Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

# ECONOMÍAS DE MERCADO Y COMPLEMENTARIEDAD PERFECTA

ROLF R.MANTEL*

## Introducción

Es sabido (ver por ejemplo Mantel, 1965) que una economía competitiva tipo Arrow-Debreu con un número finito de clases de individuos está descripta por completo, desde el punto de vista de los niveles de utilidad que pueden alcanzar sus integrantes, por una transformación de coaliciones en utilidades. En el presente trabajo se demuestra que la naturaleza de tal descripción no permite distinguir la economía que origina dicha transformación no solamente de una economía de intercambio puro, es decir sin actividades de producción, sino de una en que las preferencias de todos los individuos corresponden a mercancías que son complementos perfectos unas de otras -es decir, con individuos cuyas funciones de utilidad son del tipo de Leontief, con "curvas" o superficies de indiferencia en forma de ángulo recto.

## El modelo

La eliminación de las actividades de producción para reducir el modelo de Arrow-Debreu -tal como fuera descripto por Debreu (1959)- a uno de intercambio puro ha sido explicada por Meade (1952) y Rader (1963) de modo que no será analizada con detalle en este trabajo. Dichos autores mostraron cómo es posible interpretar la producción como realizada por las unidades de consumo, como si la realizaran en sus casas, exteriorizando su demanda por cantidades intercambiadas de bienes una vez tenidas en cuenta las cantidades insumidas y producidas por los procesos productivos. Por lo tanto se partirá directamente del modelo de intercambio puro, tomando como un dato las preferencias de los mercaderes en el intercambio, de acuerdo con el principio que Rader llama "de equivalencia". Se harán algunas simplificaciones en la

* Universidad de San Andrés. Setiembre de 1991.

descripción del modelo que no son esenciales para el resultado pero que simplificarán la exposición.

Sea n el número de clases de mercaderes, l el número de mercancías. Las preferencias del mercader típico de la clase i-ésima, son continuas, convexas, definidas en su conjunto de posibilidades de intercambio $X^i \equiv R^l_+$, es decir, el ortante no – negativo en el espacio Euclideo l-dimensional. Se supone que pueden ser representadas por funciones de utilidad cóncavas $u^i : R^m_+ \rightarrow R_+$[1]. Como también es sabido que una economía arbitraria puede siempre ser aproximada por una en que las funciones de utilidad son lineales por tramos (Mantel, 1965) se supondrá que las funciones $u^i$ (.) son de esa forma, nuevamente en aras de la simplicidad de la exposición[2]

El representante típica de la clase i posee tenencias iniciales positivas, es decir, $w^i \in R^l_{++}$.

Una coalición de mercaderes se representa por medio de un vector $v \in R^n_+$. Cada coordenada representa la proporción de individuos de la clase correspondiente que integra la coalición. Con esta notación si $W \equiv (w^1, ..., w^n)$ es la matriz de tenencias iniciales típicas, las tenencias iniciales agregadas de la coalición estarán dadas por el producto W v. Del mismo modo si $x^i \in R^l_+$ es el vector de cantidades demandadas por el mercader típico de clase i, y si $X \equiv (x^1, ..., x^n)$ es la matriz de asignación de cantidades demandadas típicas, la demanda agregada estaría dada por el producto X v. Por supuesto, para que la coalición pueda subsistir por sus propios medios, debe cumplirse la relación de factibilidad.

$$(1) \qquad X v \leq W v; \quad v \geq 0$$

Los niveles de utilidad agregados que la coalición puede alcanzar por sus propios medios se obtienen multiplicando la utilidad del mercader típico por el número de mercaderes de cada clase, es decir,

$$(2) \qquad u_i \leq v_i u^i (x^i)$$

---

[1] Las preferencias que cumplen cumplen con las condiciones de regularidad mencionadas en el texto siempre pueden aproximadas por otras representables por medio de funciones de utilidad cóncavas. Ver Mantel (1967).

[2] En el caso general, el efecto de no hacer este supuesto será el de la contrucción de la economía equivalente que se llevará a cabo requerirá un número infinito de mercancías.

La relación entre el número de individuos de cada clase que conforman una coalición y los niveles de utilidad que alcanzan puede resumirse definiendo el conjunto de posibilidades de utilidad

$$(3) \qquad T \equiv \{ (v, u) \in R^{2n}_{+} : u_i \leq v_i u^i (x^i), \; X v \leq W v \}$$

Dados los supuestos -convexidad, funciones de utilidad lineales por tramos- es fácil demostrar que T es un cono polihédrico convexo, con la propiedad de que si $(v, u) \in T$ entonces $v_i = 0$ implica que $u_i = 0$ -si una clase de mercaderes no está representada en una coalición, entonces la utilidad agregada que percibe dicha clase de individuos es nula-.

## 2. Economías equivalentes

Si $v = (1,\ldots,1)$ es decir, si la coalición consiste de un solo individuo de cada clase, se tiene una economía de intercambio puro especial, objeto de estudia en este trabajo. Como se demostrara anteriormente (Mantel, 1965) en una demostración inspirada en un trabajo de Negishi (1960) la existencia de una solución de equilibrio competitivo en dicha economía se reduce al problema de hallar niveles de utilidad –un vector $u^* \in R^n_{++}$ - y ponderaciones de bienestar un -vector $\alpha^* \in R^n_{++}$- con la propiedad siguiente.

Definiendo

$$(4) \qquad \alpha^*_i u^*_i \equiv \beta^*_i,$$

la asignación de utilidades corresponde a un equilibrio competitivo si

$$(5) \quad \max \{ \alpha^* u - \beta^* v: (v, u) \in T \} = 0.$$

De esta propiedad se ve claramente que la estructura interna de la definición del cono T no juega papel alguno; solamente la relación entre las coaliciones v y los niveles de utilidad alcanzados u son relevantes. Por tal motivo, cualquier forma de definir dicho cono que no afecte su forma produce economías de mercado equivalentes, en el sentido de que coaliciones similares pueden alcanzar niveles similares de utilidad.

De la teoría de conjuntos convexos es sabido que un cono polihédrico convexo puede representarse siempre como la intersección de un número finito, digamos m, de semiespacios. En otras palabras, en el caso bajo estudio existirán dos matrices m filas y n columnas Q y R tales que

$$(6) \qquad T \equiv \{ (v, u) \in R^{2n}_{+} : Q\,u \le R\,v \}$$

Dadas las propiedades de T expresadas en la sección anterior, estas dos matrices serán no negativas. Además, $u \geq 0$, $Q \leq 0$, implican que $u = 0$, reflejando el hecho de que es imposible alcanzar niveles arbitrarios de utilidad. Nuevamente para simplificar la exposición que sigue se hará el supuesto de que las dos matrices son positivas. Los resultados son válidos para el caso más general.

## 3. Consumidores tipo Leontief

La condición de equilibrio (5) se expresa como sigue para el cono T definido en (6).

$$(7) \quad \max \{ \alpha^* u - \beta^* v : Q\,u \le R\,v;\ u \ge 0; v \ge 0 \} = 0.$$

Por el teorema del dual de programación lineal, se sabe por lo tanto que el sistema de inecuaciones

$$(8) \qquad p\,Q \ge \alpha^*;\ \beta^* \ge p\,R;\ p \ge 0$$

tiene una solución no trivial.

Se pueden resumir estos resultados en el sistema de inecuaciones

$$(9) \qquad Q\,u \le R; \qquad p\,\{Q \operatorname{diag}(u^*) - R\} \ge 0; \qquad p \ge 0$$

con la condición adicional de que el vector p no sea nulo[3]. Reemplazando $u^*$ por su valor del segundo conjunto de desigualdades -es bastante obvio que se puede suponer sin sacrificio de generalidad que se cumplen con igualdad- se obtiene finalmente

$$(10) \qquad \Sigma\, q^i \ (p\, r^i / p\, q^i) \le \Sigma\, r^i$$

donde la suma se entiende sobre los mercaderes -de 1 a n-, y $q^i$, $r^i$ representan las columnas de Q, R, respectivamente.

Analizando cuidadosamente esta expresión, está claro que una expresión idéntica se obtiene de una economía con n consumidores del tipo Leontief, con preferencias en que todos los bienes son complementos perfectos.

---

[3] diag (u) representa a la matriz diagonal cuya diagonal principal contiene las coordenadas del vector u, siendo nulos los demás elementos.

Para cada i, $q^i$ representa en tal caso el vector en que desea consumir los m bienes, mientras que $r^i$ representa sus tenencias iniciales de los mismos. Su riqueza, evaluada en base a los precios p, será p $r^i$, de modo que para que se cumpla su ecuación de presupuesto $p\, q^i = p\, r^i$ su demanda debe ser igual al vector $q^i\,(p\, r^i / p\, q^i)$. La demanda agregada es entonces el miembro izquierdo de la desigualdad en (10), mientras que las tenencias iniciales agregadas de la comunidad están representadas por el miembro derecho de la misma, que por lo tanto indica la condición de equilibrio de mercado, de que no se puede consumir más de lo que hay.

En resumen, si se permite un número adecuado de bienes (m) cualquier economía es equivalente a otra en que los consumidores tienen esta clase especial de preferencias. Este resultado asegura que para el análisis de la existencia de equilibrio es suficiente estudiar este tipo de economías, en principio mucho más sencillas que economías arbitrarias.

## 4. Demostración de la existencia de equilibrio elemental

La función de demanda excedente agregada de la economía construida en la sección. anterior es

$$(11) \qquad f(p) \equiv \Sigma\, [q^i\,(p\, r^i / p\, q^i) - r^i],$$

que claramente es continua para vectores de precios $p \in S$, donde $S \equiv \{\, p \in R^m_+ : s.p = 1 \}$ es el simplex unidad. Defínase la función

$$(12) \qquad m(p) \equiv \max \{\, f(p), 0 \,\}$$

donde se entiende que la función max aplicada a un par de vectores produce otro vector cuyas coordenadas son el máximo de las coordenadas correspondientes de los argumentos. La función

$$(13) \qquad \phi(p) \equiv [\, p + m(p)\,] / \{\, 1 + s.m(p)\,]$$

será por lo tanto también continua, y convierte elementos del conjunto convexo compacto S en elementos de si mismo. Por el teorema de punto fijo de Brouwer, esta función tiene un punto fijo $p^* = \phi(p^*)$. Se demostrará a continuación que cualquier punto fijo es un punto de equilibrio.

Supóngase que por el contrario hay un punto fijo que no es un punto de equilibrio. Por lo tanto, alguna coordenada tendrá $f^i(p^*) = m^i(p^*) > Q$, y por ende $s.m(p^*)>0$. Por la definición de la función $\phi(.)$ se tiene

$$(14) \qquad p^* \, s.m(p^*) = m(p^*),$$

de modo que $p_i > 0$ implica que $f^i(p^*) = m^i(p^*) > 0$. Multiplicando la igualdad (14) por los precios, se obtiene la secuencia de relaciones

$$(15) \qquad 0 < p^* . p^* \, s.m(p^*) = p^* . m(p^*) = p^* . f(p^*) = 0,$$

una obvia contradicción. En esta expresión, la primera desigualdad se debe a que el vector de precios no es nulo; la última igualdad se deriva de la observación de que la función de demanda excedente agregada (11) cumple con la ley de Walras - es fácil ver que el valor de la demanda excedente es idénticamente nulo -.

## REFERENCIAS

DEBREU, GERARD (1959): *Theory of Value*. Nueva York, Wiley.

MANTEL, ROLF R. (1965): "Toward a constructive proof of the existence of equilibrium in a competitive economy". Tesis Doctoral, Universidad de Yale. Publicada por University Microfilms, 1966, y en *Yale Economic Essays* 8 (1968) 155-96.

MANTEL, ROLF R. (1967): "On the representation of preferences by concave utility functions". Buenos Aires, Instituto Di Tella (mimeo).

MEADE, JAMES E. (1952): *A geometry of international trade*. Londres, Allen & Unwin.

NEGISHI, T. (1960): "Welfare economics and the existence of an equilibrium for a competitive economy", *Metroeconomica* 12, 92-97.

RADER, TROUT (1963): "Edgeworth exchange and general equilibrium". Tesis doctoral, Universidad de Yale. Publicada por University Microfilms y en *Yale Economic Essays* 4 (1964):133-180.