Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

EQUILIBRIO Y OPTIMALIDAD EN ECONOMIAS DE INTERCAMBIO LINEALES

ROLF R. MANTEL*

Introducción

El presente trabajo tiene por finalidad analizar el problema de la existencia de equilibrio competitivo en el modelo lineal de intercambio puro. A pesar de su simplicidad, dicho modelo permite estudiar situaciones que se presentan en la teoría del comercio internacional en bienes intermedios, especialmente en lo referente a la estructura de la especialización en el consumo como opuesta a la especialización en la producción típica de los modelos Ricardianos.

Además de esta aplicación directa del modelo lineal de intercambio existe otro motivo que induce a estudiarlo con cierta profundidad a pesar de que sus supestos puedan no parecer demasiado cercanos a la realidad económica. Este motivo radica en la deseabilidad de hallar un método para el computo de soluciones de equilibrio de modelos de equilibrio general, a fin de poder utilizar éstos para la determinación de medidas de política económica sobre bases más sólidas que los usuales modelos de tipo pedagógico con pocas variables. Si bien tales métodos han sido desarrollados en la última década, todavía son demasiado generales como para justificar su utilización directa en sistemas de ecuaciones especiales como son las de equilibrio económico.

El descubrimiento del autor (1976) de que en este caso particular la solución del modelo de equilibrio general se puede reducir a un problema de maximización de una función cóncava sujeta a restricciones lineales, da acceso a todo el campo de la teoría de la programación matemática convexa para ser aplicado a este problema. Sin embargo la función de bienestar social desarrollada en el artículo mencionado está definida en forma implícita, no siendo muy claro su significado económico. A continuación se presentará un estudio de casos sencillo incluyendo el tradicional de dos países y dos bienes, para proveer una expresión más sencilla de dicha función de bienestar.

---

* Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Universidad Católica Argentina, Instituto Di Tella.

También se presentarán construcciones gráficas para poder visualizar mejor el problema.

Un modelo sencillo de comercio internacional en bienes intermedios

Con el propósito de mostrar la utilidad del modelo lineal de intercambio, presentamos un modelo sencillo de comercio internacional en el que sólo se exportan e importan bienes intermedios, pero no los factores de producción ni los bienes de consumo. Como se verá más adelante, dicho modelo permite analizar problemas de especialización. A pesar de parecer sencillo el cálculo y descripción del equilibrio ya es suficientemente complejo como para justificar su estudio como primer paso previo al análisis de modelos más complejos.

Considérese la existencia de m países designados con el índice i. El intercambio entre ellos se limita a n categorías de bienes intermedios, designados con el índice j. Cada país dispone de recursos productivos -trabajo, tierra, etc.- no comerciables internacionalmente, y asignados en forma permanente a cada uno de los n+1 sectores productivos, de los cuales n se dedican a la producción de bienes intermedios –no hay producción conjunta, de manera que cada sector produce exclusivamente uno de los bienes – y el restante a la canasta fija de bienes de consumo necesaria para satisfacer las necesidades de los habitantes del país. La producción de bienes intermedios del país i se designa con w^i , un n-vector con elementos no negativos w^i_j que indican la cantidad producida de los bienes j. Debido a la inmovilidad intersectorial de los recursos, suponiendo que se emplean a plena capacidad, dicho vector es un dato. Nos referiremos a él con el nombre de dotación inicial de bienes del país i.

El intercambio de bienes intermedios transforma la dotación inicial en el n-vector x^i, también de elementos no negativos que representan las cantidades de bienes intermedios utilizados por el sector productor de bienes de consumo para la elaboración de la canas ta de consumo. El producto de este sector depende escencialmente de los insumos de bienes intermedios; su nivel alcanza

$$u_i = c^i \cdot x^i = \sum_j c^i_j x^i_j$$

siendo el n-vector c^i constante con elementos no negativos.

Las preferencias de los consumidores del país i son las obvias de alcanzar el mayor nivel posible para u_i.

Con el fin de simplificar el análisis, permítasenos emplear el artificio de Meade y Rader, integrando el sector de producción de bienes de consumo con el de las familias. La consecuencia será la obtención de preferencias derivadas, definidas ahora sobre las cantidades de insumos: en nuestro caso las mismas pueden ser representadas por una función de utilidad que coincide con el nivel del producto u_i del sector productor de la canasta de consumo. Por ello en adelante designaremos al vector de productos marginales c^i con el nombre alternativo de utilidades marginales, y al nivel del producto u_i con el de utilidad del país i.

Los términos del intercambio están dados por el n-vector p con elementos no negativos no todos nulos de precios internacionales. Los exportadores e importadores toman estos precios como un dato; en ausencia de distorsiones del comercio internacional, estos mismos precios regirán para los sectores domésticos de cada país. En consecuencia, el sistema estará en equilibrio si se cumplen las siguientes condiciones, para un vector de precios p* y una asignación final de bienes $X^* = (x^{1*}, ..., x^{m*})$ no negativa:

$$\text{(E1)} \quad X^*e \le We;\ p^*.(X^*e\text{-}We) = 0$$

$$\text{(E2)} \quad p^*X^* \le p^*W$$

$$\text{(E3)} \quad C \le p^*b' \text{ para b no negativo; } tr(C\text{-}p^*b')'\, X^* = 0$$

Aquí e es el m-vector suma, con elementos iguales a la unidad, de manera que el efecto de postmultiplicar por ejemplo la matriz de asignación X por el vector suma es el de producir la asignación agregada. Las columnas de las matrices W y C son w^i y c^i, respectivamente, con su orden natural. El vector b tiene m elementos. El operador tr indica la traza de su argumento, definida como la suma de los elementos de la diagonal. Así, si A es una matriz cuadrada de orden h con elementos a_{jk},

$$\text{tr A} = \sum_{j=1}^{h} a_{jj}$$

El apóstrofe ' indica transposición, que no siempre se indica expresamente, como en el caso de p* en (E2) – por ser requisito indispensable para que el producto sea conformable.

Las condiciones de equilibrio se interpretan como sigue. La primera, (El), es la condición de equilibrio de mercado entre demanda y oferta, no debiendo la primera exceder la segunda. La segunda parte de esta condición garantiza que los bienes para los que hay exceso de oferta tienen un precio nulo, es decir, son bienes libres. La relación (E2) corresponde a la restricción de presupuesto o de balance de pagos: nótese que debido a la segunda parte de (El) la desigualdad (E2) puede ser reemplazada por una igualdad. La condición (E3) es quizá la menos transparente; sin embargo un ligero análisis permitirá descubrir la proporcionalidad entre utilidades marginales y precios implicada por la maximización de la utilidad de cada país, siendo el factor de proporcionalidad la utilidad marginal del ingreso b_i. La segunda parte de (E3) es simplemente el requisito de que si el precio del bien j multiplicado por b_i excede a la utilidad marginal correspondiente, entonces la cantidad $x^i_j{}^*$ debe ser nula. Como el problema de maximización de cada país es lineal debido a la estructura simple de sus preferencias, las relaciones de dualidad de la teoría de la programación lineal garantizan que si se cumplen (E2) y (E3) cada país está maximizando su utilidad sujeto a la restricción impuesta por la exigencia de equilibrio en el balance de pagos.

Debido a la estructura de las preferencias Gale (1957 – 1976) denomina a éste "modelo lineal de intercambio". Toda la información sobre el sistema está contenida en las dos matrices no negativas de n filas y m columnas W –dotación inicial de bienes – y C – utilidades marginales–. Gale impone las siguientes condiciones sobre dichos datos.

$$(S1) \qquad We > 0$$
$$(S2) \qquad Ce > C$$

La primera de estas condiciones dice que el agregado de las dotaciones iniciales de todos los países de cada bien es positivo: no tiene mucho sentido incluir en el modelo bienes que nadie posee ni puede producir.

La segunda condición exige que todos los bienes sean deseados por alguien; los bienes que no entran en las preferencias de alguien pueden ser ignorados, ya que se sabe de entrada que su precio será nulo en cualquier situación de equilibrio.

Nosotros agregaremos una tercera condición.

$$(S3) \qquad eW>0$$

que significa que excluimos los casos en que w^i es nulo, es decir que el país en cuestión no posee ni produce bienes intermedios. Es obvio que el mundo no va a verse alterado por su desaparición, ya que no tiene nada que ofrecer.

Bajo estas condiciones Gale (1976) demuestra que la existencia de una solución de equilibrio cumpliendo con las condiciones (E1-3) es equivalente a la condición (SAS) de la ausencia de grupos de países super-autosuficientes.

Si representamos con C_J^I a la suma de elementos c_j^i de la matriz C correspondientes a países en el conjunto de países I y a bienes en el conjunto de bienes J, y adoptando convenciones similares para W, podemos expresar esta condición como

$$\text{(SAS)} \quad C_J^I = W_{J^c}^{I^c} = 0 \text{ implica que } W_J^I = 0$$

para subconjuntos I, J de países y bienes arbitrarios, donde I^c, J^c representan los complementos de los conjuntos I, J respectivamente. En palabras, esto significa que si nadie en el grupo de países I desea alguno de los bienes incluídos en el conjunto J, y si ninguno de los otros países posee un bien no incluído en J – es decir si I es un grupo de países autosuficiente, por desear sólo bienes poseídos por integrantes del mismo grupo– entonces nadie en I posee bienes del conjunto J– es decir I no es super-autosuficiente por no sobrarle bienes indeseados –.

La demostración del equilibrio ha sido efectuada por Gale (1957) utilizando el teorema de punto fijo de Kakutani y por Eaves (1976) utilizando un algoritmo de los así llamados de punto fijo, basado en un argumento original de Lemke y Howson (1964). El presente autor (1976) demostró que en el caso en que tanto C como W son positivas – por lo tanto la condición (SAS) se cumple trivialmente pues todos desean y poseen todos los bienes – es suficiente la aplicación de los conceptos mucho más sencillos del análisis convexo, y en particular del teorema de Kuhn y Tucker de programación no lineal, para la demostración. La extensión al caso más general puede obtenerse por un argumento basado en un pasaje al límite, aproximando las matrices no negativas C, W con matrices positivas. Una demostración más directa también es posible , y será motivo de un trabajo futuro.

Equilibrio y óptimo de bienestar

El autor (1976) utilizó la siguiente función de bienestar (mundial) para hallar la solución de equilibrio del modelo lineal de intercambio por medio de la solución de un problema de maximización de una función cóncava sujeta a restricciones lineales.

$$\text{(B)} \qquad b(u) = \sup_{p>0} \min_{i,j} \frac{u_i p_j}{c^i_j(p.w^i)}$$

La definición se ha modificado levemente para incluir el caso en que los datos no son todos positivos, pero (SAS) se cumple. Aquí la división por cero da como resultado $+\infty$.

Los niveles de utilidad obtenidos maximizando la función b sujeta a la restricción de que el vector u sea una asignación factible de utilidades a países son los niveles correspondientes a la única asignación competitiva, como fuera demostrado anteriormente (1976).

Cabe la pregunta de si es posible dar una forma más sencilla a la función de bienestar la expresada en (B). La esperanza en tal sentido nos la da el resultado de Gale de que la solución de equilibrio del problema está en el campo racional. Para niveles de u que no son de equilibrio sólo podemos decir que la fórmula recuerda a la del factor de crecimiento máximo en el modelo de crecimiento de Von Neumann, bajo la restricción de que todos los procesos pueden ser utilizados por poco que se relaje el ritmo de crecimiento de la economía. Ello nos proporciona de inmediato la fórmula dual.

$$\text{(B')} \qquad b(u) = \min_{R>0} \max_{k} \frac{\sum_i u_i r^i_k}{\sum_{ij} r^i_j c^i_j w^i_k}$$

Quizá un poco más tratable que (B) por no exigir el cálculo de un supremo. Como es sabido que el modelo de Von Neumann posee en general soluciones que no son funciones racionales de los coeficientes, no parece ser posible llegar más lejos sin tener en cuenta con más cuidado la estructura especial del problema.

En el otro extremo tenemos el caso en que la distribución del ingreso es constante, independiente de los precios. Para ello es necesario que las dotaciones iniciales de bienes de los países sean todas proporcionales a la dotación agregada w = We, es decir

$$W = w.d'$$

donde el elemento d_i del m-vector d representa la participación del país i en la dotación inicial mundial. Obviamente, cada d_i es positiva, y la suma de estas participaciones es la unidad.

Reemplazando en (B) se tiene

$$b(u) = \sup_{p>0} \frac{1}{p.w} \min_{j} \frac{p_j}{\max_i c_j^i d_i / u_i}$$

$$= 1 \Big/ \left[\sum_j w_j \max_i \{ c_j^i d_i / u_i \} \right]$$

función que obviamente depende racionalmente de los parámetros del sistema.

A fin de aclarar el punto, en la sección sobre el caso de dos países con dos sectores analizaremos el modelo más exhaustivamente.

Dos países, un solo bien

Por supuesto la situación mencionada en el título de esta sección es trivial, ya que no es posible realizar intercambio de bienes alguno. Sin embargo permite considerar algunos problemas que se repiten en casos más complejos. Los supuestos (Sl-3) implican que ambos países poseen cierta cantidad del bien, de modo que w_1^1 y w_1^2 son positivas. Como el bien es deseado al menos por un país, podemos suponer que se trata del segundo, de manera que c_1^2 es también positiva, mientras que c_1^1 será no negativa. La definición de b (.) nos da

$$b(u) = \min\{ u_1 / c_1^1 w_1^1, u_2 / c_1^2 w_1^2 \},$$

que deberá ser máximo sujeto a las restricciones

$$u_1 \le c_1^1 x_1^1 ; u_2 \le c_1^2 x_1^2 ; x_1^1 + x_1^2 \le w_1^1 + w_1^2 ; x_j^i \ge 0$$

que definen al conjunto de posibilidades de utilidad.

Puede ser verificado fácilmente que el resultado depende sólo de si c_1^1 es nula o no. En el caso afirmativo, el óptimo implica que $x_1^1 = 0; x_1^2 = w_1^1 + w_1^2$. Puede verse de inmediato que esta situación no es de equilibrio, ya que no hay fuerzas de mercado que puedan transferir el excedente no deseado por el país 1 al país 2 si el único precio es positivo, sin transgredir la condición de equilibrio de balance de pagos. En este caso es fácil verificar que no se cumple la condición (SAS) de Gale; además, el valor de b en el óptimo es $1+w_1^1/w_1^2$ es decir, superior a la unidad, cuando anteriormente (1976) se ha demostrado que si una solución de equilibrio existe el máximo de esta función en el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad es exactamente igual a la unidad.

En caso de ser c_1^1 positiva, en cambio, el máximo de b es igual a la unidad, con una asignación final de bienes igual a la inicial, como debe ocurrir en un equilibrio sin comercio. En este caso se cumple también la condición (SAS).

Dos países, dos bienes

Dos por dos es el número tradicional de bienes y países en la teoría del comercio internacional: el menor número de algún interés, pues ya se puede producir una situación de equilibrio con intercambio no nulo.

Si las utilidades marginales de uno de los países son nulas, se presenta la anomalía anterior, pues en el óptimo todos los bienes serán asignados al otro país, situación incompatible con el balance de pagos a precios positivos - condición que deben cumplir los precios de equilibrio como consecuencia del supuesto de que todos los bienes son deseados-.

Consideremos por lo tanto la situación más interesante en que todos los países desean por lo menos algún bien. Intercambiando si es necesario la designación de los países, podemos suponer que el determinante de C es no negativo, indicando una tendencia de cada país a preferir el bien con su mismo número. Además nuestros supuestos implican que tanto c_1^1 como c_2^2 son estrictamente positivos, por lo cual la condición sobre el determinante implica la relación

$$(1) \qquad (c_2^1/c_1^1).(c_1^2/c_2^2) \leq 1,$$

La definición (B) puede reescribirse como

$$(2) \qquad b(u) = \sup_{p>0} \; \min\{ f^1(p), f^2(p)\},$$

donde

$$(3) \qquad f^i(p) = u_i[\min\{p_1/c_1^i, p_2/c_2^i\}]/(w_1^i p_1 + w_2^i p_2).$$

Si p_2/p_1 es menor que c_2^1/c_1^1, debido a la relación (1) será el segundo término el que define a ambas funciones en (3). Estas pueden ser incrementadas aumentando p_2; por ello se deduce que

$$(4) \qquad p_2/p_1 \geq c_2^1/c_1^1 .$$

Por argumento simétrico se obtiene

$$(5) \qquad p_1/p_2 \geq c_1^2/c_2^2 .$$

En consecuencia, de (3), (4), y (5),

$$(6) \qquad f^i(p) = u_i p_i / c_i^i (w_1^i p_1 + w_2^i p_2)$$

siendo por lo tanto f^i creciente de p_i y decreciente en el otro precio. Se presentan tres casos

a) Si se tiene

$$f^1(c^1) \leq f^2(c^1)$$

o sea

$$u_1/w^1.c^1 \leq u_2 c_2^1/c_2^2 (w^2.c^1),$$

debido a (4) sólo p_2 puede aumentar, lo cual disminuiría al menor de estos dos valores. Por ello en este caso $p = c^1$, con

$$(7) \qquad b(u) = f^1(c^1) = u_1/(w^1.c^1)$$

b) Si en cambio

$$f^2(c^2) \leq f^1(c^2)$$

es decir,

$$u_2/w^2.c^2 \leq u_1 c_1^2/c_1^1 (w^1.c^2),$$

un razonamiento simétrico al del caso a) nos da $p = c^2$, con

$$(8) \qquad b(u) = f^2(c^2) = u_2/(w^2.c^2).$$

c) Finalmente, si no se dan los dos casos anteriores, de modo que

$$c_2^1(w^1.c^2)/c_2^2(w^2.c^1) < u_1/u_2 < c_1^1(w^1.c^2)/c_1^2(w^2.c^2),$$

partiendo de $p = c^1$ se debe incrementar p_2 hasta que $f^1(p) = f^2(p)$. En otro términos,

$$u_1p_1c_2^2(w_1^2p_1 + w_2^2p_2) = u_2p_2c_1^1(w_1^1p_1 + w_2^1p_2).$$

Igualando $b(u) = f_1(p)$ y reemplazando p por una solución de esta ecuación de segundo grado con coordenadas positivas, se llega a la expresión

$$(9) \qquad b(u) = (a_1u_1 + a_2u_2 - ((a_1u_1 + a_2u_2)^2 - 2du_1u_2)^{\frac{1}{2}})/d$$

donde

$$a_1 = c_2^2w_2^2 \;\; ; \;\; a_2 = c_1^1w_1^1 \;\; ; \;\; d = 2c_1^1c_2^2(w_1^1w_2^2 - w_2^1w_1^2).$$

Para los casos en que $d = 0$, se tiene

$$(10) \qquad b(u) = u_1u_2/(a_1u_1 + a_2u_2)$$

El signo de la constante d determina la estructura de las dotaciones iniciales de bienes. Cuando d es nula, la distribución del ingreso es independiente de los precios; cuando es positiva, cada país posee una cantidad relativamente mayor del bien designado con su propio índice, y por lo tanto un aumento de dicho precio mejora su ingreso en relación al del otro país. En todos los casos la ecuación $b(u) = 1$ determina la hipérbola equilátera con asíntotas $u_1 = a_2$, $u_2 = a_1$.

Como la ecuación (10) puede obtenerse de la (9) tomando el límite cuando d tiende a cero, a continuación no la consideraremos explícitamente. Podemos escribir en base (7), (8) y (9)

$$(11) \qquad b(u) = \min\{u_1/w^1.c^1, u_2/w^2c^2, [a.u - \sqrt{(a.u)^2 - 2du_1u_2}]/d\},$$

expresión que nos da la función de bienestar explícitamente en términos de los parámetros del sistema y de los niveles de utilidad.

Analicemos la consecuencia de tener algunos parámetros nulos. Si el país 1 sólo desea sus propios bienes podría darse la situación en que $c_2^1 = w_1^2 = 0$. En tal caso $d = 2a_1a_2$, y el miembro derecho de (9) se simplifica a $\min\{u_1/a_2, u_2/a_1\}$ siendo por ello redundante en la fórmula (11) que se convierte en

$$(12) \qquad b(u) = \min_i \{u_i/w_i^i.c_i^i\}.$$

Es obvio que el máximo de esta función, dada la restricción impuesta por la oferta de dotaciones iniciales, es igual a la unidad. Si el país es super-autosuficiente, se tendrá que w_2^1 es positiva; por lo tanto 1 puede disfrutar de un nivel de utilidad mayor que el que obtiene del bien 1 solamente, de modo que en el óptimo de bienestar su utilidad estará indeterminada entre ciertos límites. Habrá niveles de utilidad óptimos que no son óptimos de Pareto, y en consecuencia no podrán ser asignaciones de niveles de utilidad competitivas. En cambio si se cumple (SAS), este inconveniente no surge. Los niveles de utilidad estarán determinados en forma única, dedicándose cada país al consumo de su dotación inicial de bienes. No habrá comercio en este caso.

Una solución que implique comercio requiere que ninguno de los dos países sea autosuficiente.

Dos bienes, varios países

Supóngase ahora que el número de bienes es n=2, mientras que el número de países m es arbitrario. Para simplicidad en el análisis se supondrá que las matrices C y W son estrictamente positivas, aunque los resultados pueden ser extendidos fácilmente al caso general.

De la definición (B) se obtiene para b(u) = 1 un vector $p \geq 0$ tal que para todo i, j

$$(1) \qquad c_j^i \left(p.w^i\right) \leq u_i p_j$$

de donde se deduce fácilmente

$$(2) \qquad c^I . w^I \leq u_i$$

que nos dice que la oportunidad de comerciar internacionalmente no puede perjudicar a nadie- el miembro izquierdo de esta desigualdad es la utilidad de la dotación inicial-.

También se deduce de (1) la secuencia.

$$\begin{aligned} c_2^i w_2^i p_1 w_1^i &= c_2^i w_2^i \left(pw^i - p_2 w_2^i\right) \\ &\leq \left(u_i - c_2^i w_2^i\right) p_2 w_2^i \end{aligned}$$

donde la igualdad es consecuencia del hecho de que sólo existen dos bienes, mientras que la desigualdad se obtiene aplicando (1). Reordenando y simplificando,

$$(3) \qquad p_1/p_2 \leq \left(u_i - c_2^i w_2^i\right)/c_2^i w_1^i$$

y permutando los índices 1 y 2 , para el país k.

$$(4) \qquad p_2/p_1 \leq \left(u_k - c_1^k w_1^k\right)/c_1^k w_2^k$$

Multiplicando estas dos relaciones miembro a miembro, se tiene para todo par de países i y k la condición

$$(5) \qquad \left(u_i - c_2^i w_2^i\right)\left(u_k - c_1^k w_1^k\right) \geq c_2^i c_1^k w_1^i w_2^k$$

Ahora bien, el conjunto de restricciones (2) y (5) es equivalente al (1).

Para ver esto, desígnese con r^i_2 y r^k_1 los miembros derechos de las desigualdades (3) y (4), respectivamente. Las restricciones (2) garantizan que estos números son positivos, mientras que la (5) dice que

$$r^i_2 \geq 1 / r^k_1$$

para todo par de países, i , k. Tomando $p_2 = 1$, $P_1 = min_i\, r^i_2$ se tiene una solución para (3) y (4), y con ello para el conjunto de inecuaciones (1).

Debido a la homogeneidad de la función b(u), es posible por lo tanto expresarla explícitamente como

$$(6) \qquad b(u) = min\left\{ \min_i \frac{u_i}{c^i w^i}, \min_{i,k} g^{ik}(u) \right\}$$

donde

$$g^{ik}(u) = \left[a^{ik}u - \sqrt{(a^{ik}u)^2 - 2u_i u_k d_{ik}}\right] / d_{ik}$$

$$a^{ik} = c_2^i w_2^i e^k + c_1^k w_1^k e^i$$

$$d_{ik} = 2c_2^i c_1^k (w_1^i w_2^k - w_2^i w_1^k)$$

y e^i representa el vector m-dimensional cuyo único elemento no nulo es el i-ésimo, igual a la unidad. La fórmula (6) muestra que b es estrictamente cóncava en los tramos en que es estrictamente creciente.

Dos países, varios bienes

Si el sistema comprende sólo dos países, siendo arbitrario el número n de bienes, es conveniente enfocar el problema desde un ángulo algo distinto, aunque equivalente. Considérese el problema de programación lineal

$$\text{(P)} \qquad \text{Max} \quad \sum_i a_i u_i$$

sujeto a las condiciones

$$\sum_i x^i \leq w^k$$
$$c^i x^i = u_i$$

y las obvias sobre la no negatividad de las cantidades consumidas x^i. Aquí el vector n-dimensional a es positivo y puede ser interpretado como que sus elementos representan ponderaciones de bienestar, ya que se utilizan para ponderar con ellos los niveles de utilidad de los países. El máximo proporciona un punto sobre el conjunto de posibilidades de utilidad de la comunidad, si el consumo se restringe a la dotación inicial de bienes del país k. Las restricciones del dual de este problema son

$$\text{(D)} \qquad c^i_j a_i \leq p_j$$

que junto con las restricciones iniciales y las condiciones de complementariedad de Kuhn y Tucker implican la siguiente cadena de igualdades

$$au = \sum_{ij} a_i c^i_j x^i_j = \sum_{ij} p_j x^i_j = \sum_j p_j w^k_j = pw^k$$

Es posible determinar este valor en un gráfico de dos dimensiones en el espacio de los niveles de utilidad, como se hará en la construcción siguiente.

En el gráfico 1 puede apreciarse la construcción de un tramo de la curva definida por la ecuación b(u) = 1 para m=2. Allí v^i es un vértice del conjunto de posibilidades de niveles de utilidad de la sociedad obtenibles utilizando únicamente la dotación de bienes inicial del país i-ésimo. Estos vértices se han elegido de manera tal que su suma corresponda al punto designado con $v^1 + v^2$ sobre la frontera de posibilidades de utilidad total. Dichos vértices serán elegidos por la sociedad cuando las ponderaciones de bienestar son normales a las tangentes en dichos vértices, si la intersección de estas últimas con el eje correspondiente se encuentra entre los puntos A y B. Para una pendiente como la mencionada, dichos puntos de intersección determinan un punto sobre la hipérbola equilátera cuyas asíntotas pasan por el punto v^1 -la vertical- y v^2 -la horizontal- , y una de cuyas ramas pasa por el vértice $v^1 + v^2$. El tramo de dicha hipérbola relevante para el análisis es el comprendido entre los puntos A y B sobre la misma, correspondientes cada uno a sus homónimos sobre los ejes horizontal y vertical.

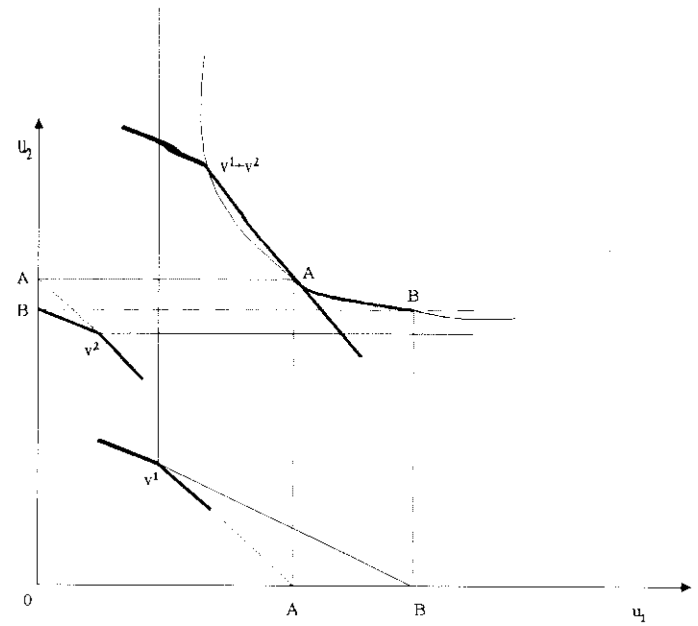

Gráfico 1

En el gráfico 2 se ha ejemplificado el caso de dos países con tres bienes.

Se ha delimitado el conjunto de posibilidades de utilidad U y sus dos componentes U^1 y U^2 - las posibilidades cuando las oportunidades se limitan a las tenencias iniciales de bienes de uno solo de los países -. .La construcción es idéntica a la del gráfico 1, habiéndose dibujado la curva que representa a la ecuación b(u) = 1. El punto B de tangencia de dicha curva de indiferencia social con el conjunto de posibilidades de utilidad corresponde al óptimo de bienestar inducido por el mercado, es decir, a las asignaciones de utilidad correspondientes a una solución de equilibrio competitivo.

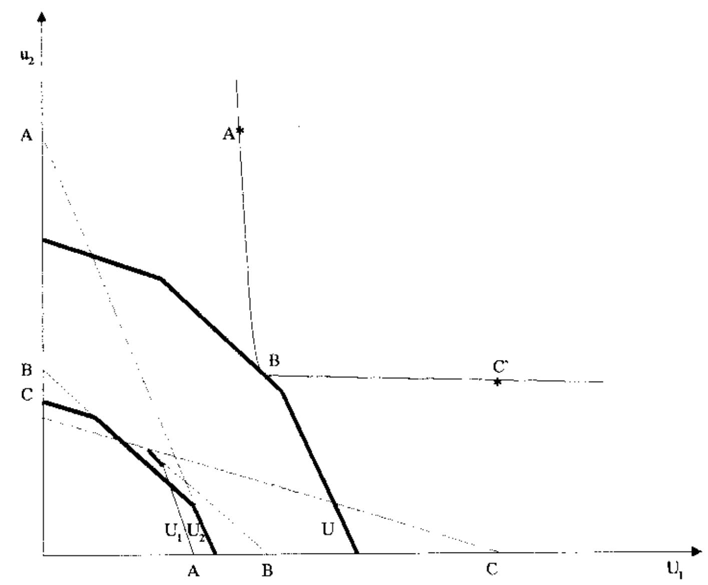

Gráfico 2

Varios países, varios bienes

En el caso general, la situación no difiere mucho del caso de dos países, excepto que las funciones serán ahora polinomios de grado m, el número de países, en los lugares en que antes eran cuadráticas. Tampoco podremos apelar fácilmente a gráficos.

El análisis sigue al caso mencionado de dos países. Debido a que la función b(u) es cóncava, y por lo tanto continua, será suficiente analizar que sucede para aquellos vectores de ponderación a que produzcan como solución del problema de programación lineal (P) un punto extremo del conjunto de posibilidades de utilidad. Afortunadamente, debido a la linealidad del problema su número es finito.

Correspondiendo a un tal punto extremo, corresponderán m puntos extremos v^1.........v^m, uno en cada uno de los conjuntos de posibilidades de utilidad parciales, es decir, los que definen las posibilidades obtenibles partiendo de la dotación inicial de bienes del país correspondiente.
Sea entonces V la matriz (v^1.........v^m) de puntos extremos, y sea a > 0 uno de los vectores de ponderaciones de bienestar que la determinan. Se tendrá entonces que b(u) es el valor de t en la ecuación $\hat{u}a = tVa$ donde el acento cinrcunflejo (^) representa a una matriz diagonal cuya diagonal coincide con los elementos del vector correspondiente, en este caso a.

En otras palabras, la recíproca de t es la raíz de Frobenius -es decir, la raíz positiva máxima- de la matriz $\hat{u}^{-1}$ V, y por lo tanto la raíz positiva menor de la ecuación polinomial $det(\hat{u} - tV) = 0$ donde el miembro izquierdo es un polinomio de grado m en t; det significa determinante.

Como ha sido demostrado (1976), b(.) es cóncava; por lo tanto, por una vía un tanto indirecta, se puede deducir la recíproca de la raíz de Frobenius de $\hat{u}^{-1}$ V es una función cóncava en u. Por supuesto, es posible dar una demostración más directa de esta proposición.

Especialización en el consumo

La estructura lineal de las preferencias de los países induce a conjeturar que en una solución de equilibrio internacional los mismos se especializarán en el consumo de manera similar a lo que sucede con la producción en el modelo Ricardiano de ventajas comparadas. Esto puede verse de inmediato en el gráfico 2, donde se ha representado el caso de dos países. El punto que corresponde a la solución competitiva se halla sobre la frontera de posibilidades de utilidad, y necesariamente sobre uno de los segmentos que la describen. Cada segmento corresponde a los términos relativos en que se puede transformar la utilidad que goza un país en la del otro, por medio de la transferencia de la dotación mundial de un bien determinado de un país al otro. Si el punto de equilibrio se halla en el interior de uno de tales segmentos, el total de dicho bien será compartido por los dos países; todos los demás bienes serán asignados a uno o al otro para su consumo en su totalidad, de manera que cada uno se especializará por completo en el consumo de ciertos bienes, ignorando los demás, excepto quizá por uno solo en que no habrá especialización. Esta observación incluso puede servir como base para un algoritmo para la determinación del punto de equilibrio, basado en el ordenamiento de los bienes de acuerdo con el "grado de preferencia" c^1_j / c^2_j.

Comenzando por la situación en que todos los bienes se asignan a uno de los países se van transfiriendo los menos deseados por éste al otro hasta llegar al punto de equilibrio. Esto es posible efectuarlo fácilmente por medio de programación lineal paramétrica, utilizando el problema (P) y variando el único – en este caso – parámetro, la relación entre las dos ponderaciones de bienestar a^1 y a^2, hasta el punto en que el balance de pagos de uno de los países se cumpla, tomando como precios los multiplicadores de Lagrange asociados con las restricciones de balance de bienes (E1).

La situación en que solo hay dos bienes es similar. En este caso es posible ordenar los países -antes eran los bienes de acuerdo con su preferencia relativa por los bienes, c^i_1 / c^i_2. Si los términos del intercambio se inclinan hacia un encarecimiento relativo del bien 2, habrá más países que se especializarán en el consumo del bien 1. Por lo tanto puede ajustarse en este caso este único parámetro hasta llegar a una solución de equilibrio en que todos los países se han especializado en el consumo de un solo bien- del que importan lo más que pueden a cambio de su producción del otro- excepto quizá por uno solo que consumirá ciertas cantidades de ambos bienes.

La situación general es más compleja, ya que habrá que ajustar más de un parámetro -m-l ponderaciones relativas de bienestar o n-l precios relativos-. Sin embargo, la estructura de las condiciones de equilibrio (E3) permite indicar el número de cantidades consumidas x^i_j que requieren ser positivas. Nótese que las restricciones del dual (D) requieren, por las condiciones de complementaridad de Kuhn y Tucker, que cada desigualdad estricta esté acompañada por $x^i_j = 0$.

Por lo tanto, como entre los n precios p y las m ponderaciones de bienestar a hay m+n-1 parámetros independientes, salvo coincidencias ése será el número de relaciones que se darán con igualdad en (D). En particular habrá al menos una solución competitiva en la que no se da el caso en que dos países consumen en cantidades positivas los mismos dos bienes. Más aún, si hubiera un ciclo con x^1_1, x^2_1, x^2_2, x^3_2,...,x^k_h, x^1_h todos positivos -nótese que aquí se repiten en forma alternada los índices de los países y de los bienes en forma cíclica- sería posible reasignar las cantidades exportadas e importadas hasta que una de estas cantidades x^i_j se anule sin alterar el equilibrio. Por supuesto, esto es válido para cualquier modificación en la designación de países y bienes.

Conclusión

Hemos presentado un modelo sencillo de comercio internacional de bienes intermedios, y hemos visto cómo se reduce al modelo lineal de intercambio puro. Se ha analizado la forma de la función de bienestar que permite determinar el equilibrio internacional por medio de un problema de maximización no lineal convexo, y se ha demostrado que es posible presentarla en forma explícita, aunque algo complicada si hay más de dos países. Finalmente se ha analizado la estructura de especialización en el consumo que implica una solución de equilibrio, que permite en ciertos casos inferir un algoritmo sencillo para la solución del modelo.

En el caso general todavía parece ser más eficiente calcular la solución mediante el algoritmo propuesto por Eaves. Sin embargo, aún no ha sido dicha la última palabra; la estructura de la función de bienestar b(.) permite inferir que debe ser posible desarrollar un método basado en las propiedades de conjuntos convexos. Este método posiblemente resulte ser más rápido que el de Eaves.

La esperanza es que también proporcione una pauta para la solución del problema más interesante de hallar una asignación de equilibrio competitivo para el modelo de equilibrio general en toda su generalidad, tal como fue presentado por ejemplo por Arrow y Hahn (1972).

REFERENCIAS

ARROW, K y F HAHN, (1972). General Competitive Analysis. San Francisco: Holden Day.

EAVES, B. C. (1976). "A finite algorithm for the linear exchange model". Journal of Mathematical Economics, 3, 197-203

GALE, D., (1957). "Price equilibrium for linear models of exchange". Technical Report P-M56. The Rand Corporation.

GALE, D., (1976). "The linear exchange model", Journal of Mathematical Economics, 3, 205-209.

MANTEL, R., (1976), "The linear exchange model and induced welfare optima". Cowles Foundation Discussion Paper Nº 428.