Económica. La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

CRITERIOS DE DESARROLLO ECONOMICO OPTIMO

ROLF R. MANTEL*

I. Introducción

En la literatura sobre desarrollo económico es frecuente hallar el concepto de crecimiento óptimo. Estas ideas se reflejan en las recomendaciones, al gobierno sobre medidas de política económica aunque no hay acuerdo entre los economistas sobre los criterios a adoptarse. La dificultad es inherente a la naturaleza del problema.

Comparaciones intertemporales de satisfacción son comparaciones de naturaleza política o ética, no económica.

Hay quienes propician la solución liberal, con respeto absoluto por las decisiones espontáneas de los ahorristas individuales mientras que los otros consideran que el balance entre los intereses de las distintas generaciones es un problema político o ético en el cual la solución de mercado no tiene ventajas "a priori" sobre las demás. En este sentido autores como *Harrod* y *Ramsey* insisten en que el bienestar de todas las generaciones debe pesar en toda consideración ética[1].

En el mundo contemporáneo el estado tiene enorme gravitación sobre la economía de un país, por lo cual es imposible exigir que su comportamiento sea "neutral" en el sentido liberal. La soluciones prácticas al problema son variadas, teniéndose en un extremo la solución colectivista en la cual las preferencias intertemporales del Estado sustituyen a las individuales, y por el otro un programa de Gobierno liberado más o menos al azar, en respuesta a necesidades fiscales.

En los países democráticos, la acción del gobierno está dada por la decisión de la mayoría, de modo que las preferencias intertemporales del Estado tienden a coincidir con las de la población, so pena de perder el voto en los

---

* Doctorado en Economía en la Universidad de Yale, Estados Unidos; Director del Centro de Investigaciones del Instituto Torcuato Di Tella; Profesor Titular de Teoría Económica en la Pontificia Univercidad Católica Santa María de los Buenos Aires.

[1] Koopmans, Tjalling C., "On the Concept of Optimal Economic Growth", en *The Econometric Approach to Development Planning,* Pontificae Academiae Scientiarum Scripta Varia Nº 28, Amsterdam, 1965, analiza con detalle estas distintas posiciones.

próximos comicios. Es de suponer que en estos casos una dirección consistente puede eliminar las deficiencias del sistema de mercado, complementándolo donde sea necesario acercar la tasa de ahorro a la deseada por el gobierno, en representación de los gobernados.

El propósito del presente trabajo es analizar las consecuencias de algunos criterios de optimización que han sido propuestos, por lo cual puede considerársele como una continuación de los trabajos de RAMSEY[2] TINBERGEN[3] y KOOPMANS[4]. La razón de esta exploración, de acuerdo con el último autor, reside en el hecho que el problema de desarrollo óptimo es demasiado complicado como para seleccionar un criterio antes de conocer los resultados de su aplicación. La misión del economista consiste entonces en presentar varios programas de desarrollo correspondientes a criterios de óptimo distintos, a fin de que luego pueda procederse a la selección política o ética.

El presente análisis se efectuará en términos agregados, de modo de enfocar la atención sobre el problema de la distribución intertemporal de ingresos; quedarán marginados los problemas de la distribución de los ingresos entre individuos de una misma generación, pertenezcan o no a una misma región económica del país en desarrollo. Por lo tanto, las soluciones que obtendremos serán aplicables a economías de distinto grado de colectivización; suponiendo que hay mercados perfectos para los bienes de consumo e inversión, tanto presentes como futuros, las diferencias en los programas resultantes se deben a diferencias en el criterio de óptimo, o, como diremos más adelante, en la tasa de preferencia intertemporal.

En primer lugar formalizaremos la noción de preferencias sobre planes de consumo, para luego analizar como se comporta una economía con recursos y tecnología conocidos cuando se le aplican diversos criterios de desarrollo óptimo.

---

[2] Ramsey, Frank P. "A Matehamtical Theory of Saving", *Economic Journal*, Diciembre 1962.

[3] Timbergen, Jan, "Optimum Savings and Utility Maximization Over Time", *Econometrica*, Abril 1960.

[4] Koopmans, Tjalling C., "On The Concept of Optimal Economic Growth", op. cit.

II. La función de bienestar social

A fin de poder opinar si un programa de desarrollo es aceptable o no, es necesario poseer una regla que permita decidir cuando un programa es superior a otro, o cuándo es indiferente. En otras palabras, tiene que ser posible ordenar los distintos programas, asignándoles algún valor que indique el lugar que les corresponde dentro del ordenamiento de preferencias. Esto significa que habrá alguna función de utilidad $\overline{W}$, de modo que sí x es un programa de desarrollo, $\overline{W}(x)$ representa el lugar que le corresponde según las preferencias. La función $\overline{W}$, cuando se refiere a una medida de satisfacción de la comunidad, recibe el nombre de función de bienestar.

Como el fin último, de la actividad económica es el consumo, los programas de desarrollo se juzgan en general por el programa de consumo que contienen.

Con algunas excepciones que conviene notar en ciertos criterios parciales, que se refieren a programas de duración limitada en los cuales el horizonte de planeación es un intervalo dado, se excluyen entre las variables que intervienen en la función de bienestar los bienes de capital que deben quedar al final del período. Estos son sustitutos del concepto económico que los subyace: la utilidad indirecta proporcionada por un mayor nivel de consumo posible después del horizonte del programa, debido a una mayor existencia de bienes de capital.

Del mismo modo, nadie podrá afirmar que una mayor tasa de crecimiento del consumo, del ingreso o del capital, de por sí signifiquen un mayor bienestar para la población (en el caso último, a corto plazo más bien lo contrario). Estos conceptos resumen, en forma vaga e imprecisa la idea de que mayor riqueza ayuda a una satisfacción mayor; pero en todos los casos, la verdadera medida de satisfacción deberá tener en cuenta los niveles de consumo de todas las generaciones presentes y futuras.

De acuerdo con lo antedicho el argumento x de la función de bienestar deberá interpretarse como un programa de consumo por habitante: para cada instante $t \geq 0$, dónde t=0 representa el presente, habrá una tasa de consumo por habitante $x(t)$. La utilidad de este consumo la representaremos con $u(x\ (t))$ indicando la satisfacción que la generación t-ésima deriva de este consumo.

Sea $r(x(t))$ la tasa instantánea de preferencia temporal, que suponemos depende de la tasa de consumo por habitante. Por definición, esta tasa mide los términos a que se estaría dispuesto a sacrificar consumo en el instante t a cambio de un aumento del mismo en un momento posterior t', de modo que el bienestar quede inalterado. En otros términos, una reducción en la utilidad del instante t en una unidad, debe compensarse con un incremento en la utilidad del instante t' de $1+ \ (t' - t)\ r(x\ (t))$.

Con estas definiciones, podemos escribir la función de bienestar social como

$$\overline{W}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t r(x(s))ds} u(x(t))dt$$

La forma bajo la cual se encuentra esta función en la literatura difiere en la forma de la función r que usualmente se considera independiente del programa, es decir, r es constante.

Introduzcamos la definición

$$W(t) = \int_t^{\infty} e^{\int_t^{t'} r(x(s))ds} u(x(t'))dt'$$

que como puede notarse si se compara esta expresión con la anterior representa la satisfacción que se deriva del programa x adelantado por un período de longitud t, despreciando la parte del programa correspondiente al intervalo inicial. Derivando con respecto a t, puede verificarse que resulta la ecuación diferencial, en la cual hemos suprimido el argumento t de todas las funciones como haremos en los sucesivo cuando no haya posibilidad de confusión:

$$\frac{dW}{dt} = r(x)W - u(x) \qquad (1)$$

de modo que conociendo una solución de esta ecuación podemos obtener la utilidad del programa completo notando que $\overline{w}(x) = W(0)$. Esta ecuación diferencial puede interpretarse como sigue: el aumento del bienestar social $\frac{dW(t)}{dt}$ proporcionado por un adelanto del programa por un período, depende del nivel de bienestar alcanzado ($W(t)$) y del consumo correspondiente al primer período ($x(t)$), sacrificado al efectuar el adelanto. Por lo tanto se ganarán "intereses" por el monto de $r.W$ ya que el programa estará sujeto a "descuento"'

a la tasa r por un período menor, y se perderá la utilidad del consumo, u. El resultado neto, indicado por la ecuación (1), nos indicará si conviene o no adelantar el programa.
La ecuación diferencial (1) es un caso especial de una formulación más general de $\overline{W}(x)$, que para el caso en que t toma sólo valores discretos ha sido desarrollada por KOOPMANS[5], y para t continua por el autor[6]. En este trabajo nos limitaremos a la formulación presentada, por ser de más fácil interpretación y permitir suficiente flexibilidad.

III. La Tecnología

A fin de determinar las posibilidades abiertas ante el país en crecimiento, fijaremos los siguientes supuestos sobre las posibilidades de consumo.

La población P crece a una tasa constante λ, de modo que, en un instante t dado tenemos

$$P(t) = e^{\lambda t} P(0)$$

Si $L(t)$ es la población activa y m la tasa de participación de la población en la fuerza de trabajo,

$$L(t) = e^{\lambda t} mP(0)$$

$K(t)$ representa el stock de capital empleado en la producción, que supondremos sujeto a una tasa de desgaste constante δ, de modo que $\delta\, K(t)$ es la inversión necesaria para mantener intacto el equipo de capital. Por lo tanto, la producción $Y(t)$ deberá cubrir la inversión neta $\frac{d}{dt}K(t)$, el consumo total $X(t)$ y la reposición de equipos, es decir

$$Y(t) = X(t) + \frac{d}{dt}K(t) + \delta K(t)$$

Suponemos que $Y(t)$ se produce utilizando capital y trabajo, por medio de una función de producción que cumple con los requisitos usuales de

---

[5] Koopmans, Tjalling C., "Stationary Ordinal Utility and Impatience", *Econometrica*, Abril 1960.

[6] Mantel, Rolf R., "Sobre la tasa de Preferencia Temporal", Trabajo no publicado.

rendimientos constantes a escala y tasa marginal de sustitución entre factores decreciente. También supondremos que ambos factores son indispensables para la producción. Esta relación puede escribirse como

$$\begin{aligned} Y(t) &= F(K(t), L(t)) \\ &= P(t)F\left[\frac{K(t)}{P(t)}, m\right] \\ &\equiv P(t) f(k(t)) \end{aligned}$$

dónde $k(t) \equiv K(t) / P(t)$ es la relación capital por habitante.

Si definimos a $x(t) \equiv X(t) / P(t)$ como consumo por habitante, podemos resumir estas ecuaciones en la siguiente

$$\frac{d}{dt} k = f(k) - (\lambda + \delta) k - x \qquad (2)$$

recordando que

$$\frac{d}{dt} K = \frac{d}{dt}(kP) = P \frac{d}{dt} k + k\lambda P$$

La relación (2) nos indica cómo el producto por habitante una vez deducida la inversión necesaria para reponer el equipo y para mantener intacta la relación capital por habitante, se distribuye entre consumo e inversión (en el sentido de incremento de capital por habitante).

IV. Condiciones para un Óptimo Social

Estamos ahora preparados para formular nuestro problema de optimización.

Dada la dotación inicial de recursos, bajo la forma de relación capital por habitante,

$$k(0) = k_0$$

debemos maximizar la utilidad W (0) del programa de consumo, dada por la ecuación diferencial (1), hallando el programa que satisfaga la relación (2) y ofrezca el mayor bienestar social.

Las condiciones que debe cumplir un programa óptimo pueden obtenerse como una aplicación directa del principio del máximo de

PONTRYAGIN[7] pero en nuestro caso es quizá más instructivo, desde el punto de vista económico, el razonamiento de KEYNES para el problema de RAMSEY para el caso de una tasa de preferencia temporal idénticamente nula.[8]

Supóngase que el programa $x(t)$, $t \geq 0$ sea óptimo. De la ecuación (2) podemos deducir la correspondiente relación capital por habitante $k(t)$, $t \geq 0$, conociendo $k(0) = k_0$. Veamos qué sucede si modificamos el programa no invirtiendo durante un año, dedicando los bienes así liberados al consumo. La consecuencia será que acumularemos capital más lentamente, ya que llegaremos al stock de capital que habríamos obtenido al final del año recién al final del año siguiente, por lo cual deberemos aplazar todo nuestro programa de consumo en un año. Como el programa es óptimo esta pérdida de bienestar debe compensar el beneficio obtenido por consumir más durante ese año.

La pérdida por atrasar el programa en un año es $\frac{dW}{dt}$; por otra parte, el beneficio que derivamos de un consumo mayor está medido por la utilidad marginal $u'(x)-W r'(x)$ por cada unidad en que aumenta el nivel de consumo ya que una unidad más de consumo significa un aumento en la utilidad instantánea y medido por la utilidad u', y una disminución de bienestar debida al aumento en la tasa de preferencia r, dada por el valor del resto del programa W multiplicado por el cambio en la tasa , r'; por lo tanto para $\frac{dk}{dt}$ unidades más consumidas, el beneficio será

$$[u'(x) - Wr'(x)]\frac{dk}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

Reemplazando $\frac{dW}{dt}$, $\frac{dk}{dt}$ por sus valores dados por las ecuaciones (1) y (2)

$$Wr(x) - u(x) + [Wr'(x) - u'(x)][f(k) - (\lambda + \delta)k - x] = 0 \qquad (3)$$

Puede verificarse que para formas que pueden considerarse normales para las funciones r y u, es decir, la primera convexa y la segunda cóncava

---

[7] Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskü, B.V. Gamkrelidze, y E.F. Mischenko, The Mathematical Theory of Optimal Process, New York, 1962.

[8] Ramsey, op.cit.

(utilidad marginal decreciente), la ecuación (3) es equivalente a la afirmación que para cada instante t, la tasa de consumo $x(t)$ minimiza la expresión

$$Z[W(t),x(t),k(t),x] \equiv$$
$$W(t)r(x)-u(x)+[W(t)r'(x(t))-u'(x(t))][f(k(t))-(\lambda+\delta)k(t)-x]$$

Para $W(t)$, $x(t)$, y $k(t)$ dados.

V. Propiedades de un Programa de Consumo Óptimo

El sistema formado por las tres ecuaciones (1), (2) y (3), junto con la condición incial $k(0) = k_0$ permite hallar los valores de $W(t)$, $x(t)$ y $k(t)$ en cada instante. Para el muy largo plazo la solución tiende a un punto W^*, x^*, k^* correspondiente a una solución estacionaria del sistema, es decir

$$\frac{d}{dt}W^* = 0 = W^* r(x^*) - u(x^*) \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}k^* = 0 = g(k^*) - x^* \qquad (5)$$

La tercera ecuación necesaria para determinar el sistema se obtiene derivando la ecuación (3) con respecto a t, proporcionando

$$\frac{d}{dt}x = \frac{u'(x)-Wr'(x)}{Wr''(x)-u''(x)}$$
$$[f'(k)-(\lambda+\delta)-r(x)-r'(x)(f(k)-(\lambda+\delta)k-x)] \qquad (6)$$

de modo que la solución estacionaria nos dará, junto con (5),

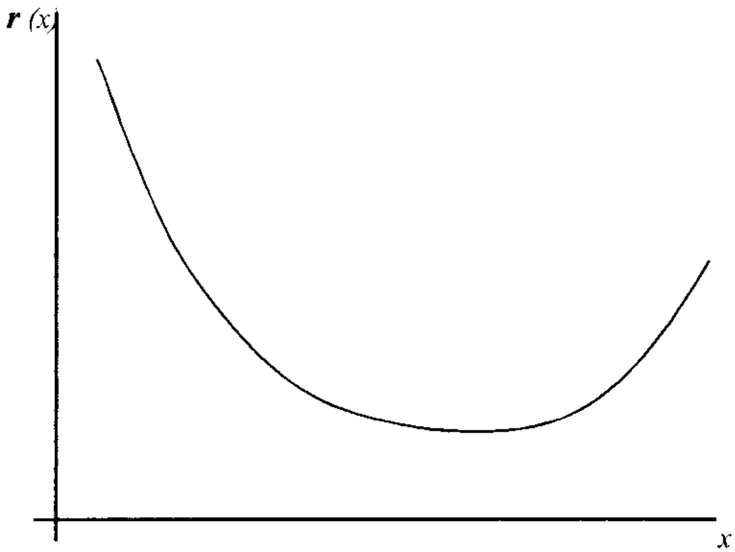
$$0 = g'(k^*) - r(x^*) \qquad (7)$$

Como puede observarse en la ecuación (6), el signo de $\frac{dx}{dt}$ no depende del valor de W, ya que la fracción que aparece del miembro derecho de la igualdad es siempre positiva (el numerador representa la utilidad marginal, mientras que en el denominador W y r'' son siempre positivas, y u'' es negativa).

Por lo tanto, puede estudiarse el comportamiento cualitativo del sistema en base a las dos ecuaciones (2) y (6); la ecuación (3) indica que: $\frac{dW}{dt}$ y $\frac{dk}{dt}$ tienen siempre el mismo signo, es decir el bienestar de las generaciones futuras aumenta o disminuye según aumente o disminuya el capital por habitante.

Analicemos ahora las formas que pueden tomar las funciones que intervienen en el problema. En primer lugar, tenemos la tasa de preferencia temporal *r(x)*. La forma normal de la misma es la presentada en el gráfico (1) decreciente para niveles bajos de consumo y creciente luego (aunque esta rama creciente puede estar ausente), a un ritmo creciente.

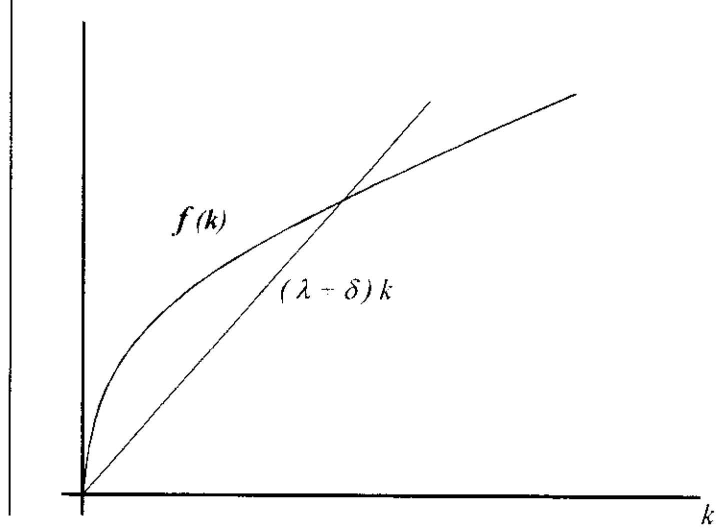
Gráfico N° 1



La justificación de la rama descendente fue dada por Irving Fisher[9]: una persona pobre está dispuesta a prometer una compensación futura mucho más alta por un consumo presente que un individuo de ingresos altos.

La función de producción *f(k)*, tendrá la forma del gráfico 2,

Gráfico N° 2

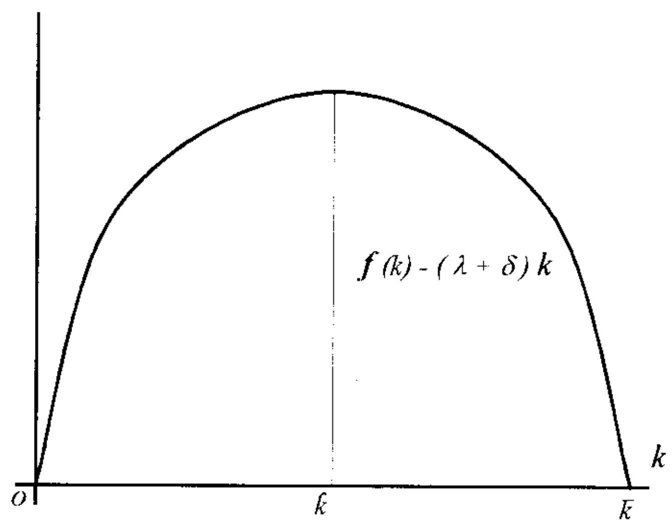


de modo que una vez deducida la inversión necesaria para mantener intacto el capital por habitante, obtendremos las posibilidades de consumo o incremento en el capital por habitante del gráfico 3, como diferencia entre *f(k)* y la recta $(\lambda+\delta)k$. Nótese que si $\lambda+\delta$ es positivo, esta recta cortará a *f(k)* en algún punto $\bar{k}$ de modo que la curva del gráfico 3 se hará negativa a partir de entonces.

Nótese que presenta un máximo en el punto $\hat{k}$; como a la derecha de este punto, el producto marginal del capital es insuficiente para mantener intacto el capital por habitante, ninguna solución óptimo se colocará en esta parte de la curva, excepto en el caso que la dotación inicial k_0 exceda $\hat{k}$.

[9] Fisher, Irving, The Theory of Interest, 1930.

Gráfico N° 3



A fin de poder resolver el sistema formado por las ecuaciones diferenciales (1), (2) y (6), para obtener las trayectorias óptimas de las variables debemos combinar los gráficos (1) y (3). Para ello notamos que (6) puede ser reemplazada, cuando $\frac{dx}{dt} = 0$, por

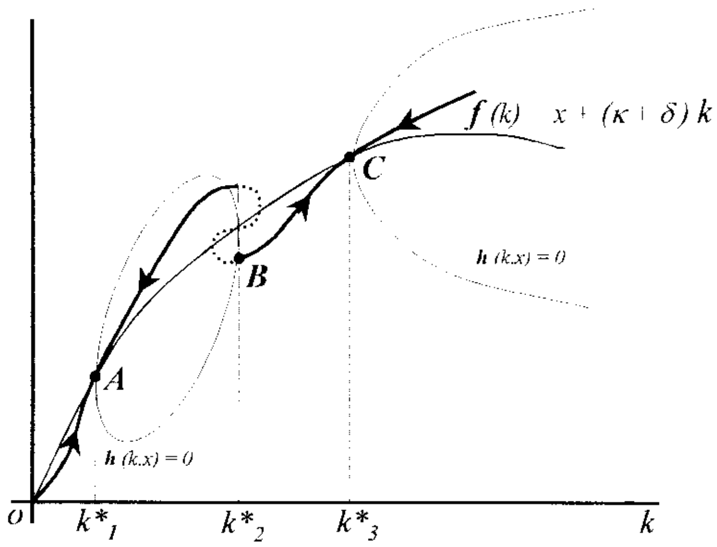
$$h(k, x) \equiv f'(k) - (\lambda + \delta) - r(x) - r'(x)[f(k) - (\lambda + \delta)k - x] = 0 \qquad (8)$$

donde $h(k.x)$, como hiciéramos notar anteriormente, nos proporciona el signo de $\frac{dx}{dt}$. La ecuación (8) puede ser representada en el gráfico 4, junto con $f(k) - (\lambda + \delta) * k - x = 0$, obtenida de (2) para $\frac{dk}{dt} = 0$.

Pueden presentarse distintos casos; el producto marginal del capital no puede exceder siempre la tasa de preferencia temporal, ya que llega un momento en que el primero se anula, mientras que la segunda nunca es negativa. En cambio es posible que la tasa de preferencia temporal exceda siempre al producto marginal del capital. Esto significa que el grado de impaciencia es tan elevado que la sociedad consume todo su capital.

Estas consideraciones nos permiten hallar la forma general de las regiones definidas por la ecuación (8).

Gráfico N° 4



Esta ecuación define varias curvas, identificadas en el gráfico 4 con la inscripción *h(k.x)*= 0. A la derecha del gráfico hay una rama de forma parabólica que corta a la curva $f(k) = x + (\lambda + \delta) * k$ por el punto c. Esta curva no se cierra sobre sí misma ya que a la larga el producto marginal del capital es inferior a la tasa de preferencia temporal. A la izquierda de esta curva hay otras de forma elípticas, de las cuáles se ha supuesto que existe una sola en el gráfico: la que intersecta a la función de producción en los puntos A y B. Finalmente, es concebible que la elipse que está más a la izquierda no posea un punto como el A, de modo de ser abierta por la izquierda, caso que corresponde al de una tasa de preferencia temporal superior a la productividad marginal de capital para niveles bajos de consumo.

También se han graficado las trayectorias óptimas para el consumo y el capital. Para obtener la trayectoria que corresponde a una relación capital por habitante dada, se deberá marcar su valor en el eje horizontal, trazar una vertical hasta su intersección con una de las flechas gruesas a fin de obtener el nivel inicial de la tasa de consumo por habitante, y luego seguir la trayectoria indicada por la flecha hasta uno de los puntos A o C, que corresponden a los valores que adoptan las variables en el muy largo plazo.

En el caso en que el capital por habitante inicial coincidiera con k_2^*, la solución está dada por el punto B; si es mayor que k_2^* crecerá o decrecerá en forma monótona hasta llegar al punto C, mientras que si es menor, crecerá o decrecerá de igual forma hasta llegar a A,

Debe hacerse notar la discontinuidad de la solución en puntos como el k_2^*. Este es un nivel crítico de capital por habitante que una vez superado hará deseable para la sociedad el desarrollarse, creciendo hasta el próximo punto de equilibrio de largo plazo; en cambio, si la sociedad no posee esa relación de recursos al comienzo, preferirá consumir a una tasa superior, desacumulando capital hasta arribar a una solución de equilibrio más baja.

Por supuesto que nos estamos refiriendo a los deseos de los individuos que están realizando la elección entre los distintos programas de consumo. Es posible modificar las trayectorias óptimas modificando la función de bienestar (no así la función de producción, ya que la tecnología es un dato). Es precisamente ésta la finalidad de esta investigación: estudiar las características de las trayectorias resultantes a fin de presentarlas a quién deba efectuar la elección.

VI. Trayectorias óptimas para algunos criterios sencillos

Analizaremos a continuación varias formas sencillas de la función de bienestar.

a) *Maximización de la tasa de crecimiento del capital por habitante*. Existen varias formulaciones de este criterio, que difieren solo en la longitud del horizonte que se considera, pero que producen los mismos resultados en el corto plazo: una es la del título; una forma distinta de enunciar el mismo objetivo es maximizar el capital o el ingreso por habitante al final de un período dado, o el de llegar a una relación capital por habitante dada en el tiempo mínimo; para el caso de un horizonte ilimitado, los mismos resultados se obtienen si se toma una tasa de preferencia temporal negativa, Todas estas formulaciones necesitan que se fije un nivel de consumo de subsistencia x^*, a fin de evitar de que la población perezca. La trayectoria resultante puede observarse en el gráfico 5. En este caso, si la relación inicial de recursos excede k^*, el capital necesario para mantener en vida la población, la trayectoria seguirá un sendero creciente para el capital por habitante. Las generaciones presentes se sacrifican al máximo por las futuras.

b) *El principio de la equidad absoluta*. Puede argüirse que el sacrifico exigido por el criterio anterior es demasiado elevado e injusto, pues las generaciones venideras, vivirán a expensas de los esfuerzos de las presentes. En términos de equidad absoluta, a la generación presente sólo se le podría exigir que mantengan intacta la relación de recursos, a fin de que sus descendientes tengan la misma oportunidad que ellos. Como consecuencia, $\frac{dk}{dt} = 0$, de modo que cualquier punto sobre la curva $f(k) = x + (\lambda + \delta) * k$ es un punto de equilibrio como en el gráfico 6.

Podrá notarse que esta solución, si bien la más justa, al no exigir esfuerzo alguno a la generación presente también impide el progreso, si nuestros antepasados hubieran aplicado este criterio todavía viviríamos en cavernas.

Gráfico N° 5

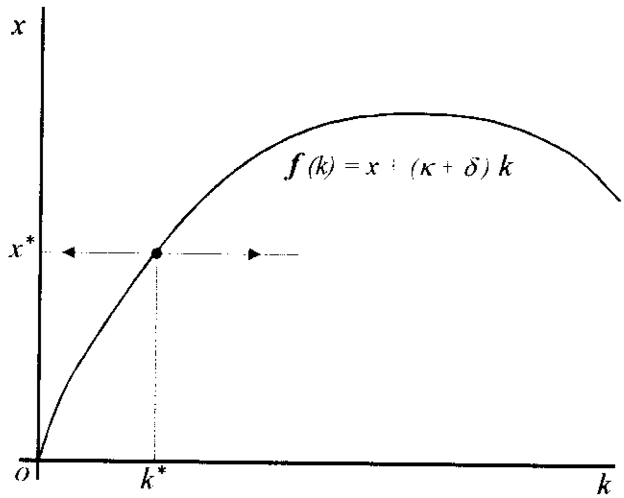
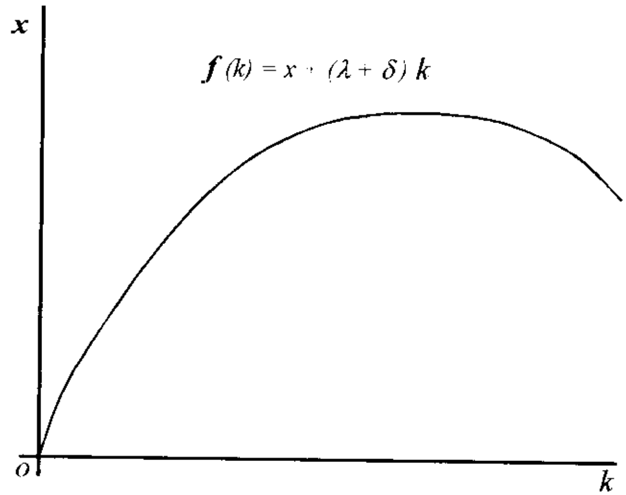
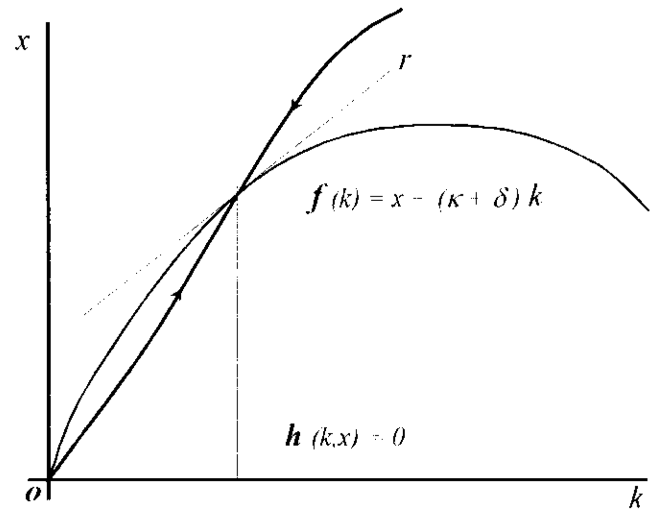


Gráfico N° 6



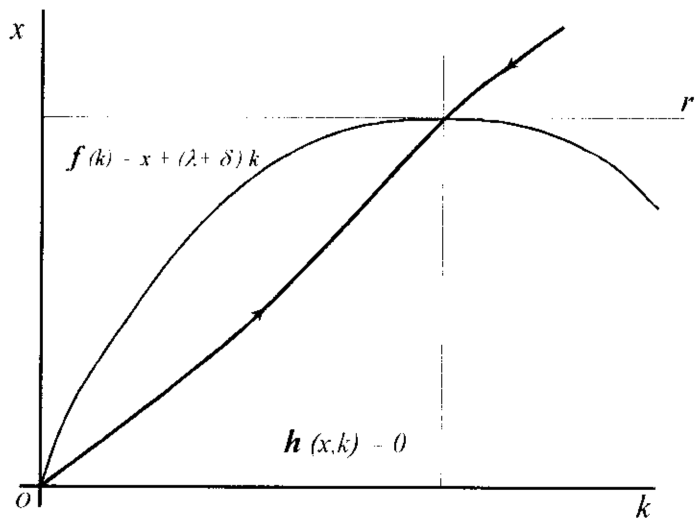
c) *Maximización de bienestar con tasa de preferencia temporal constante*. Es éste el criterio clásico, analizado extensamente por RAMSEY[10] para el caso de una tasa nula, y por KOOPMANS[11] para una tasa positiva. El gráfico 7, adaptado del trabajo de KOOPMANS, incluye además de las curvas $f(k) = x + (\lambda + \delta) * k$ y *h(k,x)*= 0 del gráfico 4, una recta de pendiente *r* tangente a la función de producción, indicando el punto único de equilibrio de largo plazo. Nótese que la recta *h(k,x)*= 0 es un caso especial de la curva correspondiente que contiene al punto *C* en el gráfico 4.

Gráfico N° 7



[10] Ramsey, op.cit.
[11] Koopmnas, "On the Concept of Optimal Economic Growth", op.cit.

Gráfico N° 8



Para el caso de $r=0$, se tiene el gráfico 8. Aquí la solución de largo plazo corresponde a la trayectoria de "la regla de oro de acumulación" analizada extensamente por varios autores en los últimos años[12].

[12] Ver las referencias dadas por Koopmans en "The Concept of Optimal Economic Growth", op.cit.