Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

POLITICAS DE ESTABILIZACION ECONOMICA*

ROLF R. MANTEL

Introducción

A medida que se generaliza la construcción de modelos econométricos de la economía de un país se hace posible utilizarlos para los fines de estabilización económica. Se hace necesario, por lo tanto, conocer con más detalle el comportamiento de grandes modelos dinámicos, bajo diversas hipótesis sobre reglas de comportamiento del gobierno que desee dictar medidas de política económica, fijando los niveles de los instrumentos de política económica a su alcance de manera de lograr sus objetivos de la manera más eficiente posible.

Hace algunos años se introdujeron en el campo de la economía los métodos utilizados por los ingenieros de sistemas de control a fin de calcular los parámetros de las funciones de realimentación que permitan estabilizar el sistema bajo estudio. Desde entonces hubo avances significativos en el campo de la teoría del control óptimo, que permiten diseñar una política económica en forma mucho más directa y completa.

Es el objeto del presente ensayo plantear el problema de la regulación de una economía para fines de su estabilización. No nos internaremos por aguas demasiado profundas. Creemos que una primera aproximación al problema en términos de representaciones lineales de una economía puede ser útil, aún cuando excluye la posibilidad de estudiar seriamente qué sucede con grandes cambios. La mayoría de los modelos econométricos son de todos modos lineales; y la parte esencial del problema puede plantearse inicialmente en forma lineal, con la salvedad de que se trata de un primer paso.

Un análisis serio de políticas de estabilización para un país requerirá modelos más complejos, con coeficientes que se modifican con el pasaje del tiempo y con los cambios en las variables del sistema.

---

* El presente trabajo fue presentado en la VI Reunión Anual de Centros de Investigación Económica de la Argentina, 29 al 31 de octubre de 1970, donde recibiera los comentarios de Jorge E. FERNANDEZ POL, a quien se agradece el interés y sugerencias. Por supuesto, no debe responsabilizársele por el resultado final.

A fin de motivar el estudio, presentaremos el modelo de Phillips [1], [2], [7], [8] y las políticas de estabilización propuestas por este autor. Aún cuando el modelo es conocido, lo presentaremos en forma matricial; esto no es realmente necesario para un sistema tan sencillo, pero nos dará la motivación que necesitamos. La sección siguiente generaliza el modelo; otros autores lo han hecho antes, y en especial Sengupta [9] y Fox, Sengupta y Thorbeeke [3] en un contexto similar, aunque con resultados distintos. La generalización permite, en primer lugar, aplicar resultados de Tinbergen a la solución estacionaria del sistema; además permite traducir algunos resultados de la teoría del control óptimo al caso que nos ocupa. Se llega así a proposiciones sobre la posibilidad de estabilización de sistemas dinámicos, incluso en los casos en que la respuesta del sistema a los planes de estabilización del gobierno ocurre con cierto retardo; se analizan también las clases de políticas sugeridas por Phillips.

En la tercera sección indicamos la necesidad de explicitar los objetivos de la economía; entramos así en el campo de la estabilización óptima. Se introduce el concepto de grado de amortiguación; más adelante se analiza el efecto de minimizar los costos de no realización de las metas. Finalmente, en la cuarta sección se introducen restricciones en el uso de los instrumentos, tanto al maximizar el grado de amortiguación del sistema como al diseñar una política de estabilización que minimice el costo social de no cumplir las metas. La sección final presenta las conclusiones.

Hemos relegado a un apéndice las demostraciones de las proposiciones que se enuncian en el texto.

1. El Modelo del multiplicador-acelerador de Phillips

En la presente sección presentaremos el segundo modelo de Phillips [7] y las políticas de estabilización por él propuestas. Este modelo, por ser tan conocido, nos servirá de ejemplo para nuestras subsiguientes generalizaciones, y dará al lector suficiente motivación para proseguir. Una presentación más completa, relacionándola con la literatura sobre modelos dinámicos, puede ser hallada en Allen [1] [2]. A continuación detallaremos las ecuaciones que definen su estructura.

El producto global Y responde a cambios en la demanda global Z con cierto retardo, de acuerdo con la relación

$$dY/dt = a\,(Z - Y) \qquad (1)$$

entre el exceso de las ventas sobre el producto y la tasa de cambio de éste. Phillips no explica el mecanismo de ajuste; pero es posible imaginar que la diferencia entre demanda y producción se debe a la acumulación o desacumulación indeseada de stocks de mercaderías, que inducen a los empresarios a ajustar su producción.

La respuesta de la demanda al producto o ingreso real está representada por la definición

$$Z = (1\text{-}f)\,Y + I + A + G. \qquad (2)$$

donde I representa la demanda de inversión neta inducida, A demanda autónoma y G la demanda oficial. El primer término del miembro derecho corresponde al consumo inducido. El coeficiente f es la filtración marginal del sistema y define al multiplicador.

La segunda ecuación diferencial corresponde a la demanda de inversión o de aceleración. Si v(dY/dt) define a la demanda potencial de aceleración, es decir, la demanda de inversión que ocurrirá si el cambio dY/dt se perpetuara, se supone que los inversores ajustan su demanda a ésta con cierto retardo

$$dI/dt = b\,(v\,dY/dt - I) \qquad (3)$$

El coeficiente v recibe el nombre de acelerador. Tampoco esta discrepancia entre demanda potencial y actual es explicada por Phillips; una explicación posible es que normalmente hay un cierto grado de subutilización de equipos de capital, de modo que es posible aumentar la producción sin antes aumentar la capacidad instalada. Una utilización de la capacidad instalada mayor que la planeada inducirá a revisar los planes de inversión.

Podemos simplificar el modelo si eliminamos Z de (1) con la ayuda de la definición (2); la ecuación diferencial (4) así obtenida permitirá eliminar la derivada del miembro derecho de la ecuación (3), dándonos la ecuación (5).

$$dY/dt = a\,(I + A + G - fY) \qquad (4)$$

$$dI/dt = b\,(va\,(A + G - fY) + (va - 1)\,I) \qquad (5)$$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes; en notación de matrices y vectores, y en vista de una posterior generalización, podemos escribir lo mismo como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -af & a \\ -bvaf & b(va-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ bva \end{pmatrix}(A+G) \qquad (6)$$

Una vez descripto el comportamiento del sector privado, Phillips analiza la determinación del gasto público G. Propone que el gasto público total sea determinado según tres políticas de estabilización: la política de estabilización proporcional, la integral y la derivada.

El total del gasto planeado se descompone en las tres componentes correspondientes, $G_p + G_i + G_d$, que se calculan en base a los valores de las variables del sistema. Como su nombre lo indica, la política de estabilización proporcional determina una parte del gasto público como una fracción del ingreso real

$$G_p = -f_p\, Y \qquad (7)$$

Del mismo modo, la política de estabilización integral determina la componente correspondiente como una fracción del desvío acumulado del producto de su meta de pleno empleo; en forma equivalente, la tasa de cambio de esa componente del gasto será una fracción de la diferencia entre el producto actual y el de pleno empleo $\bar{Y}$, como puede verse de la ecuación

$$dG_i/dt = -f_i\,(Y - \bar{Y}) \qquad (8)$$

Finalmente, la política de estabilización derivada relaciona la última componente del gasto público con los cambios en el ingreso, es decir

$$G_d = -f_d\,(dY/dt) \qquad (9)$$

Si se tiene en cuenta que hay cierto retardo entre el momento en que se toma la decisión y el momento en que los planes de gasto público se efectivizan en demanda oficial, tendremos la siguiente relación de ajuste

$$dG/dt = c\,(G_p + G_i + G_d - G) \qquad (10)$$

Reemplazando en (9) el valor del cambio en el producto obtenido de (4); sustituyendo en (10) los valores de G_p y G_d obtenidos en (7) y (9); y reescribiendo el sistema resultante en notación matricial teniendo en cuenta a (6), obtenemos el sistema completo, con la consideración del comportamiento del sector público,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ I \\ G \\ G_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -af & a & a & 0 \\ -bvaf & bva-b & bva & 0 \\ -cf_d af - cf_p & -cf_d a & -c-cf_d a & c \\ -f_i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ I \\ G \\ G_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aA \\ bvaA \\ -cf_d aA \\ f_i \bar{Y} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Phillips procede luego a analizar el comportamiento del sistema bajo distintos valores de los parámetros, siguiendo con ello el procedimiento usual de los ingenieros expuesto por Tustin [12]. En un artículo posterior, Phillips [8] utiliza un computador analógico electrónico para analizar el comportamiento del sistema.

En las secciones siguientes presentaremos métodos más efectivos que los de prueba y error propugnados por Tustin, Phillips y Allen. Baste por el momento hacer notar que si la meta del gobierno es el alcanzar el producto de pleno empleo de los recursos $\bar{Y}$, sin presiones inflacionarias, podrá ajustar su política de gastos de modo que la solución estacionaria del sistema [11] implique $Y = \bar{Y}$, $I = 0$. Esta conclusión está de acuerdo con las indicaciones de Tinbergen [11], al hacer notar que con un instrumento de política económica (el gasto público) es posible alcanzar una meta (el pleno empleo).

2- Políticas de Estabilización en Modelos Económicos Lineales

Una vez que hemos escrito el modelo de Phillips en la forma (6), es evidente cómo es posible generalizarlo. Si A es una matriz de constantes cuadrada de orden n; si x es un n-vector; si B es una matriz rectangular de n filas y m columnas; y u un m-vector, podemos plantear el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$dx/dt = Ax + Bu \qquad (12)$$

Interpretamos este sistema como representando una economía donde las variables x que reflejan el estado de la misma en un momento dado cambian en el tiempo de acuerdo con una ley lineal de dependencia de las mismas variables y de los niveles de los instrumentos de política económica reflejados en el vector u. La solución estacionaria del sistema implica

$$0 = Ax^* + Bu.^*$$

Supondremos que el sistema es consistente, de modo que el rango de la matriz (A, B) es n, y que los instrumentos son independientes, en el sentido de que la matriz B tiene rango m. Bajo tales condiciones vale el análisis de Tinbergen [11] en cuanto al número de metas que es posible satisfacer; habrá m componentes del vector x* que podrán ser fijadas por el gobierno; las restantes deberán ser consistentes con éstas, así como los niveles de los instrumentos, es decir, el vector u*.

En vez de considerar una solución estacionaria, podemos estudiar un caso más general, en el que suponemos fijadas las m metas en cada instante, aunque no necesariamente a un nivel fijo sino variando en el tiempo. Para simplificar supondremos que tales funciones del tiempo tienen derivada en todos los puntos. Si ordenamos las ecuaciones y variables de modo que las primeras m filas de la matriz B son independientes -esto siempre es posible si los instrumentos son independientes- podremos fijar arbitrariamente el nivel de las primeras m variables como metas de política económica en cada instante; despejando luego el valor de los instrumentos u con la ayuda de estas primeras m ecuaciones, podremos reemplazar este valor en las restantes n-m ecuaciones. La consecuencia será la de reducir el sistema a n-m ecuaciones diferenciales lineales, que relacionan las derivadas de las n-m variables de estado restantes con los niveles de estas variables, y con las derivadas y niveles conocidos de las m metas. Integrando este sistema reducido, para niveles iniciales dados para estas n-m variables, obtendremos sus valores para todo momento, y así estará determinado el vector completo de metas, x* (t). Volviendo a las primeras m ecuaciones, se podrá ahora despejar el vector de instrumentos necesarios para mantener el sistema en el estado deseado en cada momento, vector que denotaremos con u* (t).

La solución antedicha satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$dx^*(t)/dt = Ax^*(t) + Bu^*(t) \qquad (13)$$

que describe el sendero de equilibrio del sistema económico.

Restando (13) de (12) observamos que este último sistema también es satisfecho por los desvíos de las variables de los valores consistentes con las metas deseadas. Por lo tanto, en lo sucesivo interpretaremos a x como desvío de las metas, y a u como desvío de los valores de los instrumentos necesarios para mantener al sistema en el equilibrio móvil una vez que éste ha sido alcanzado. En otras palabras, estudiaremos que sucede en el caso especial de tenerse x*=0, u*=0.

Planteando así el sistema, podemos observar que se trata de un caso, el más sencillo, analizado extensamente en la literatura sobre la teoría del control óptimo (véase, por ejemplo, Lee y Markus [5]); por lo tanto nos será permitido referirnos a ella para mencionar algunas propiedades del sistema (12).

En primer lugar, utilizaremos la:

Definición. El sistema (12) es *controlable* si, dados dos puntos x_0, x_1 en el espacio de n dimensiones, existe un vector de instrumentos u(t) tal que la trayectoria x(t) correspondiente lleve al sistema desde el punto x_0 a la meta x_1 en un intervalo de tiempo finito.

Podemos enunciar

Proposición 1. Para cualquier sistema como el (12), es posible hallar una transformación lineal de sus coordenadas que lo parta en dos subsistemas. Uno de ellos, la parte controlable del sistema, es controlable; el otro, la parte no controlable del sistema, es completamente independiente de los valores de los instrumentos.

En los problemas de estabilización económica que estudiaremos no interesa mayormente que la solución de equilibrio pueda ser alcanzada en una duración de tiempo limitada; es suficiente poder acercarse a ella tanto como uno desee[2]. Por ello adoptaremos la siguiente

Definición. El sistema (12) se dirá *estabilizable* si, para cualquier conjunto de condiciones iniciales x_0, es posible hallar un vector de instrumentos u(t) de modo que la trayectoria x(t) correspondiente tiende al origen.

En base a la proposición 1 podemos deducir el siguiente resultado, que pareciera ser intuitivamente obvio:

Proposición 2. El sistema (12) es estabilizable si, y sólo si, su parte no controlable es estable. En caso de ser estabilizable, es posible hallar una matriz de constantes de m filas y n columnas D, tal que el vector de instrumentos que lleva el sistema al origen puede ser determinado en cada momento en base a las variables que describen el estado del sistema en base a la ecuación

---

[2] Tanto aquí como al formular la función objetivo en la ecuación (19) nos referimos a un horizonte de planificación infinito. Si bien es poco probable que los responsables de la política económica se planteen el problema como si el mundo no tuviera fin, ésta es en general una buena aproximación en los casos en que se tienen en cuenta los efectos sobre las generaciones futuras.

$$u(t) = Dx(t) \qquad (14)$$

En el caso en que la matriz D pudo ser hallada, se ha logrado, en el vocabulario de la teoría del control óptimo, sintetizar el control por medio de una relación de realimentación.

Los "métodos de los ingenieros", extensamente aplicados por Tustin [12], Phillips [7], [8] y Allen [1], [2], consisten en determinar esta matriz de realimentación D por tanteos, prueba y error, simulación, etc. Es la opinión del autor que hoy en día no se justifica emplear estos métodos, pues es mucho más simple, en el caso de modelos lineales, efectuar un análisis exhaustivo y diseñar un sistema de política económica con las propiedades de estabilización deseadas. La posibilidad de estabilizar cualquier sistema puede verse de la
Proposición 3. Si el sistema (12) es controlable, dado un polinomio de grado n arbitrario es posible hallar una matriz D tal que la matriz A + BD posea como polinomio característico el dado.

Esta proposición nos indica que podemos fijar las características de estabilidad del sistema (acercamiento monótono o cíclico, grado de amortiguación, fase) y luego diseñar un control de realimentación lineal y constante que le proporcione al sistema esas características. En el caso de tratarse de un sistema estabilizable, puede aplicarse este resultado a la parte controlable del sistema, a fin de proporcionar a ésta las características deseadas; la parte no controlable mantendrá las características que le son propias. El problema se presenta con los sistemas no estabilizables. Nuevamente podemos presentar un resultado que parecería restar importancia a este caso:

Proposición 4. Todo sistema puede ser aproximado por uno que es controlable, y en consecuencia, estabilizable.

Por supuesto, y esto nos lleva al tema de la sección 4, un sistema próximo a uno que no es estabilizable necesitará para su estabilización valores de los instrumentos inalcanzables.

Para completar el cuadro, nos referiremos brevemente al caso en que hay retardos en la ejecución de las medidas de política económica, de modo que la respuesta del sistema a un plan determinado no es inmediata. Los retardos inherentes al sistema económico en sí están implícitos en la ecuación (12), como es evidente al observar la ecuación (6) del modelo de Phillips. Sin embargo, al presentar ese modelo, habíamos llegado a la ecuación (11), donde quedaba incorporado el comportamiento del sector público, incluyendo el retardo en el ajuste de los planes del gobierno indicado por la ecuación (10).

En el caso bajo estudio, el sistema (12) representará el efecto u de los valores de los instrumentos sobre las derivadas del vector x en el momento de la ejecución de las medidas de política económica. Este valor puede no coincidir con los planes diseñados después de observar la economía; puede haber un retardo en la observación misma, otro en la confección del plan, otro en la aprobación del mismo, etc. Tendremos así en general una secuencia de retardos, y una serie de planes en distintas etapas de su ejecución. Si denotamos con v_j^i el nivel del instrumento i-ésimo en la etapa j de ejecución, siendo por definición $V^i_{ki} = u_i$ si suponemos que k_i es el número de etapas que necesita la ejecución de medidas de política económica referentes al instrumento i; y si z_i representa el nivel planeado inicialmente, deberemos adjuntar a (12) las ecuaciones

$$dv^i_j / dt = g^i_j (v^i_{j-1} - v^i_j) \qquad i = 1,\dots, p \,;\, j = 2,\dots, k_i$$

$$dv^i_1 / dt = g^i_1 (z_i - v^i_1) \qquad i = 1, \dots, p \tag{15}$$

donde $p \leq m$ es el número de instrumentos que no se ajustan instantáneamente, y las velocidades de ajuste g se suponen positivas. Es posible demostrar la siguiente

Proposición 5. Si el sistema (12), suponiendo ajustes instantáneos en todos los instrumentos, es controlable, el mismo sigue siendo controlable aún en el caso en que el ajuste no es instantáneo, es decir si a (12) se agregan las ecuaciones (15).

En particular vale para tal sistema la proposición 3, de modo que la aparición de retardos no modifica las posibilidades de estabilizar un sistema económico.

No analizaremos en detalle las políticas de estabilización derivada e integral propuestas por Phillips. Estas siempre pueden ser reemplazadas por una política proporcional que produce los mismos efectos, al menos cuando no hay restricciones sobre los valores de los parámetros que definen a las políticas. Esto puede verse, para el caso de un instrumento, como sigue. En el caso de una política derivada, el instrumento se calculará de acuerdo con la ecuación u = q' (dx/dt), de modo que el sistema (12) toma la forma

$$(I\text{-}bq')\ (dx/\ dt) = Ax$$

teniendo en cuenta que la matriz B ahora tiene una sola columna b. Este sistema, si es estable (y por lo tanto $q'b \neq 1$) será equivalente al sistema

$$dx/\ dt = (A+ bp')\ x$$

para un vector de realimentación $p = A'q\ /\ (I\text{-}b'q)$

Del mismo modo, si consideramos la política de estabilización integral, el sistema se convertirá en

$$dx/\ dt = Ax + bu$$

$$du/\ dt = r'x.$$

La solución del sistema

$$dx/\ dt = (A+ bp')\ x$$

coincide con la del sistema anterior si $u = p'x$, lo cual es cierto si $r'x = p'\ (dx/dt) = p'(A+ bp')\ x$ para todo x. Como la ecuación $(A'+ pb')\ p = r$ tiene una solución p cuando el sistema es estable, podremos reemplazar la política integral por una política proporcional equivalente.

En conclusión, podemos limitar nuestro análisis a políticas proporcionales. Phillips necesitó las otras porque las calculaba en base sólo a una variable[3].

Dejaremos para la sección siguiente una definición más precisa de lo que entendemos por grado de amortiguación de un sistema estable, mencionado antes; también analizaremos allí casos sencillos de estabilización óptima.

3. Estabilización óptima

Hasta el presente hemos indicado cómo es posible proceder cuando conocemos las características de estabilización deseadas y deseamos diseñar un manual de instrucciones para los agentes del gobierno, de modo que si las instrucciones son implementadas el sistema posea esas características.

---

[3] Es decir, este autor tenía, en forma implícita, restricciones sobre el uso de instrumentos: el valor de éstos podía ser calculado sólo en base al ingreso, no en base a la inversión. Esto equivale a suponer que la inversión es un dato no observable.

Una de las características deseadas puede ser que el sistema tienda al equilibrio tan pronto como sea posible cada vez que sea perturbado. Una forma de expresar esto es decir que todas las variables deberán reducirse proporcionalmente, en una proporción que exceda cierto mínimo.

A fin de formalizar esta idea, sea V la matriz simétrica de una forma cuadrática definida positiva [10], de modo que x'Vx nos dará una indicación de la distancia del estado actual del sistema a la solución de equilibrio. Supóngase que se ha diseñado un sistema de política económica para estabilizar el sistema (12), y que los valores de los instrumentos se calculan de acuerdo con la síntesis de realimentación (14). La influencia total del estado del sistema sobre sus derivadas estará dada por la matriz A + BD. Si fuera posible hallar un número h tal que

$$V(A+BD) + (A+BD)'V \leq -h\,V \qquad (16)$$

(las desigualdades entre matrices de formas cuadráticas se refieren a la relación entre los valores de las formas respectivas para todos los valores de los argumentos) podríamos deducir

$$dx'Vx/\,dt = 2x'V(A+BD)\,x \leq -hx'Vx \qquad (17)$$

para todo momento; integrando esta ecuación obtendremos

$$x'Vx = e^{-ht}\,x'_0Vx_0 \qquad (18)$$

De (17) podemos ver que el cambio relativo de la distancia al origen es por lo menos h, que puede tomarse como una cota inferior al grado de amortiguación. Nótese la relación de este concepto con el método directo de Liapunov; es una consecuencia trivial de un teorema de Liapunov que la constante h en (16) puede ser elegida positiva para alguna matriz V positiva definida si y sólo si A+BD es estable.

Definición. El grado de amortiguación del sistema con matriz de coeficientes A+BD es la cota superior mínima de h para todas las matrices positivas definidas V tales que se cumpla la relación (16)[4].

Como el conjunto de matrices definidas positivas no es cerrado, en general no podemos esperar satisfacer la relación (16) si h es el grado de amortiguación del sistema.

[4]Alternativamente, $h = \min_j\,[-\mathrm{Re}\,(\lambda_j)]$ siendo λ_j las raíces características del sistema.

Si el propósito del gobierno fuera alcanzar la estabilización del sistema a corto plazo a cualquier costo[5], podrá satisfacer esta meta con sólo fijar un grado de amortiguación suficientemente elevado, y diseñar una matriz de realimentación D que permita satisfacer la relación (16) para alguna V positiva. El contenido de la proposición 3 es que esto siempre será posible cualquiera sea el grado de amortiguación deseado, si el sistema es controlable.

Si en cambio el gobierno toma en cuenta el costo del uso de los instrumentos y del desvío del sistema de su meta, se puede hallar un método mejor para calcular la matriz de realimentación. Si por simplicidad suponemos que en cada instante los costos mencionados pueden ser medidos por una función cuadrática, y suponiendo que una vez alcanzada la meta el costo sufrido es nulo, el costo total podría estar dado por

$$(1/2)\int_0^{\infty} e^{-rt}\,(x'Wx + 2x'Tu + u'Vu)\,dt = C\,(x,u) \qquad (19)$$

El paréntesis en el integrando representa el costo instantáneo de desvíos del equilibrio. Suponemos que las matrices W, T, V son tales que la forma cuadrática entre paréntesis es definida positiva. La constante r representa la tasa subjetiva de descuento de quien formula el plan; con ella se descuentan los costos instantáneos a fin de sumarlos, como queda indicado por la integral. Como puede verse, se supone que el horizonte de planificación se extiende desde el presente ($t = 0$) hasta el futuro ilimitado.

Proposición 6. Si la parte no controlable del sistema (12) tiene un grado de amortiguación mayor que $(-\frac{1}{2} r)$, el mínimo de (19) sujeto a las condiciones impuestas por el sistema (12) con estado inicial x_0 dado existe. Además los valores óptimos de los instrumentos pueden ser calculados en todo momento en función del estado del sistema por medio de una matriz de realimentación D; el sistema completo A+BD tiene grado de amortiguación mayor que $(-\frac{1}{2} r)$.

Una consecuencia de este teorema es que el problema del costo mínimo siempre es soluble si el sistema económico es controlable, cualquiera sea la tasa de preferencia temporal r. En particular, si un gobierno impaciente deseara estabilizar el sistema alcanzando un grado de amortiguación dado,

[5] Este criterio es muy popular entre ministros de economía, ya que gran parte del éxito de su gestión se mide en términos del grado de estabilización logrado en el plazo relativamente corto que duran sus funciones.

basta con tomar cualquier forma cuadrática definida positiva para medir el costo, junto con una tasa de preferencia temporal negativa de valor absoluto por lo menos igual al doble del grado de amortiguación deseado. Cuanto menos pesen las generaciones presentes en los planes del gobierno, tanto mayor será el grado de amortiguación alcanzado, y más rápido tenderá el sistema al equilibrio (el tiempo necesario para reducir los desvíos a las metas a la mitad es proporcional a la recíproca del grado de amortiguación)[6].

Hasta aquí hemos llevado la estabilización hasta sus últimas consecuencias, tomando como un hecho la posibilidad de alcanzar, para un sistema controlable, características de estabilización arbitrarias. Sin embargo, una observación casual del mundo que nos rodea nos permite inferir que tal resultado difícilmente será cierto para un sistema económico. En la sección siguiente replantearemos nuestro problema; el análisis realizado hasta ahora nos servirá como introducción, y los resultados serán aplicables, con algunas calificaciones, a problemas más realistas.

4. Políticas de estabilización con restricciones sobre el uso de instrumentos

En las secciones anteriores hemos ignorado la posibilidad de que los instrumentos de que dispone el gobierno para estabilizar la economía estén sujetos a restricciones. En realidad éstas pueden ser de distinto tipo, tanto económicas como institucionales, jurídicas, políticas, etc. Como ejemplo pueden citarse la rigidez del tipo de cambio dictada por el Fondo Monetario Internacional; el hecho de que las tasas impositivas no pueden, en general, exceder el valor de la materia imponible, so pena de que ésta no se concrete; la distribución del ingreso, que debe mantenerse dentro de ciertos límites políticos; el gasto público que no puede ser negativo. Es usual en la teoría del control óptimo especificar que el vector de instrumentos u debe pertenecer a un conjunto de niveles permitidos para los instrumentos; esta condición debe ser adjuntada al sistema de ecuaciones diferenciales (12) al calcular el costo

[6]El problema del costo mínimo es también soluble en el caso de sistemas estabilizables. Recíprocamente, dada una matriz de realimentación D que estabilice el sistema, es posible construir una función de bienestar como la (19) que produzca como solución del problema de óptimo sujeto a las restricciones a la matriz D dada. De aquí se deduce que sería imposible juzgar la eficacia de un ministro de economía si el único dato de que se dispone es la matriz de realimentación D, y ésta estabiliza la economía. A fin de poder emitir tal juicio, habría que conocer mejor la estructura de las preferencias del responsable de la política económica.

mínimo medido de acuerdo con (19). Como resulta difícil obtener resultados analíticos en el caso general, nos limitaremos a plantear el problema en algunos casos especiales, cuando las restricciones pueden ser impuestas sobre los coeficientes de la matriz de realimentación. Obtendremos así alguna idea sobre la complejidad del problema; por supuesto que en aplicaciones prácticas será necesario plantear bien el problema con todas sus restricciones, para obtener soluciones numéricas una vez conocida la estructura de la economía.

Un primer ejemplo de objetivo que puede presentarse, es el de estabilizar un sistema controlable lo más rápido posible, sin tener en cuenta el costo pero sí las restricciones mencionadas, de manera que la convergencia a las metas sea monótona y uniforme, de modo que cualquiera sea la situación económica inicial, todas las variables tienden a su valor de equilibrio al mismo ritmo, sin fluctuaciones cíclicas. Formalmente este requisito consiste en exigir que todas las raíces características del sistema estabilizado sean iguales, negativas y de máxima magnitud, dadas las restricciones. En otras palabras, si para simplificar la exposición suponemos la existencia de un sólo instrumento, el problema consiste de dos partes. Una, la relación entre las restricciones sobre los parámetros y las correspondientes restricciones sobre el polinomio característico de la matriz del sistema estabilizado $A + bd'$, se resume en la

Proposición 7. Si el sistema

$$dx/dt = Ax + bu \tag{20}$$

es controlable, entonces los coeficientes del polinomio característico de la matriz $A + bd'$ están relacionados con los elementos del vector de realimentación d por medio de una transformación lineal no singular. En otras palabras, si el vector f representa los coeficientes del polinomio característico, existe un vector a y una matriz M regular, tales que

$$f = a + Md \tag{21}$$

En consecuencia, en las restricciones a las que está sujeto el vector d podemos reemplazar éste por su valor en términos de f, obteniendo las condiciones que este último debe cumplir.

Por otro lado tenemos la relación entre los coeficientes del polinomio característico y las raíces del mismo. Si todas las raíces son iguales, o si se encuentran en proporciones fijadas de antemano, los coeficientes del polinomio característico cumplirán las relaciones de recurrencia

$$f_i = r\, g_i\, f_{i-1} \qquad i= 1 \ldots, m \qquad (22)$$

con $f_0 = 1$, donde las g son constantes y r representa el nivel de las raices.

Si las restricciones sobre el vector de realimentación están dadas en forma de desigualdades lineales consistentes, y si el conjunto que éstas definen está acotado, es posible representar los valores permitidos para d en la forma (4).

$$d = Ky; \qquad y \geq 0; \quad s'y = 1; s' = (1, 1,\ldots, 1) \qquad (23)$$

para valores arbitrarios de y que satisfagan las condiciones. Teniendo en cuenta (21), (22) y (23), si G representa a una matriz con los elementos $g_2,\ldots, g_n$ en la diagonal debajo de la principal y los demás elementos nulos, y si g representa un vector con el primer elemento g_1 y los demás nulos, podemos deducir

$$(MK + as')\, y = r\, (G\, (MK + as') + gs')\, y \qquad (24)$$

El problema se reduce a calcular el mayor valor de r que satisface (24) con algún vector, y, no negativo ni nulo; la solución se pueda calcular mediante uno de los algoritmos conocidos para hallar la tasa de crecimiento máxima en el modelo de Von Neumann [6].

Por supuesto que el método recién presentado es una alternativa menos deseable que el maximizar el grado de amortiguación (quizás con la restricción de que las raíces del sistema sean reales si se desea evitar fluctuaciones cíclicas); sin embargo es practicable, siendo más sencillo.

Finalmente, si se desea tener en cuenta el costo para todas las generaciones, se podrá minimizar la integral dada en (19), sujeta a las restricciones impuestas por el sistema (20) y las condiciones (23) sobre los coeficientes del vector de realimentación d. La consecuencia es la

Proposición 8. El mínimo de (19), sujeto al sistema (20), y la condición de que la clase de controles admisible es la de controles de realimentación con el vector d restringido por (23), si existe, implica un control óptimo que permite ser sintetizado como sigue:

a) Si el vector d de realimentación, óptimo para el problema sin las condiciones (23), cumple con éstas, éste sintetizará los instrumentos óptimos.

b) En caso contrario, para cada estado x habrá una columna de la matriz K asociada al mismo que hará las veces del vector de realimentación d; es decir, si bien éste varía, permanecerá constante por tramos.

5. Conclusiones

No ha sido el propósito de esta monografía el analizar en forma exhaustiva la aplicación de conceptos de control óptimo a problemas de estabilización económica: esto nos llevaría a plantear modelos complejos y utilizar resultados referentes a problemas no lineales. Sólo se ha querido mostrar la fuerza de estos conceptos, destacando la ventaja de su uso sobre otras técnicas, como ser las basadas en transformaciones de Laplace propugnadas por Tustin y Allen.

En el curso de nuestra investigación hemos planteado algunos problemas nuevos, como ser la obtención de características de estabilidad arbitrarias en el caso de sistemas económicos, con o sin retardo en la respuesta del sistema a la acción del gobierno; maximización del grado de amortiguación de la economía; minimización del costo de los desvíos a las metas cuando hay restricciones en el uso de los instrumentos. Hemos obtenido varios resultados nuevos, aún para la teoría del control óptimo, en especial al generalizar teoremas conocidos, como es el caso de las proposiciones 2, 3 y 6, o al demostrar otros nuevos, como ser los conducentes a las proposiciones 5 y 8, o la solución del caso en que las raíces características del sistema se desean en proporciones dadas.

Podemos concluir que si bien el análisis, aún manteniéndonos en el campo de los modelos lineales, se hace más complicado, una obtención sistemática de una solución del problema, con una especificación clara de los objetivos perseguidos, puede ser mucho más útil que las soluciones de prueba y error. Esto es válido en especial si el número de variables del sistema es considerable.

APENDICE MATEMATICO

Proposición 1. - Demostración: Ver Lee y Markus [5], Capítulo 2, Teorema 10, Corolario

Proposición 2. - Demostración: Si B = 0, el sistema es completamente independiente de los instrumentos; por lo tanto es "estabilizable" si y sólo si es estable[7]. Supóngase entonces que el rango de B es positivo. Considérese el conjunto ordenado de vectores

$$C = (b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{n-1} b_m) \qquad \text{(A.1)}$$

formado por las columnas b_j de la matriz B, multiplicadas por las sucesivas potencias de la matriz A desde 0 hasta n-1. Construyamos ahora una base para el conjunto C, tomando los vectores en el orden indicado y desechando los que sean combinaciones lineales de los anteriores. Si suponemos que las columnas de B han sido ordenadas de manera que sus primeras p columnas han sido incluidas en la base, ésta tendrá la forma

$$Q = (b_1, Ab_1, \dots, A^{n_1-1} b_1, \dots, b_p, \dots, A^{n_p-1} b_p) \qquad \text{(A.2)}$$

debiendo ser por construcción $n_1 + \dots + n_p = k$, el rango del conjunto C, que es la dimensión de la parte controlable del sistema. Si k es menor que n, el orden del sistema, extiéndase la base Q a una base para el espacio R^n n-dimensional, de manera tal de obtener una matriz R de n-k columnas que satisfaga las condiciones

$$R'Q = 0; \qquad R'R = I \qquad \text{(A.3)}$$

Por construcción de la matriz Q, multiplicando su columna j-ésima por A obtendremos

$$Aq_j = q_{j-1} \qquad \text{(A. 4)}$$

si j no coincide con alguna de las sumas parciales n_1, $n_1 + n_2, \dots, k$; si $j = n_1 + \dots + n_2$, se tendrá

$$Aq_j = -a^i_1\, q_j - a^i_2\, q_{j-1} - \dots - a^i_j\, q_1, \qquad \text{(A. 5)}$$

por ser en ese caso el vector Aq_j uno de los que fueron desechados por depender linealmente de los anteriores; el miembro derecho de la última

[7] De aquí en adelante levantamos el supuesto hecho en el texto, de que el rango de la matriz B es igual al número de columnas.

ecuación expresa esa dependencia lineal. Si denotamos a la pseudo-inversa de Q con Q^- = $(Q'Q)^{-1}Q'$ tendremos entonces

$$(R,Q)^{-1}A(R,Q)=\begin{pmatrix} R' \\ Q^- \end{pmatrix}A(R,Q)=\begin{pmatrix} R'AR & 0 \\ Q^-AR & S \end{pmatrix} \qquad \text{(A.6)}$$

donde S es la matriz que resume las relaciones (A. 4) y (A. 5) ; es decir

$$AQ = QS \qquad \text{(A.7)}$$

de modo que

$$Q^-AQ = Q^-QS = (Q'Q)^{-1}Q'QS = S$$

$$R'AQ = R'QS = 0 \qquad \text{(A.8)}$$

Operando sobre la matriz -B , tendremos

$$b_i = q_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1} \qquad \text{(A. 9)}$$

para i que no exceda de p;

$$b_i = b^i_1\, q_1 + \ldots + b^i_k\, q_k \qquad \text{(A. 10)}$$

para i mayor que p, ya que por construcción de la base Q estas columnas deben ser combinaciones lineales de la base: de otro modo habrían sido incluidas en la misma. En consecuencia, podemos resumir las últimas relaciones en

$$B = Q\,(P,T) \qquad \text{(A. 11)}$$

correspondiendo P a las primeras p columnas. Transformando a B en forma similar a la de A,

$$(R,Q)^{-1}B=\begin{pmatrix} R' \\ Q^- \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} R' \\ Q^- \end{pmatrix}Q(P,T)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P & T \end{pmatrix} \qquad \text{(A.12)}$$

Vemos cómo el sistema se descompone en las dos partes mencionadas en la proposición 1: la parte completamente incontrolable, con matriz de coeficientes R'AR , y la parte controlable

$$dy/dt = Sy + Pv \qquad \text{(A.13)}$$

Hemos ignorado los controles correspondientes a la matriz T, por ser innecesarios para los fines de la estabilización, como se verá. De esta descomposición se deduce de inmediato que condiciones necesarias para la posibilidad de estabilizar el sistema son que R'AR sea estable y que el subsistema controlable (A.13) sea estabilizable; estas condiciones son también suficientes.

Analizando con más detalle el sistema (A.13), notemos que la estructura de la matriz S puede ser descripta como sigue: a lo largo de la diagonal principal hay una serie de submatrices cuadradas de la forma

$$S_{ii} = C_{n_i} - \bar{a}_i e'_{n_1} \qquad \text{(A.14)}$$

donde C_r, representa a una matriz cuadrada de orden r , cuyos elementos son nulos excepto por los que se encuentran en la diagonal inmediatamente debajo de la principal, que son iguales a la unidad. El vector e_r representa una columna de elementos nulos, excepto por una unidad en el r-ésimo lugar. Finalmente, el vector $\bar{a}_i$ se obtiene de los coeficientes de la combinación lineal (A.5), siendo igual a

$$\bar{a}_i' = \left(a^i_{n_i}, \ldots, a^i_2, a^i_1\right) \qquad \text{(A. 15)}$$

Todos los elementos de la matriz S debajo de alguna de estas submatrices S_{ii}, son nulos.

En cuanto a la matriz P , su estructura es muy simple: de (A. 9) deducimos que $p_i = e_{n1+\ldots+ni-1+1}$. Teniendo en cuenta la información sobre las dos matrices S y P , es inmediato que el sistema (A.13) se descompone en p subsistemas siendo el i-ésimo de orden n_i con un solo instrumento, a saber,

$$dy_i/dt = S_{ii}y_i + e_1 v_i \qquad \text{(A. 16)}$$

Teniendo en cuenta a (A.14), y despreciando los subíndices donde sea posible, esto es equivalente a

$$dy/dt = (C - \bar{a}\, e_n)\, y + e_1 v \qquad \text{(A. 17)}$$

Como demostraran Lee y Markus, este sistema es siempre controlable y linealmente equivalente al sistema

$$dy/dt = (C - e_1 a')\, y + e_1 v \qquad \text{(A. 18)}$$

([5], Capítulo 2, Teorema 7), y en consecuencia es estabilizable ([5], Capítulo 2, Teorema 9) por medio de una síntesis de realimentaci6n lineal $v = r'y$, obteniéndose el sistema estable

$$dy/dt = (V - e_1 (a-r)') y \qquad (A.\ 19)$$

Aquí, a representa al vector que contiene los mismos elementos que $\bar{a}$, pero ordenados en sentido inverso.

Vemos entonces que la parte del sistema correspondiente a la matriz S es controlable y estabilizable siempre, demostrando así la proposición.

Proposición 3. - Demostración. Se trata de un corolario de la demostración de la proposición anterior. Allí para cada subsistema se halló una síntesis de realimentación $v_i = r'y$. De (A. 19) puede verse que cada r_i puede seleccionarse de modo que $a_i - r_i = f_i$.

Sea entonces g(z) el polinomio de grado n dado. Como el sistema es controlable, tendremos $n_i + \ldots + n_p = k = n$; descompongamos el polinomio g(z) en p factores, los polinomios $g_i(z)$ de grado n_i . Si podemos hallar una factorización tal que los coeficientes de estos polinomios son reales (racionales) podremos hallar la solución en términos reales (racionales). Sea f_i el vector de los coeficientes del polinomio $g_i(z)$ es decir,

$$g_i(z) = z^{n_i} + f'_i (z^{n_i-1}, \ldots z^2, z, 1)' \qquad (A.\ 20)$$

Entonces el polinomio característico de $C - e_1 f'_i$, es $g_i(z)$. (Ver por ejemplo Thrall y Tornheim [10].).

Como el sistema (A.13) se descompone en los p subsistemas, su polinomio característico es el producto de los de cada subsistema, es decir, el polinomio dado. Sólo es necesario desandar el camino, deshaciendo las transformaciones de coordenadas realizadas, para convertir la matriz

$$\left[\begin{pmatrix} e_1 r'_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_1 r'_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e_1 r'_p \end{pmatrix} 0 \right]$$

en la matriz D buscada.

Proposición 4. - Demostración. Ver Lee y Markus ([5], Capítulo2, Teorema 11).

Proposición 5. - Demostración. Las ecuaciones (15) del texto pueden ser escritas en notación matricial como

$$dv/dt = Gv + Hz \qquad (A.\ 21)$$

donde la matriz G es nula excepto por submatrices cuadradas G_i de orden k, a lo largo de la diagonal principal; cada G_i , a su vez, es nula excepto por los elementos a lo largo de la diagonal principal y la diagonal debajo de ésta. Si $\hat{g}_i$ representa a la matriz que tiene los elementos del vector g_i en la diagonal principal, siendo nulos los demás elementos, con $g_i = \left(g_1^i, g_2^i, \ldots, g_{k_i}^i\right)'$ podremos escribir

$$G_i = \hat{g}_i \ (C\text{-}I) \qquad (A.22)$$

con las matrices entre paréntesis de orden k.
La matriz H tiene su i-ésima columna nula excepto por el elemento g^i_1 en la posición $k_1 + \ldots + k_{i-1} + 1$.

Obviamente podemos restringir nuestro análisis a sistemas de la forma dada en (A.13), ya que cualquier sistema controlable es linealmente equivalente a uno de esa forma. El sistema completo (escribiendo x en lugar de y) será

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & PE \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} z \qquad (A.23)$$

donde la matriz E es nula excepto por una unidad en la intersección de la fila i con la columna $k_1 + \ldots + k_i$, ya que $u_i = e'_{ki}\, v^i$. Por simplicidad suponemos que no hay instrumentos que ejercen su efecto sobre el sistema instantáneamente.

La estructura de la matriz de este sistema puede verse si desarrollamos el producto PE y escribimos en forma más detallada las matrices S y G (El asterisco * significa que los elementos correspondientes no son necesariamente nulos).

$$\begin{pmatrix} S_{11} & & & N_1 & & 0 \\ & \bullet & & & \bullet & \\ & & \bullet & & & \bullet \\ 0 & & S_{pp} & 0 & & N_p \\ 0 & & 0 & G_1 & & 0 \\ & \bullet & & & \bullet & \\ & & \bullet & & & \bullet \\ 0 & & 0 & 0 & & G_p \end{pmatrix} \qquad (A.24)$$

donde N_i es una matriz de orden k_i cuyo único elemento no nulo es una unidad en el ángulo superior derecho. Un reordenamiento de las variables, de modo que el orden sea v^1, x^1, v^2, x^2 ,... v^p, x^p transforma esta matriz en

$$\begin{pmatrix} G_1 & & & & & & \\ N_1 & S_{11} & & & & & \\ & & G_2 & & & * & \\ & & N_2 & S_{22} & & & \\ & & & & \bullet & & \\ & 0 & & & & G_p & \\ & & & & & N_p & S_{pp} \end{pmatrix} \qquad (A.25)$$

El mismo reordenamiento de variables transforma a la matriz de coeficientes de los instrumentos en una que es nula excepto por una unidad en el lugar $k_1 + n_1 + \ldots k_{i+1} + n_{i-1} + 1$, para toda columna i . Por lo tanto, el sistema se puede partir en p subsistemas, de orden k_i+n_i , relacionando las variables v^i, x^i con el instrumento z_i, de la siguiente estructura, si ignoramos los subíndices,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(C-I) & 0 \\ N & C-\bar{a}e'_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} z \quad (A.26)$$

Este sistema tiene todos los elementos en la diagonal inmediatamente bajo la principal positivos, mientras que los demás elementos del triángulo debajo de esta diagonal son nulos. Es inmediato que en consecuencia las potencias sucesivas, desde 0 hasta k+n-1, de la matriz del sistema, multiplicadas por el vector de coeficientes de los instrumentos, definen k+n vectores linealmente independientes, criterio que, según demuestran Lee y Markus ([5], Capítulo 2, Teorema 5), implica que el subsistema (A.26), y por ende el sistema completo, son controlables.

Como corolario de esta proposición, podemos enunciar que un sistema estabilizable sigue siéndolo después de introducirse retardos en la acción de los instrumentos. La demostración es similar a la del teorema; sólo debemos tener en cuenta que la parte completamente incontrolable del sistema no queda afectada por tales retardos, ya que de todos modos los instrumentos no la afectan.

Proposición 6.-Demostración. Podemos eliminar la tasa de preferencia temporal del problema si efectuamos el cambio de variables

$$x = ye^{\frac{1}{2}rt} ; u = ze^{\frac{1}{2}rt} \qquad (A.27)$$

en este caso el problema se reduce a minimizar

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (y'Wy + 2yTz + z'Vz)dt \qquad (A.28)$$

sujeto a las restricciones

$$dy / dt = (A - 0.5\, r\, I)\, y + B\, z \qquad (A.29)$$

dadas las condiciones iniciales $y(0) = y_0 = x_0$

La parte no controlable de este sistema transformado tendrá grado de amortiguación positivo, es decir, es estable; por lo tanto todo el sistema es estabilizable, por lo que existirá una matriz de realimentación $\overline{D}$ que lo estabilice. Introduciendo la solución de este sistema estable en (A.28) obtendremos una integral convergente, de modo que habrá al menos un control admisible. Siguiendo la demostración de Lee y Markus ([5], Capítulo 3, Teorema 7) para el caso en que T es nulo al igual que r, hallaremos que existe un control óptimo. Además existe una matriz negativa definida E que permite determinar los valores óptimos de los instrumentos por medio de la síntesis de realimentación

$$u = V^{-1} (B'E - T') x \qquad (A.\ 30)$$

y la trayectoria óptima satisface el sistema diferencial asintóticamente estable

$$dy/dt = (A - 0.5\, rI - BV^{-1} T' + BV^{-1} B'E)\, y \qquad (A.\ 31)$$

o en términos de las variables originales, tendremos un sistema con grado de amortiguación mayor que (-r/2) ,

$$dx/dt = (A - BV^{-1} T' + BV^{-1} B'E)\, x \qquad (A.\ 32)$$

El Lagrangeano del problema transformado es

$$\int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} y'Vy - y'Tz - \frac{1}{2} z'Vz + p'\left(Ay - \frac{1}{2} ry + Bz - dy/dt \right) \right) dt \qquad (A.33)$$

de modo que las condiciones necesarias para el óptimo son

$$-Wy - Tz + A'p - 0.5\, rp + dp/dt = 0$$

$$(A.34)$$

$$-T'y - Vz + B'p = 0$$

De la segunda de estas ecuaciones obtenemos

$$z = V^{-1} (B'p - T'y) \qquad (A.\ 35)$$

reemplazando en la primera de las condiciones necesarias y en el sistema (A.29), obtendremos

$$\begin{pmatrix} dy/dt \\ dp/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BV^{-1}T' - \frac{1}{2} rI & BV^{-1}B' \\ W - TV^{-1}T' & TV^{-1}B' - A' + \frac{1}{2} rI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} \qquad (A.36)$$

Como $W - TV^{-1} T' > 0$, y el sistema (A. 29) es estabilizable, un razonamiento similar al de Lee y Markus ([5], Capítulo 3, Sección 3, Ejercicio 15) nos permite concluir que la matriz negativa definida E existe, y satisface

$$W - TV^{-1}T' = E(A - BV^{-1}T' - 0.5\, rI) + (A - BV^{-1}T' - 0.5\, rI)'E + EBV^{-1}B'E \qquad (A.37)$$

La solución de (A. 36) satisface la relación p = Ey, que introducida en (A. 35) da, con la definición de z e y en términos de u y x, la síntesis de realimentacion (A. 30). Si a la matriz del sistema (A. 31) la denominamos M, (A. 37) puede escribirse como

$$W\text{-}TV^{-1}T' \;\; EBV\; B'E \;\; EM \;\; M'E \;\; 0 \qquad \text{(A. 38)}$$

ya que el miembro izquierdo es la suma de una matriz positiva con una no-negativa; como E es negativa, por un teorema de Liapunov (Lee y Markus [5], Capitulo 3, Tema previo al Teorema 7), M es estable. Como la matriz del sistema (A. 32) es M + 0.5 rI, ésta tendrá grado de amortiguacion mayor que (-0.5 r).

Proposicion 7.- Demostracion. Se trata de un corolario de la demostracion de la proposición 3, junto con el teorema 7 del Capitulo 2 de Lee y Markus [5], que en nuestro lenguaje dice que el sistema (20) es linealmente equivalente a uno de la forma (A. 18). Para este la relación (21) es f + d = a, con f y a como en el primer parrafo de la demostracion de la proposición 3, y con d = r. Como la transformacion que lleva a este sistema al original es regular, la conclusion es inmediata.

Proposición 8.- Demostracion. La afirmacion a) es obvia; la de b) más compleja. El problema puede plantearse como el de hallar el minimo de la formula (19) del texto, sujeto a las relaciones dadas por el sistema (20), las condiciones iniciales x_0 sobre el estado del sistema, y la condición (23) que es equivalente a

$$u = x'Ky; \qquad y \geq 0; \quad s'y = 1 \qquad \text{(A. 39)}$$

Supondremos que la tasa de preferencia temporal es nula; no perderemos generalidad, ya que siempre podremos efectuar el cambio de variables que utilizaramos en la demostración de la proposicion 6. Formemos el Lagrangeano

$$\int_0^{t}\left(-\frac{1}{2}x'Wx - u'Tx - \frac{1}{2}vu^2 + p'(Ax + bu - dx\;\; dt)\right) + r(x'Ky - u) + q(1 - s'y)dt$$

A 40)

que una vez calculadas sus derivadas nos proporciona las condiciones necesarias para el optimo

$$-Wx - uT + A'p + dp/\,dt + rKy = 0$$

$$-T'x - vu + b'p - r = 0 \qquad \text{(A. 41)}$$

$$rK'x - qs \qquad \leq 0$$

donde cada desigualdad estricta en el último grupo de inecuaciones corresponde a un elemento nulo del vector y; en consecuencia, efectuando el producto de estas desigualdades por el vector y, obtendremos

$$\begin{aligned} ru &= q \\ &\qquad\qquad (A.\ 42) \\ u &= (1/v)\,(b'p - r - T'x) \end{aligned}$$

la segunda ecuación se obtiene despejando u de la segunda ecuación en (A. 41). Ahora bien, si $r = 0$, nos hallamos frente al caso a) de nuestra proposición; esto se confirma al notar que las condiciones necesarias coinciden con las que corresponden al óptimo sin restricción sobre los instrumentos. En el caso b) debemos tener $r \neq 0$. En consecuencia, salvo para un conjunto de instantes de medida cero el último grupo de restricciones sólo podrá contener exactamente una igualdad. El elemento correspondiente del vector y será igual a la unidad, debiendo ser nulos los demás para poder cumplir con (A. 39). Habrá así para cada t una columna de K, k_t, tal que $Ky = k_t$ da el vector de realimentación para ese instante. Efectuando la síntesis del control, es decir, calculando la solución para cada valor inicial $x_0 = x$ posible, la columna inicial de K, k_x, cumplirá con los requisitos deseados. En particular, debido a la continuidad de las funciones con respecto a t, el vector de realimentación óptimo será constante por tramos.

REFERENCIAS

[1] ALLEN. R. G. D.. Mathematical Economics. 2ª ed.. 1960. London: Macmillan: New York: St. Martin's.

[2] ALLEN. R. G. D.. Macro-Economic Theory. 1967. London-. Macmillan. New York: St. Martin's.

[3] FOX. K. A.. J. K. SENGUPTA. y E. THORBECKE. The Theory of Quantitative Economic Policy. 1966. Amsterdam: North Holland.

[4] GALE. D.. The Theory of Linear Economic Models. 1960. New York: McGraw-Hill.

[5] LEE. E. B.. y L. MARKUS. Foundations of Optimal Control Theory. 1967. New York. London. Sydney: John Wiley.

[6] MANTEL. R.R.. An Efficient Algorithm for the Computation of a Solution to Von Neumann's Model. Instituto Torcuato Di Tella. TI 68. Junio de 1969.

[7] PHILLIPS. A. W.. "Stabilization Policy in a Closed Economy". Economic Journal. 64 (1954). 290-323.

[8] PHILLIPS. A. W.. "Stabilization Policy and the Time Forms of Lagged Responses". Economic Journal. 67 (1957). 265-277.

[9] SENGUPTA. J. K.. "Optimal Stabilization Policy with a Quadratic Criterion Function". Review of Economic Studies. 37 (1970). 127-145.

[10] THRALL. R. M.. y L. TORNHEIM. Vector Spaces and Matrices. 1957. New York: John Wiley.

[11] TINBERGEN. J.. Economic Policy: Principles and Design. 1956. Amsterdam: North Holland.

[12] TUSTIN. A.. The Mechanism of Economic Systems. 2ª ed.. 1957. Melbourne: William Heinemann.