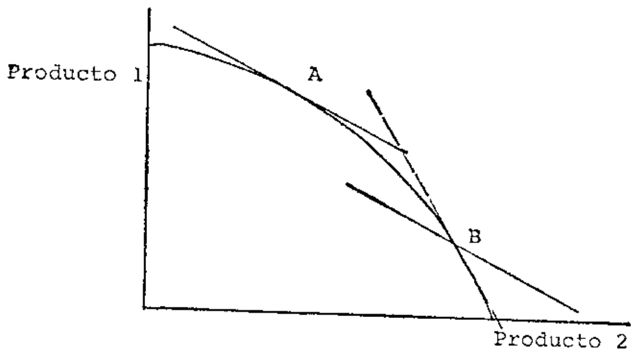

Figura 1

Para que un índice sea invariante, debe considerar los precios en A para las cantidades en A y los precios en B para las cantidades en B. Richter [22] dedujo de este análisis que el índice de Divisia es el único índice invariante debido a que cambia constantemente de ponderación a lo largo de la frontera de producción. Para la indexación de insumos se llega a la misma conclusión: el índice de Divisia es el único índice invariante.

Es de interés trasladar este análisis a la teoría del consumo y derivar las implicaciones económicas de invariancia en ese contexto. Cuando algunos precios aumentan y otros disminuyen, no es obvio que se desee un incremento o disminución del índice de precios. Cuando los aumentos y disminuciones de precios son tales que el valor total de las cantidades permanece constante, se puede decir que la variación de precios es neutra, y si se supone que $du/dt = 0$, por definición, el índice de precios no debe alterar su valor. En este caso, el índice de Divisia es invariante para variaciones de precios neutras y, además, es el único índice con esta propiedad.

Retornando al caso de la teoría de producción, es necesario a veces no contar con la condición ii) la cual requiere que la función de producción sea homogénea de primer grado. Para los casos en que existen economías o deseconomías de escala, se viola esta condición, pero, afortunadamente, existe una solución (parcial) para este problema. Si, como es común con datos de producción, aparte de la serie temporal de los precios y cantidades de los insumos, se tienen observaciones sobre el valor del producto V_0 (t) para cada intervalo en el tiempo, de manera tal que

$$V_0(t) = p_0(t)\, q_0(t) \tag{52}$$

donde p_0 (t) y q_0 (t) son los precios y cantidades del producto, y

$$q_0(t) = f\, q_1(t), q_2(t) \ldots\ldots q_n(t) \tag{53}$$

es la función de producción del producto (o servicio) q_0, se puede modificar la expresión (48) de la siguiente manera:

$$\exp\left[\int \sum_i \frac{p_i(t)\, q_i(t)}{p_0(t)\, q_0(t)} \; \frac{d\, p_i(t)}{p_i(t)}\right] \tag{54}$$

donde la ponderación es ahora la proporción de cada insumo en el valor total del producto, y no en el valor total de los insumos.

El hecho que se elimine la condición ii) no implica que se ignore la dependencia del índice con respecto a la trayectoria. Puede demostrarse que el índice (54), que llamamos quasi-Divisia, puede ser independiente de la trayectoria si se cumple que

$$f_i = \frac{p_i(t)}{p_0(t)} \tag{55}$$

En otras palabras, si existen economías o deseconomías de escala, la expresión (55) puede reemplazar la condición ii) y obtenerse así un índice independiente de la trayectoria.

Desafortunadamente, no se cuenta con un índice quasi-Divisia en la teoría del consumo debido a la ausencia de una tercera serie observable independiente como V_0 (t).

La aplicación más común del índice de Divisia se encuentra en el área de producción para indexar productividad. Considérese el caso de una tecnología con m componentes del producto total y, por consiguiente, m precios, uno para cada producto. El valor total del producto está dado por:

$$pY = p_1Y_1 + p_2Y_2 + \ldots\ldots\ldots + pm\ Ym \tag{56}$$

Diferenciando totalmente esta expresión con respecto al tiempo y dividiendo ambos lados por el valor total, se obtiene,

$$\frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{Y}}{Y} = \sum_i \omega_i \left(\frac{\dot{p}_i}{p} + \frac{\dot{Y}_i}{Y_i} \right) \qquad (57)$$

donde el punto indica derivadas con respecto al tiempo y las ponderaciones, como en el caso anterior, son las proporciones del valor de cada producto en el valor total del mismo,

$$\omega_i = \frac{p_i\, Y_i}{\sum_j p_j\, Y_j} \qquad (58)$$

Separando la expresión (57) se obtienen las expresiones del índice continuo para los precios y cantidades del producto:

$$\frac{q^0}{q} = \sum_i \omega_i \frac{q_i^0}{q_i} \quad ; \quad \frac{Y^0}{Y} = \sum_i \omega_i \frac{Y_i^0}{Y_i} \qquad (59)$$

Estas dos expresiones representan la tasa de crecimiento del índice Divisia con respecto al tiempo, las cuales pueden reducirse a expresiones similares a aquellas para el valor del índice. El tratamiento para los insumos es similar al de los productos.

Habiéndose obtenido los índices de Divisia para los insumos y los productos, es necesario combinarlos para obtener así el índice de productividad. Por productividad se define aquí el residuo de la función de producción luego de haberse tenido en cuenta todos los insumos y todos los productos. Este residuo se obtiene luego de imponer el constreñimiento teórico que la función de producción es homogénea de primer grado (no existen economías o deseconomías de escala). De existir economías o deseconomías, éstas aparecerían como parte del valor de productividad. El residuo que se obtiene, mide entonces los cambios tecnológicos, las economías o deseconomías debidas a escalas de operación como también cualquier discrepancia entre la realidad y el modelo aquí considerado. Esto incluiría externalidades, mejoras en los medios de producción, mejoras en los métodos de dirección de las empresas, el proceso de aprendizaje interno del personal de las mismas debido a la experiencia ganada en la tarea de producción y todo otro factor que afecte el resultado final del proceso [22].

Para obtener el valor residual, la función de producción toma la forma

$$Q\ (t) = f\ [\, t\ ,\ x_1\ (t) \ldots\ldots x_n\ (t)\,] \qquad (60)$$

donde t, por tiempo, se incluye para que indique cambios en la productividad. Se presume que f ( ) tiene las propiedades A1) .....A6). Tomando la primera derivada con respecto al tiempo, es:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = f_1 \, [\, t \, , x_1 \, (t) \ldots\ldots x_n \, (t) \,] + \tag{61}$$

$$+ \sum_{i=1} f_{1+i} \, [\, t \, , x_1 \, (t) \ldots\ldots x_i \, (t) \,] \frac{d \, x_i \, (t)}{dt}$$

Debido a que los cambios en la productividad se incluyen solamente en f_1, la tasa de crecimiento de la productividad está dada por

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\frac{dQ}{Q}}{Q} - \frac{\sum_i f_{1+i} \frac{dx_i}{dt}}{Q} \tag{62}$$

y, debido a que f ( ) se presume homogénea de primer grado,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} f_{1+i} \, x_i \tag{63}$$

Además, si se presume existe competencia perfecta en los mercados de insumos y de productos, se puede escribir la expresión anterior como sigue:

$$\frac{d \ln f}{dt} = \frac{\frac{dQ}{Q}}{Q} - \frac{\sum_i \omega_i \frac{dx_i}{dt}}{\sum_i \omega_i \, x_i} \tag{64}$$

integrando entre los períodos 0 y 1, resulta

$$\ln \frac{F\ (1)}{F\ (0)} = \int_0^1 \left(\frac{\frac{dQ(t)}{dt}}{Q(t)} - \frac{\sum_i \omega_i \ (t) \frac{dx_i(t)}{dt}}{\sum_i \omega_i \ (t) \ x_i \ (t)} \right) dt \tag{65}$$

$$\frac{F\ (1)}{F\ (0)} = \frac{\frac{Q\ (1)}{Q\ (0)}}{\exp \int \left(\frac{\sum_i \omega_i \ (t) \frac{dx_i \ (t)}{dt}}{\sum_i \omega_i \ (t) \ x_i \ (t)} \right) dt}$$

El denominador de esta expresión es el índice Divisia de insumos $\frac{N(1)}{N(0)}$, entonces:

$$\frac{F(1)}{F(0)} = \frac{\dfrac{Q(1)}{Q(0)}}{\dfrac{N(1)}{N(0)}} \tag{66}$$

El incremento porcentual de la productividad es igual al incremento porcentual del producto en relación con el incremento porcentual de los insumos. En el caso de una función de producción de más de un producto, en lugar del cociente $Q(1)/Q(0)$ se tiene el cociente entre los índices Divisia de los productos, de manera que

$$\frac{F(1)}{F(0)} = \frac{\exp \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\sum_i p_i(t) \dfrac{dy_i(t)}{dt}}{\sum_i p_i(t) \quad y_i(t)} \right) dt}{\exp \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\sum_i \omega_i(t) \dfrac{dx_i(t)}{dt}}{\sum_i \omega_i(t) \quad x_i(t)} \right) dt} = \frac{\dfrac{M(1)}{M(0)}}{\dfrac{N(1)}{N(0)}} \tag{67}$$

donde y_i es la cantidad del producto *i* y M es el índice Divisia de los productos. De la misma forma que el índice de productividad de Kendrick |20| es el cociente entre el valor del producto y el valor de los insumos para el caso discreto; en el caso continuo, la productividad se obtiene como la relación entre el incremento del índice Divisia de productos y el incremento en el índice Divisia de insumos.

VI. Aproximaciones al índice verdadero

La teoría del consumo permite derivar el concepto de índice verdadero. Como se ha visto anteriormente, la naturaleza ordinal de la función de utilidad hace que sea imposible calcular el valor de un índice. Sin embargo, la misma teoría permite en ciertos casos determinar en qué forma los índices normalmente utilizados en la práctica se aproximan al índice verdadero.

Si las preferencias son homogéneas (homotéticas para el conjunto de consumidores) es posible escribir

$$e(p, q) = \theta(p) \phi(q) \tag{68}$$

o sea, una función separable en términos de los niveles de precios y de cantidades. En el punto óptimo,

$$\theta(p) \phi(q) = PQ \tag{69}$$

Si se cuenta con dos observaciones en dos instantes de tiempo (o espacios) y el consumidor maximiza su función de utilidad limitada a su ingreso en el cual se considera fijo,

$$\theta(p_0)\,\phi(q_0) = P^0Q^0 \qquad \theta(p_1)\,\phi(q_1) = P^1Q^1 \tag{70}$$

y $\qquad \theta(p_0)\,\phi(q_0) \leqq P^0Q^1 \qquad \theta(p_1)\,\phi(q_1) \leqq P^1Q^0$

entonces, se verifica que,

$$p(P^1, P^0)\; q(Q^1, Q^0) = e^{1\text{-}0} \tag{71}$$

donde $\quad p(P^1, P^0) = \dfrac{\theta(p_1)}{\theta(p_0)}$ y $q(Q^1, Q^0) = \dfrac{\phi(q_1)}{\phi(q_0)}$

debido a la condición de homogeneidad, y

$$e^{1\text{-}0} = \frac{e^1}{e^0} \qquad \text{donde} \tag{72}$$

$$e^0 = P^0Q^0 \qquad \text{y} \qquad e^1 = P^1Q^1$$

Designando por λ el índice de Laspeyres y por π el índice de Paasche, es fácil demostrar que el índice verdadero de precios $p(P^1, P^0)$ está limitado por los índices de precios de Paasche y Laspeyres, y que lo mismo sucede entre el índice verdadero $q(Q^1,Q^0)$ y los índices Paasche y Laspeyres de cantidades:

$$\pi\, p = \frac{P^1Q^1}{P^0Q^1} \leqq p(P^1, P^0) \leqq \frac{P^1Q^0}{P^0Q^0} = \lambda\, p \tag{73}$$

$$\pi\, q = \frac{P^1Q^1}{P^1Q^0} \leqq q(Q^1,Q^0) \leqq \frac{P^0Q^1}{P^0Q^0} = \lambda\, q$$

Esto es válido en el caso homotético. El índice de Laspeyres sobrestima el valor del índice verdadero, mientras que el de Paasche lo subestima. En el caso general, si la funicón de utilidad Q^{α} se estima en el período inicial, se verifica que:

$$p(P^1, P^0; Q^0) = \frac{e(P^1, Q^0)}{e(P^0, Q^0)} \leqq \lambda\, p \tag{74}$$

y, si la función de utilidad es la del período final, es

$$p(P^1, P^0; Q^1) = \frac{e(P^0, Q^1)}{e(P^1, Q^1)} \geqq \pi\, p \tag{75}$$

y, debido a la relación entre los índices de Laspeyres y Paasche,

$$\lambda\, p\; \pi\, q = \frac{e^1}{e^0} = \lambda\, q\; \pi\, p \tag{76}$$

se puede escribir que,

$$q(Q^1, Q^0; P^0) \leqq \lambda\, q \tag{77}$$

para los precios del período inicial, y, que

$$q\,(Q^1, Q^0 ; P^1) \leqq \pi\, q \tag{78}$$

para los precios del período final. Lo que no puede determinarse es si, en el caso general, el índice verdadero está limitado por los dos extremos. El índice verdadero se encuentra entre λ y π solamente en el caso homotético. En el caso general, no existen límites dobles, pudiendo establecerse solamente límites simples como lo indican las expresiones (74), (75), (77) y (78) más arriba.

En la teoría de producción, también puede demostrarse la existencia de límites dobles entre el índice verdadero el de Laspeyres y Paasche para el caso homotético, excepto que los signos están intercambiados con respecto a la teoría del consumo; el índice de Laspeyres subestima y el de Paasche sobrestima al índice verdadero.

$$\lambda\, y = \frac{Y^1X^0}{Y^0X^0} \leqq y(Y^1, Y^0) \leqq \frac{Y^1X^1}{Y^0X^1} = \pi\, y \tag{79}$$

$$\lambda\, x = \frac{Y^0X^1}{Y^0X^0} \leqq x(X^1, X^0) \leqq \frac{Y^1X^1}{Y^1X^0} = \pi\, x$$

En el caso general no homotético, no existen límites dobles sino simples, como sigue:

$$y\,(Y^1\ ,\ Y^0\ ,\ X^0) \geqq \frac{X^1X^0}{Y^0Y^0} = \lambda\, y \tag{80}$$

$$y\,(Y^1\ ,\ Y^0\ ,\ X^1) \leqq \frac{Y^1X^1}{Y^0X^1} = \pi\, y$$

$$x\,(X^1\ ,\ X^0\ ,\ Y^0) \geqq \frac{X^1Y^0}{X^0Y^0} = \lambda\, x$$

$$x\,(X^1\ ,\ X^0\ ,\ Y^1) \leqq \frac{X^1Y^1}{X^0Y^1} = \pi\, x$$

Cuando el parámetro tecnológico b cambia, produce expansiones o contracciones de la FP las que deberían ser indicadas por el índice de cantidades. En el caso homotético, y debido a que las FP no pueden cruzarse para variaciones en b, el índice de cantidades siempre indicará los cambios en la FP, el cual es exacto para este cambio. En el caso no homotético, existe siempre la posibilidad que las FP se crucen en algún punto, y en este caso, el índice de cantidades puede errar en gran medida si se usaran los precios del período inicial o los del período final.

Si $\lambda_x > 1$, esto indica que $x(X^1, X^0; Y^0) > 1$ y, por lo tanto, se sabe que la FP en la situación 1 se encuentra hacia afuera de X^0. También, si $\pi\, x < 1$, entonces $x(X^1, X^0; Y^1) < 1$ y la FP en la situación 0 se encuentra fuera de X^1. Lo que no puede determinarse es si una de las FP se encuentra fuera de la otra en todos sus puntos.

Puede suceder que, simultáneamente, $\lambda_x < 1$ y $\pi_x > 1$. En este caso, nada se puede decir sobre la dirección de cambio de la FP. Por supuesto, esto no puede suceder en el caso homotético pero, en general, debido a que los índices λ y π solamente tienen límite simple con respecto al índice verdadero, nada se puede inferir sobre πx a partir de $\lambda x > 1$ o a cerca de λx sabiendo que $\pi x < 1$.

Los índices de Palgrave y el Ideal de Fisher, también se encuentran dentro del intervalo delimitado por los índices de Paasche y Laspeyres en el caso homotético. El índice Ideal es el promedio geométrico de los límites del intervalo

$$(\lambda p \pi p)^{1/2} \quad \text{y} \quad (\lambda q \pi q)^{1/2} \tag{81}$$

El índice de Palgrave es menor o igual que el índice de Laspeyres

$$\prod_i (S_i^0/S_i^1)^{\sigma_i^1} \leqq \sum_i \sigma_i^1 (S_i^0/S_i^1) \tag{82}$$

debido a la correspondencia entre el promedio aritmético y el promedio geométrico de una serie de números positivos. Por la demostración, véase Afriat |1|.

Se puede analizar una situación particular del caso general cuando el nivel de utilidad permanece constante, o sea, cuando $u(Q^1) = u(Q^0)$. Como es evidente por la definición, el índice de cantidades para este caso es $q=1$ y el índice de precios se conoce exactamente como e_1/e_0; el cociente entre los gastos en el período inicial y final.

Como es aparente, un promedio, cualquiera sea su naturaleza, entre los índices de Laspeyres y Paasche, se aproxima al índice verdadero en el caso homotético. Samuelson |23| demostró que esta presunción es válida y estableció el Teorema de Exactitud, el cual demuestra que en el caso homotético cualquier promedio simétrico entre λ y π aproxima el índice verdadero hasta un orden de aproximación de tercer grado. Por ejemplo, el índice Ideal aproxima al índice verdadero con un residuo de la forma

$$\frac{p(Q^1)}{p(Q^0)} - (\lambda p \pi q)^{1/2} = 0 + \varepsilon 0 + \varepsilon^2 0 + \varepsilon^3 r(\varepsilon) \tag{83}$$

donde $r(\varepsilon)$ adquiere un valor finito para $\varepsilon = 0$.

Se ha mencionado con anterioridad que existe un gran número de funciones de utilidad o funciones de producción (llamadas de ahora en más funciones agregativas) las cuales tienen un índice exacto. Byushgens (1925), Konyus y Byushgens (1926), Frisch (1936), Wald (1939), Pollack (1971) y finalmente Afriat (1972) han demostrado que si la función de agregación es de la forma cuadrática

$$f(x) = (x'Ax)^{1/2} = \Big(\sum_j^n \sum_k^n x_j a_{jk} x_k\Big)^{1/2} \tag{84}$$

donde $a_{jk} = a_{kj}$,

el índice Ideal de cantidades es exacto para ella, no sea, se verifica que,

$$\frac{f(x')}{f(x^o)} = qI_d (P^o, P', X^o, X') \tag{85}$$

Entonces, normalizando al período inicial haciendo $f(x^o) = 1$, el índice ideal de cantidades tiene exactamente el valor de $f(x)$ a través del tiempo. Konyus y Byuschgens (1926) proporcionan otro ejemplo de número índice exacto para una función de agregación del tipo Cobb-Douglas. El índice exacto para esta función es el índice de cantidades geométrico.

$$\frac{f(x')}{f(x^o)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^1}{x_i^o}\right)^{S_i} \tag{86}$$

De manera similar, Diewert |9| demuestra que el índice de cantidades propuesto por Tõrnqvist-Theil.

$$\frac{f(x')}{f(x^o)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_n^1}{x_n^o}\right)^{\frac{1}{2}(S_n^1 + S_n^o)} = q_o(P^o, P', X^o, X') \tag{87}$$

es exacto para una función translogarítmica homogénea de la forma

$$\ln f(x) = \alpha_o + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \ln x_n + \frac{1}{2} \sum^{N} \sum^{N} \gamma_{jk} \ln x_j \ln x_k \tag{88}$$

donde $\sum \alpha_n = 1$, $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$ y $\sum \gamma_{jk} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots\ldots N$

Este índice corresponde también al índice Nº 124 de Fisher y ha sido usado como aproximación directa al índice de Divisia por Christensen y Jorgenson y, en el contexto de productividad, por Star y Hall. El índice de precios correspondiente a este índice de cantidades puede hallarse como aquel que satisface la prueba de inversión de factores.

$$\tilde{P}_o = \frac{P' X'}{P_o X^o q_o} \tag{89}$$

El argumento empleado más arriba puede repetirse para una función de costo unitaria translogarítmica

$$\ln c(p) = \alpha_o^* + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^* \ln p_n + \frac{1}{2} \sum_j^N \sum_k^N \gamma_{jk}^* \ln p_j \ln p_k \tag{90}$$

donde $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^* = 1$, $\gamma_{jk}^* = \gamma_{kj}^*$ y $\sum_{k=1}^{N} \gamma_{jk}^* = 0$ para $j = 1, 2, \ldots N$

El índice exacto para esta función es el índice Nº 123 de Fisher

$$\frac{c(p^1)}{c(p^o)} = \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{P_n^1}{P_n^o}\right]^{\frac{1}{2}(S_n^1 + S_n^o)} = p_o(P^o, P^1, X^o, X^1) \tag{91}$$

El índice de cantidades correspondiente $\tilde{q}_o$ puede encontrarse por medio de la prueba de inversión de factores.

Theil (1968) y Kloeck (1967) generalizaron la función de agregación para los índices p_o y q_o para un caso que no requiera la homogeneidad de la función translogarítmica. Considérese una función f(x) que satisfaga las condiciones A1)...A6). Defínase la función de costo total por

$$C\,(u;\ p) = \min_x\ [\,PX:\ f(x) \geqq u;\ x \geqq On\,] \tag{92}$$

y la función de utilidad indirecta por

$$g\,(P/Y) = \max_x\ [\,f(x):\ PX \leqq y,\ x \geqslant On\,] \tag{93}$$

donde On es un vector de ceros. El índice del costo de vida verdadero evaluado al nivel de utilidad U se define como

$$p\,(P^o,\ P^1,\ U) = C(u,\ P^1)/C(u^o,\ P) \tag{94}$$

y el índice de cantidades de Theil evaluado a precios P se define como

$$q_t\ (P;\ u^o,\ u^1) = C(u^1;\ P)/C(u;\ P^o) \tag{95}$$

Si la función de costos es de la forma translogarítmica general

$$\ln C(u;P) = \overset{*}{\alpha}_o + \sum_{i=1}^{N} \overset{*}{\alpha}_i \ln p_i + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \overset{*}{\gamma}_{jk} \ln p_j \ln p_k +$$

$$+ \overset{*}{\beta} \ln u + \overset{*}{\sigma} (\ln u)^2 + \sum_{k=1}^{N} \overset{*}{\varepsilon}_i \ln u \ln p_i \tag{96}$$

donde $\Sigma \overset{*}{\alpha}_i = 1$, $\overset{*}{\gamma}_{jk} = \overset{*}{\gamma}_{kj}$, $\Sigma \overset{*}{\gamma}_{jk} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots N$, y $\Sigma \overset{*}{\varepsilon}_j = 0$ de manera que C(u; P) es homogénea de primer grado en los precios, sucede que el índice p_o es exacto para esta función, o sea se cumple que

$$p_o\ (P^o,\ P',\ X^o,\ X') = \frac{C\,(u^*;\ P')}{C\,(u^*;\ P^o)} \tag{97}$$

donde $u^* = (u^o\, u^1)^{1/2}$ y p_o está definido más arriba.

Se puede también proveer de justificación para el índice de cantidades q_o en el contexto de una función de agregación la cual no sea necesariamente homogénea. Dada una función de agregación f( ) y una cantidad u = f(x), defínase como función de distancia a la expresión

$$D\,(u;\ X) = \max_k\ [\,K:\ f(\frac{x}{k}) \geqq u\,] \tag{98}$$

Usando el lenguaje de la teoría del consumo, la función de distancia indica la proporción en que uno tiene que deflacionar (o inflacionar) el vector del consumo X de manera de obtener un punto sobre la superficie de utilidad indicada por u. Si la función de agregación es de la forma

$$\ln D\,(u; X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ln x_i + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \gamma_{jk} \ln x_j + $$

$$+ \beta \ln u + \partial (\ln u)^2 + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \ln u \ln x_i \qquad (99)$$

donde $\sum \alpha_i = 1$, $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$, $\sum \gamma_{jk} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots .N$ y $\sum \varepsilon_i = 0$, puede demostrarse que el índice de cantidades de Malmquist es exacto para esta función, o sea

$$q_m\,(X^o, X^1; u) = \frac{D\,(u;\ X^1)}{D\,(u;\ X^o)} \qquad (100)$$

y también que

$$q_o\,(P^o, P^1, X^o, X^1) = \frac{D\,(u^*, X')}{D\,(u^*, X^o)} = q_m\,(X^o, X^1, u^*) \qquad (101)$$

donde $u^* = (u^o\, u^1)^{1/2}$ y q_o se definió anteriormente.

Estos mismos índices pueden utilizarse en el contexto de la medida de productividad. Asúmase que en equilibrio, la totalidad de los insumos iguala la totalidad de los productos

$$g\,(y) = f\,(x) \qquad (102)$$

donde y es el vector de productos y x el vector de insumos, y las funciones g(y) y f(x) son homogéneas de primer grado. Para precios de insumos $w^r \gg Om$ y de productos $p^r \gg On$ (donde Om y On son vectores de ceros con dimensión M y N respectivamente) y para $r = 0{,}1$ donde r es el período de tiempo considerado, maximizando el beneficio económico

$$\mathrm{Max}_{x,y}\ [\,w^o y - p^o x:\ g(y) = f(x)\,] \qquad (103)$$

se obtiene el vector solución $y^o \gg Om$ y $x^o \gg On$ para el período inicial. Maximizando el beneficio económico en el segundo período

$$\mathrm{Max}_{x,y}\ [\,w^1 y - p^1 x:\ g(y) = (1 + \tau)\ f(x)\,] \qquad (104)$$

Se obtiene $y^1 \gg Om$ y $x^1 \gg On$ donde $(1+\tau)$ es una medida del cambio tecnológico neutro (en el sentido de Hicks). En el punto óptimo se verifica que

$$g\,(y^o) = f\,(x^o) \qquad g\,(y^1) = (1+\tau)\ f\,(x^1) \qquad (105)$$

Puede también demostrarse que $y^r \gg Om$ es la solución de la minimización de insumos

$$\min_y\ [\,g(y):\ w^r\,y = w^r y^r,\ y \geqslant Om\,]\ \text{para } r = 0{,}1 \qquad (106)$$

de manera que

$$\frac{g(y^1)}{g(y^o)} = \prod_{m=1}^{M} (y^1_m / y^o_m)^{1/2}\ (w^1_m\, y^1_m / w^1\, y^1 + w^o_m y^o_m / w^o y^o) \qquad (107)$$

y que $x^r \gg On$ es la solución de la maximización de productos

$$\max_x \left[f(x) : p^r . x = p^r . x^r, x \geqslant On \right] \text{ para } r = 0,1 \tag{108}$$

Sustituyendo Qo y ( ) en la expresión

$$\frac{g(y^1)}{g(y^o)} = (1 + \tau) \frac{f(x^1)}{f(x^o)} \tag{109}$$

se obtiene el índice de cambio tecnológico

$$1 + \tau = \frac{\prod_{m=1}^{M} (y^1_m/y^o_m)^{1/2} (w^1_m \; y^1_m/w^1 \quad y^1 + w^o_m y^o_m/w^o y^o)}{\prod_{n=1}^{N} (x^1_n/x^o_n)^{1/2} (p^1_n \; x^1_n/p^1 x^1 + p^o_n \; x^o_n/p^o x^o)} \tag{110}$$

Debe tenerse en cuenta que esta medida de productividad es consistente con una función de agregación si la función de transformación pudiera ser representada por una función translogarítmica homogénea.

Parte de la investigación de los números índices ha, sin embargo, seguido otros delineamientos. Esto se relaciona con una categoría general de expresiones conocidas en la literatura matemática bajo el nombre de promedio quadrático de orden r representado por la siguiente expresión

$$f_r(x) = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \; x_i^{r/2} \; x_j^{r/2} \right]^{1/r} \tag{111}$$

La función $f_r(x)$ es homogénea, $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq N$ son parámetros, y el dominio de definición de la función se restringe a $x(x_1, x_2, \ldots . x_n) \gg On$ de manera que $\Sigma \Sigma a_{ij} \; x_i^{r/2} \; x_j^{r/2} > 0$ y f_r sea cóncava. Esta forma se debe a McCarthy (1967), Kidiyala (1971-72), Denny (1972, 1974) y Hasenkamp (1973).

Si $r = 1$ la expresión se reduce a una forma lineal generalizada, y si todos los $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, se reduce a la forma funcional de la función de producción con elasticidades de substitución constante de Arrow, Chenery, Minhas y Solow (1961).

Si $r = 2$ se reduce a la expresión cuadrática homogénea $(x' Ax)^{1/2}$ de Konyus-Byushgens.

El límite de la función para $r \longrightarrow 0$ es la función translogarítmica homogénea.

Dada la generalidad de $f_r(x)$, se puede ahora repetir el análisis anterior, es decir, definir índices exactos para ciertas formas particulares de la función. Por ejemplo, se puede construir un índice de cantidades para un promedio quadrático de orden r, para $x^o \gg O_n$, $x^1 \gg O_n$, $p^o > 0$, $p^1 > 0$ y para $r \neq 0$ como

$$Q_r\,(p^o, p^1, x^o, x^1) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (x^1_i/x^o_i)^{r/2}\ \ (p^o_i\, x^o_i/p^o\, x^o)}{\sum_{k=1}^{N} (x^o_k/x^1_k)^{r/2}\ \ (p^1_k\, x^1_k/p^1\, x^1)} \right]^{1/r} \qquad (112)$$

y también encontrar el índice de precios implícito para este índice de cantidades, como

$$\widetilde{P}_r\,(p^o, p^1, x^o, x^1) = \frac{p^1\, x^1}{p^o\, x^o\, Q_r} \qquad (113)$$

De manera similar, para la función de costo unitario de la forma de promedio quadrático de orden $r \neq 0$

$$c_r\,(p) = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\ p_i^{r/2}\ p_j^{r/2} \right]^{1/r},\quad b_{ij} = b_{ji},\ r \neq 0 \qquad (114)$$

se puede definir el índice de precios

$$p_r\,(p^o, p^1, x^o, x^1) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (p^1_i/p^o_1)^{r/2}\ \ (p^o_i x^o_i/p^o\ \ x^o)}{\sum_{k=1}^{N} (p^o_k/p^1_k)^{r/2}\ \ (p^1_k x^1_k/p^1\ \ x^1)} \right]^{1/r} \qquad (115)$$

y hallarse el índice de cantidades implícito Qr.

Una de las principales ventajas de esta función es que puede proveer una aproximación de segundo grado a cualquier función positiva, homogénea de primer grado, con derivadas primeras y segundas continuas definida en el espacio positivo de comodidades, y que el índice

$$\widetilde{Q}_r\,(p^o, p^1, x^o, x^1) = \frac{f_r\,(x^1)}{f_r\,(x^o)} \qquad (116)$$

es exacto para dicha función, para $r \neq 0$. Se pueden hallar resultados similares para P_r, $\widetilde{P}_r$, Q_r. En el caso en que $r = 2$ se tiene la igualdad

$$P_2\, \widetilde{Q}_2 = \widetilde{P}_2\, Q_2 \qquad (117)$$

Entonces, el promedio cuadrático de orden $r \neq 0$ tiene un conjunto de índices exactos, y para diferentes valores de r, pueden obtenerse otros conjuntos de índices exactos.

Desde el punto de vista práctico, y teniendo en cuenta que la mayoría de los índices más arriba mencionados se hallan ampliamente difundidos en su uso, sería conveniente examinar en esta última parte la comparación entre varios de ellos. Diewert (1976) ha completado el análisis de Fisher con la adopción de algunos de los índices más modernos para una serie de datos de precios y cantidades. Estos datos se refieren a la economía norteamericana entre los años 1913 y 1918, y corresponden a un período de gran fluctuación de precios. Este período ha sido expresamente elegido por sus características de variación y es de esperarse que la divergencia entre el valor de los diferentes índices sea algo más reducida en períodos en que las oscilaciones sean más normales.

TABLA 1

Comparación de algunos precios índices

Precio Indice	1913	1914	1915	1916	1917	1918
Paasche	100	100.30	100.10	114.40	161.10	177.40
Laspeyres	100	99.90	99.70	114.10	162.10	177.90
P_0	100	100.16	99.90	113.80	162.10	177.80
$\tilde{P}_0$	100	100.16	99.85	114.25	161.74	178.16
$\tilde{P}_1$	100	100.13	99.89	114.20	161.70	177.83
P_1	100	100.12	99.90	114.24	161.73	177.76
P_2	100	100.12	99.89	114.21	161.56	177.65

Como puede observarse, la comparación entre uno u otro índice es satisfactoria en la mayoría de los casos. Por un lado debe tenerse en cuenta que existen errores propios en la colección de datos, lo cual pueden no garantizar el uso de una fórmula más refinada. Por otra parte, los trabajos empíricos son frecuentemente restringidos en cuanto al costo de computación y simplicidad del índice. Esto hace que deba tolerarse un error por parte del índice mismo el cual se agregaría al error endógeno de los datos. Debe aclararse aquí que el error no está definido como el error porcentual entre el índice usado y el verdadero, sino a la discrepancia entre el producto de un índice de precios y uno de cantidades en dos situaciones diferentes con respecto al cociente entre los gastos en ambos períodos. O sea, se impone de antemano la condición sobre la cual se define el error para luego evaluar el mismo.

Siguiendo este criterio, se puede calcular el error para fórmulas de índices. Por ejemplo, el índice Ideal de Fisher proporciona un valor con un error estimado del orden de 1 en 10.000 (0,01%). Como se ha mencionado anteriormente, podría prefinirse un índice no tan "preciso" pero que fuere más simple de computar. En este caso, se puede utilizar, para precios, el índice agregativo con ponderación cruzada aritmética, el cual es una transformación del propuesto por Edgeworth y cuya expresión es

$$\frac{\Sigma\ (q_0 + q_1)\ P_1}{\Sigma\ (q_0 + q_1)\ P_0} \qquad (118)$$

Este índice no difiere apreciablemente del índice Ideal, y tiene un error del orden de un cuarto de uno porciento (0,25%). Si no se cuenta con suficiente información para el índice Ideal o el de Edgeworth, los índices de Laspeyres o Paasche proporcionan una buena aproximación, generalmente del orden del 1% de error.

Los índices obtenidos a partir de la formulación cuadrática de orden $r \neq 0$ para $r = 1$, o sea para la expresión de P_1 y los índices designados como $\widetilde{P}_0$ y P_0 producen series que, en general se encuentran entre aquellas obtenidas por los índices de Paasche y Laspeyres, y se aproximan al índice Ideal (P_2) en un grado considerable con un error menor que el 1%.

Es importante conceder que el término "error" está relacionado con una condición, que si bien deseable, es arbitraria. En otras palabras, debido a la naturaleza ordinal de los índices, el término "error" no tiene validez real. Por las mismas razones, podría imponerse otra condición básica para definir el término, y obtener resultados diferentes. Debido a esto, lo antedicho no debe tomarse con sentido literal, en el entendimiento que no constituye en sí mismo la última palabra del tema, sino como una relación empírica que brinda cierta información sobre los costos y beneficios entre costos de computación y lo que aquí se denomina "error" del índice.

REFERENCIAS

|1| AFRIAT, S. N. — "The Theory of International Comparisons of Real Income an Prices" en "International Comparisons of Prices and Output, D. J. Daly Ed., Nat. Bur. Econ. Res., Studies in Income and Wealth, Vol. 37, Nueva York, 1972.

|2| BERGSON, A. — The Real National Income of Soviet Russia Since 1928 - Harvard University Press, Cambridge, 1961.

|3| BERNDT, E. R. & CHRISTENSEN, L. R. — Testing for the Existence of a Consistent Aggregate Index of Labour Inputs - Am. Econ. Rev. 64, 3, 1964.

|4| CHRISTENSEN, L. R. & JORGENSON, D. W. — U. S. Real Product and Real Factor Input, 1929 - 1967 - Review of Income and Wealth, Series 16, 1970.

|5| CHRISTENSEN, L. R. — The Measurement of U. S. Real Capital Input, 1929 - 1967. Review of Income and Wealth, 15, 1969.

|6| CHRISTENSEN, L. R. & JORGENSON, D. W. & LAU, L. J. — Transcendental Logarithmic Production Frontiers - The Rev. of. Econ. and Stat. 1973.

|7| DIEWERT, W. E. — An Application of the Shephard Duality Theorems: A Generalized Leontief Production Function - Journal of Political Economy, 79.

|8| DIEWERT, W. E. — Functional Forms for Revenue and Factor Requirements Functions - Intern. Econ. Rev. 15, 1, 1974.

|9| DIEWERT, W. E. — Exact and Superlative Index Numbers - Journal of Econometrics, 4, 1976.

|10| DRESCH, F. W. — Continuous Index Numbers and Quantitative Study of the General Economy - Berkeley Symposium.

|11| EICHHORN, W. — Fisher's Tests Revisited - Econometrica, 44, 2, 1976.

|12| FISHER, I. — The Making of Index Numbers - Tercera Ed., Publicado por A. M. Kelley, Nueva York, 1967.

|13| FISHER, F. M. & SHELL, K. — The Economic Theory of Price Indices - Academic Press, Nueva York, 1972.

|14| FRISCH, R. — Annual Survey of General Economic Theory: The Problem of Index Numbers - Econometrica, 4, 1936.

|15| HILLINGER, C. — Comment on Invariance Axions and Economic Indexes - Econometrica, 38, 5, 1970.

|16| HOUTHAKKER, H. S. — Compensated Changes in Quantities and Qualities Consumed - Rev. of Econ. Studies, 19, 1951-52.

|17| HOUTHAKKER, H. S. — Additive Preferences — Econometrica, 28, 2, 1960.

|18| HULTEN, C. R. — Divisia Index Numbers - Econometrica, 41, 6, 1973.

|19| JORGENSON, D. & GRILICHES, Z. — The Explanation of Productivity Change - Rev. Econ. Stud. 34, 1964.

|20| KENDRICK, J. W. — Productivity Trends in the United States - NBER - Princeton University Press, 1961.

|21| MOORSTEEN, R. H. — On Measuring Potential and Relative Efficiency - Quarterly Journal of Econ. 75, 1961.

|22| RICHTER, M. K. — Invariance Axioms and Economic Indexes - Econometrica, Vol. 34, 4, Octubre 1966.

|23| SAMUELSON, P. A. & SWAMY, S. — Invariant Economic Index Numbers and Cononical Duality: Survey and Synthesis - Amer. Econ. Rev. 64, 4, 1974.

|24| SAMUELSON, P. A. — Using Full Duality to Show that Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand - Econometrica, 33, 4, 1965.

|25| SCHUMPETER. — Business Cycles, Vol. 11, Nueva York, 1939.

|26| SHEPHARD, R. W. — Theory of Cost and Production Funcion - Princeton, University Press, New Jersey, 1970.

|27| SOLOW, R. M. — Technical Change and the Aggregate Production Function - The Rev. of. Econ. and. Stat., 39, 1957.

|28| STAR, S. — Accounting for the Growth of Output - Am. Econ. Rev. 64, 1, 1974.

|29| STAR, S. & HALL, R. — An Approximate Divisia Index of Total Factor Productivity - Econometrica, 44, 2, 1976.

|30| SWAMY, S. — Consistency of Fisher's Tests - Econometrica, 33, 3, 1965.

|31| THEIL, H. — Economics and Information Theory - North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1967.

|32| WOLD, H. & JUREEN, L. — Demand Analysis, Nueva York, 1953.

|33| NADIRI, M. I. — Some Approaches to the Theory and Measurement of Total Factor Productivity: A Survey - Journal of Economics, Literature, 1972.

|34| CHIANG, A. C. — Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw Hill, Nueva York, Segunda Edición, 1967.

UNA FORMULACION COMPACTA DE LA TEORIA DE LOS NUMEROS INDICES

RESUMEN

Se presenta en forma resumida el origen de los números índices tanto de precios como de cantidades y la extensión moderna incorporando la teoría del consumo y la teoría de producción. Están incluidos la mayoría de los índices discretos como así también algunas versiones del índice continuo de Divisia. El tema de las pruebas de Fisher y de la teoría de aproximaciones es analizado en detalle, y se presentan algunos ejemplos de índices exactos para funciones de agregación usuales.

Como complemento empírico, se ha realizado una comparación entre varias fórmulas de índices de precios para determinar el comportamiento relativo en una situación caracterizada por cambios bruscos de precios.

A BRIEF SURVEY OF INDEX NUMBERS THEORY

SUMMARY

Presents a compact formulation of the origins of index numbers for prices and quantities, as well as its modern extension incorporating consumption and production theory. Included are most discrete indexes and some versions of the continous Divisia index. The subject of Fisher's tests and the theory of approximations is analysed in detail and examples are given of indexes exact for certain common forms of the aggregation function.

As an empirical complement, and to determine their relative merits, a comparison of several index number formulae is included calculated for a period characterized by large price variations.