Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

ESTRUCTURA INTERTEMPORAL DE LAS PREFERNCIAS

ROLF R. MANTEL

Introducción

En teoría económica es usual tratar al tiempo de dos maneras diferentes: o bien como una variable discreta o bien como una contínua. En general un proceso de pasaje al límite no lleva a una forma u otra sin afectar seriamente las conclusiones. La matemática está mas desarrollada para el caso contínuo, donde tenemos a nuestra disposición de herramientas tales como la teoría del control óptimo, de modo que hay una razón pragmática poderosa para preferir modelos en los que el tiempo se trata de manera continua.

Por otra parte, muchas veces tales modelos tienden a ser simplificados por demás. Como ejemplo, considérese la teoría del crecimiento óptimo; el procedimiento usual en este campo consiste en maximizar una suma de utilidades instantáneas (descontadas o no), que recibe el nombre de función de bienestar. Tal criterio de óptimo implica que las preferencias son intertemporalmente independientes.

Para tiempo discreto hay disponibles criterios mas realistas, gracias al trabajo pionero de Koopmans (1960) en su análisis de utilidad estacionaria; él utiliza un supuesto de no complementaridad limitada en el tiempo, y demuestra que existen funciones de bienestar para las que la tasa de preferencia temporal es variable. Trabajos posteriores han mostrado que tales funciones de bienestar exhiben la propiedad cuasi-cardinal de perspectiva temporal (Koopmans, Diamond y Williamson, 1964) y que algunas pero no todas las conclusiones usuales de la teoria del crecimiento óptimo se mantienen si se las utiliza como criterio de bienestar (Beals y Koopmans, 1967 e Iwai, 1972).

Es el propósito del presente trabajo cerrar la brecha entre los dos enfoques, demostrando que un proceso de pasaje al limite apropiado nos permite definir una función de bienestar para tiempo continuo con una tasa de preferencia temporal variable. El resultado principal consiste en que los supuestos de estacionariedad y no complementariedad limitada en el tiempo implican que la utilidad prospectiva de un programa de consumo que se extiende desde el presente hasta el futuro ilimitado, puede ser evaluada como el valor inicial de la solución de una ecuación diferencial que relaciona el incremento marginal en la utilidad prospectiva debido al adelanto del programa al nivel de dicha utilidad y de la utilidad instantánea de la canasta de bienes descartada por tal adelanto.

La propiedad de perspectiva temporal puede entonces ser caracterizada de manera muy sencilla por la condición de que para alguna representación de las preferencias la tasa de preferencia temporal debe ser positiva.

Resultados para la teoría del crecimiento obtenidos anteriormente ilustran la utilización de una forma simplificada de tal función de bienestar. En el caso de una tasa de preferencia temporal que aumenta con la tasa de consumo (Uzawa, 1968) los resultados son similares a los usuales; en cambio si la tasa de preferencia temporal disminuye con la tasa de consumo (Mantel , 1967c) aparece la posible dependencia de las trayectorias límites de las condiciones iniciales, pudiendo apreciarse que el comportamiento cualitativo de las trayectorias de crecimiento óptimo es similar al descripto por Beals y Koopmans (1967) e Iwai (1972) para el caso de tiempo discreto. Esto se confirma con resultados recientes para la teoria del crecimiento óptimo utilizando preferencias como las presentadas en este ensayo (Mantel, 1967b, 1992).

Limitaciones de espacio no permiten presentar demostraciones detalladas de las aseveraciones aquí vertidas. Muchas de ellas se hallan en un trabajo no publicado (Mantel, 1967a). Como en otro trabajo no publicado (Mantel, 1970) sólo se presentarán los resultados, con algunas indicaciones sobre las principales lineas de razonamiento que permiten inferirlos.

1. El modelo: definiciones y supuestos

En las fineas que siguen nos ocuparemos de programas de consumo; éstos son elementos x, y, z del conjunto de programas de consumo X. Cada uno de estos elementos es una función de la línea real no negativa en el conjunto de consumo, un subconjunto acotado del espacio de mercancías n-dimensional. Los puntos sobre la recta real serán interpretados como tiempo; por duraciones de tiempo queremos significar las longitudes de intervalos no degenerados . Los valores de x en X en todo momento t se denotarán con x(t) una canasta de mercancías y como tal un vector en el espacio de mercancías. A veces nos referiremos a secciones de programas; se trata de funciones definidas sobre subintervalos del eje temporal. De tal modo, ${}_tx_s$ representa la sección de un programa con dominio restringido al intervalo comenzando en t y finalizando en s, incluyendo el punto inicial pero no el final. Cuando el primer subíndice es nulo se lo omitirá, como se hará con el segundo cuando es infinito. Expresiones tales como $({}_ry_s\,,\,{}_tz)$ deben interpretarse como un programa de consumo x para el que $x(v) = y(r+v)$ para $0 \leq v < s-r$, mientras que $x(v) = z(r+t-s+v)$ para $s-r \leq v$. La misma expresión que termine con un subíndice finito significa que la sección entre paréntesis, denominada en este caso el patrón del programa, debe ser repetido indefinidamente; el programa mismo se llamará programa repetitivo de período s en el caso en que su patrón es x_s, de modo de tener $y = (x_s) \equiv (x_s, x_s, x_s, \ldots)$.

Se supondrá en todo el ensayo que los programas de consumo son de variación uniformemente acotada en intervalos de tiempo compactos, en el sentido de que existe una duración de tiempo T y una cota M tal que cualquier programa x en X es la diferencia de dos programas no decrecientes en cada una de sus coordenadas $x = p - n$, tales que la variación $v = p + n$ satisface[1] para todo t no negativo,

$$(1) \qquad |v(T+t) - v(t)| \leq M.$$

Definimos la distancia entre dos programas como

$$(2) \qquad d(x,y) = \sup_t \int_t^{t+T} |x(s) - y(s)| ds$$

esta definición asegura un tratamiento igualitario a todas las generaciones. Debe hacerse notar que promediando las normas permite que un programa esté cerca a un pequeño desplazamiento de sí mismo aún en caso de no ser continuo, y que puede ser aproximado por programas constantes por tramos. Esta propiedad no es compartida por una función de distancia como es $\sup |x(t)-y(t)|$. La duración de tiempo T aparece en la definición (2) únicamente por conveniencia, y podría ser reemplazada por cualquier otra constante positiva.

[1] Aquí, para un n-vector b, $|b|$ denota la norma $\Sigma_j |b_j|$.

Siguiendo de cerca la presentación de¡ modelo para el caso discreto de Koopmans (1960) y de Koopmans, Diamond y Williamson (1964), podemos suponer que el ordenamiento de preferencias del conjunto X de programas de consumo satisface los siguientes postulados; para una discusión mas completa de éstos se refiere al lector a los articulos mencionados.

P1 (Existencia y continuidad): Existe un funcional de utilidad W(.) definido para todo x en X. que satisface la condición de Lipschitz

$$|W(x)-W(y)| \leq Kd(x,y)$$

para alguna constante K.

El valor del funcional W(.) para x en X se denomina utilidad prospectiva, o bienestar, de dicho programa. La utilidad inmediata o instantánea de una canasta c en el espacio de mercancías es el valor de la función real u(.) en c, definida como la utilidad prospectiva del programa que ofrece dicha canasta en todo momento, es decir,

(3) $u(c) \equiv W(c)$

donde hemos identificado, como haremos con frecuencia, al programa constante con la canasta que dicho programa ofrece. Del mismo modo definimos la utilidad inmediata $u(x_t)$ de la sección de programa x_t como la utilidad prospectiva $W(x_t)$ del programa repetitivo (x_t) que tiene x_t como su patrón. Debe tenerse en cuenta que los dominios de todas estas funciones no son los mismos, así no surgirán confusiones.

P2 (Sensitividad). Existen dos programas que coinciden el uno con el otro a partir de cierto instante, tales que

$$W(x) > W(y)$$

Este postulado significa que para estos dos programas existe un momento s tal que

$$W({}_{1}x_s, {}_{s}y) > W(y)$$

P3 (No complementaridad limitada). Para todas las duraciones de tiempo s, y para todos los programas x, y en X, y todas las canastas de consumo b, c.

$$W(b_s,x) \geq W(c_s,x) \qquad \text{implica } W(b_s,y) \geq W(c_s,y)$$

P4 (Estacionariedad). Para todas las duraciones de tiempo s. y todos los programas x. y en X,

$$W(x) \geq W(x_s,y) \text{ si, y solo si, } W({}_sx) \geq W(y)$$

P5 (Programas extremos). Existen $\underline{x}$, $\bar{x}$ en X tales que para todo x en X

$$\underline{W} \equiv W(\underline{x}) \leq W(x) \leq W(\bar{x}) \leq (\bar{W})$$

Estos postulados son esencialmente los propuestos para tiempo discreto, excepto por el pequeño refuerzo de Pl requerido para la existencia de la derivada con respecto al tiempo del bienestar considerado como una función del momento de iniciación de¡ programa. Los postulados P3 y P4 han sido alterados de modo de simplificar su forma, pero tomados en conjunto son equivalentes a los postulados originales para tiempo discreto. La condición agregada en P3, que la comparación se limite a programas que son inicialmente constantes, es esencial; sin ella, los postulados implicarían que la función de utilidad puede ser representada como aditiva, expresada como una suma de utilidades instantáneas descontadas a una tasa constante.

Es fácil ver que si consideramos una duración fija de tiempo cualquiera s, y si requerimos que los programas sean constantes excepto en instantes que son múltiplos enteros de dicha duración, estos postulados implican los postulados para tiempo discreto. Por ello los estudios previos mencionados están disponibles a fin de deducir los resultados correspondientes para tiempo contínuo, de modo que en las secciones siguientes nos basaremos explicita o implicitamente en los mismos.

2. Estructura de la utilidad con tiempo contínuo

Para cualquier programa x en X dado podemos considerar el nivel de bienestar $W({}_tx)$ del programa de el obtenido si se lo adelanta en un periodo t como una función de la duración de la sección x_t de dicho programa que se perdiera debido a tal acción. Esta función satisface la condición de Lipschitz con constante KM, ya que para un ε positivo arbitrario existe un t' tal que

$$|W({}_{t+s}x) - W({}_{t}x)| \leq Kd({}_{t+s}x, {}_{t}x) \leq K \int_{t'}^{t'+T} |x(r+s) - x(r)| dr + \varepsilon$$

$$= K \int_{t'}^{t'+T} |p(r+s) - p(r) - n(r+s) + n(r)| dr + \varepsilon$$

$$\leq K \int_{t'}^{t'+T} |v(r+s) - v(r)| dr + \varepsilon$$

$$= K \int_{t'}^{t'+s} |v(r+T) - v(r)| dr + \varepsilon \leq KMs + \varepsilon$$

Esto implica que su derivada, es decir la tasa de aumento en utilidad prospectiva debido al adelanto del programa $W({}_{t}x) = dW({}_{t}x)/dt$ existe excepto en un conjunto de medida nula, y está acotada uniformemente.

Una aplicación repetida de los postulados de estacionariedad y de no complementaridad limitada nos permite afirmar la siguiente

Proposición 1. Para todas las canastas de mercanclas b, c; todos los programas x, y; y todas las duraciones de tiempo t, s, se cumple que

$$W(b_t, x) \geq W(c_t, x) \qquad \text{si, y sólo si} \qquad W(b_t, y) \geq W(c_t, y)$$

Por medio medio de un razonamiento similar al de Koopmans (1960) puede demostrarse entonces que

Proposición 2. Para todos los programas x, y todas las secciones de programas y_t, donde t es alguna duración de tiempo,

$$\text{lím}_{n\to\infty} W((y_t)^n, x) = u(y_t)$$

Aquí definimos a $(y_t)^n$ como la sección de programa consistente de la sección de programa y_t repetida n veces; $u(y_t)$ la utilidad de un programa indefinidamente repretivio con patrón y_t, ha sido definida anteriormente. Como corolario del resultado anterior se obtiene, como caso especial,

Proposición 3. Para todos los programas x, y todas las canastas de mercancías c,

$$\text{lím}_{n\to\infty} W(c_t,x) = u(c)$$

En otros términos, la utilidad de un programa que se pospone indefinidamente, introduciendo al comienzo de la sección de un programa constante por el intervalo de tiempo que hay que esperar el nuevo comienzo, tiende a la utilidad de dicho programa constante. Las proposiciones 1 y 3 implican entonces,

Proposición 4. Para todos los programas x; todas las canastas de mercancías b, c y todas las duraciones de tiempo t,

$$W(b_t, x) \geq W(c_t, x) \qquad \text{si, y sólo si} \qquad u(b) \geq u(c)$$

Está claro que nuestros supuestos sobre el espacio de programas X, junto con el razonamiento al comienzo de la sección, implican que para cualquier par de programas x, y en X, las derivadas $\dot{W}(_t x) y \dot{W}(_y y)$ existen, y las funciones x, y son contínuas en todo instante t excepto posiblemente en un conjunto nulo. Excluyendo de nuestra consideración tales momentos irregulares, supongamos que $W(_t x) = W(_t y)$, y $u(x(t)) = u(y(t))$, e investiguemos la relación entre las derivadas.

Sean $b = x(t)$ y $c = y(t)$ las canastas de consumo ofrecidas por estos programas en el instante t. De (3) obtenemos, ya que $u(b) = u(c)$, que $W(c_s, {}_t y) = W(b_s, {}_t y)$ para toda duración de tiempo s; por lo tanto, aplicando el postulado de estacionariedad a la igualdad entre utilidades prospectivas, deducimos que $W(c_s, {}_t y) = W(b_s, {}_t x)$. La siguiente cadena de relaciones puede entoces ser justificada,

$$\begin{aligned}(1/s)\left|W(_t x) - W(_{t-s} x) - W(_t y) + W(_{t-s} y)\right| &= (1/s)\left|W(_{t-s} y) - W(_{t-s} x)\right| \\ &= (1/s)\left|W(_{t-s} y) - W(c_s, {}_t y) - W(_{t-s} x) + W(b_s, {}_t x)\right| \\ &\leq (K/s)\int_0^s (\left|y(t-v) - y(t)\right| + \left|x(t-v) - x(t)\right| dv \\ &= K(\left|y(t-v) - y(t)\right| + \left|x(t-v) - x(t)\right|)\end{aligned}$$

para algún $0 \leq v \leq s$ La continuidad de los programas en el instante t implican, entonces que $W({}_t x) = W({}_t y)$. De tal manera, el aumento en utilidad debido a un adelanto infinitesimal del programa depende sólo de la utilidad prospectiva del programa y de la utilidad inmediata de la canasta de consumo que se pierde al comienzo, para casi todo t. Esto puede ser expresado por la función de agregación F(.) que satisface la

Proposición 5. Para todos los programas x,

$$\dot{W}({}_t x) = F(u(x(t)), W({}_t x)) \tag{4}$$

para casi todo t. Además, para todo t,

$$\underline{W} \leq W({}_t x) \leq \bar{W} \tag{5}$$

De esta manera tenemos una descripción completa de la función de utilidad en términos de una ecuación diferencial.

Puede demostrarse que F(u,W), la tasa de aumento en el bienestar debida al adelanto del programa, satisface las condiciones resumidas en la

Proposición 6.

a) F(.) es continua:

1) en u para cada W
2) en W para casi cada u
3) conjuntamente en u, W cuando u=W.

b) F(.) es estrictamente creciente en su primer argumento, para casi cada W.

c) la ecuación F(u,W) = 0 vale cuando, Y sólo cuando, u = W.

3. Perspectiva temporal

A fin de simplificar el análisis de modo tal que lo esencial del razonamiento pueda ser presentado en unas pocas lineas en esta sección supondremos que la función F(.), que indica la tasa de aumento en el bienestar debida adelantar el programa, y su derivada con respecto a su segundo argumento, $F_W(.)$, son conjuntamente contínuas en sus argumentos.

Daremos a $F_W(.)$ el nombre de tasa de preferencia temporal instantánea. Esta interpretación sigue de la ecuación variacional

$$\delta W = \delta_x F + F_W \delta W$$

obtenida de (4), y que una vez integrada proporciona

$$W(x) = \int_0^{\infty} \exp(-\int_0^t F_W ds)\delta_x(-F)dt$$

aquí $\delta_x F$ representa el incremento en F debido a una variación en x. La integral es el valor actual de una corriente de "ingresos", "descontada" a la tasa F_W. Esta tasa de descuento subjetiva es independiente de la escala en que se mide la utilidad cuando u = W; también en un sentido de promedio, la tasa de preferencia temporal media

$$(1/s)\int_0^s F_W dv$$

está bien definida (i.e. independiente de la particular representación de las preferencias elegida) cuando x(0) = x(s) y W(x) = W($_s$x) como en el caso de programas repetitivos.

Por extensión, llamamos a F_W tasa de preferencia temporal para todo u, W, aún cuando en el caso general su valor depende de la escala de utilidad. Quizá alguna cantidad independiente de la escala sería mejor candidata para tal nombre, pero la nuestra tiene la ventaja de la simplicidad. Para programas repetitivos o constantes el resultado es invariante con la escala.

Es obvio que como consecuencia de las condiciones b) y c) de la proposición 6. la tasa de preferencia temporal $F_W(W,W)$ es positiva. Esto es un caso especial de

Proposición 7. Para niveles $u^1 > u^2$ fijos, la razón

$$(6) \qquad r = -F(u^2,W) / F(u^1,W)$$

es positiva y estrictamente creciente en W, para $u^1 > W > u^2$.

Esta proposición puede ser parafraseada como sigue. Definimos una trayectoria de consumo oscilante como el límite de un programa repetitivo cuando la duración de su patrón es reducido a cero. Dadas dos canastas de consumo tales que $u(c^1) = u^1$ y $u(c^2) = u^2$, supóngase que el patrón consiste de c^1

durante una duración de tiempo s, y de c^2 durante una duración de tiempo t, elegida de modo tal que

$$W = u(c_s^1, c_t^2)$$

La trayectoria oscilante correspondiente (que en general no será un programa) es

$$\lim_{s,t\to\infty}(c_s^1, c_t^2)$$

Bajo nuestros supuestos, $\lim_{s,t\to\infty}(s/t) = r$.

En otros términos, r es la duración durante la que se ofrece la canasta con utilidad inmediata u^1, en relación a la duración durante la que se ofrece la canasta con utilidad inmediata u^2, en una trayectoria oscilante con utilidad prospectiva W. La proposición 7 nos dice que un aumento en la utilidad prospectiva de una trayectoria oscilante requiere un aumento en la duración de tiempo durante la que la canasta es ofrecida, en relación con la de la otra canasta. Si se reemplazan secciones malas de una trayectoria oscilante por secciones mejores se obtiene una mejora en el bienestar.

Como corolario tenemos

Proposición 8. Existe una representación del bienestar tal que $F_W(u,W)$ es positiva para todo u. W en el intervalo

$$(\underline{W}, \bar{W}).$$

Este resultado puede inferirse de la Proposición 7 que implica

$F_W(u^1,W) / F(u^1,W) < F_W(u^2,W) / F(u^2,W)$ para $u^1 > W > u^2$

de manera que existe una función h(.) que satisface

(7)

$$sup\{F_W(u,W)/F(u,W) \mid \underline{W} < u < W\} < h(W) < inf\{F_W(u,W)/F(u,W) \mid W < u < \bar{W}\}$$

para todo W en el intervalo $(\underline{W}, \bar{W})$. Integrando dos veces hallamos un función g(.)estrictamente creciente, contínua tal que $g''(V)/(g'(V))\ 2 = h(W)$ si $W = g(V)$; y si además $u = g(v)$ y

$$(9) \qquad F^*(v, V) = F(g(v), g(V)) / g'(V)$$

entonces

$$\dot{V} = \dot{W}/g'(V) = F(g(v), g(V))/g'(V) = F^*(v, V)$$

En consecuencia $F^*(v,V)$ es la función de agregación al funcional de utilidad $V(x)$ tal que $W(x) = g(V(x))$, representando las mismas preferencias. Nótese que por construcción F^*_V es positiva.

Una comparación con el caso de tiempo discreto muestra que la existencia de una transformación para la que F_W es positiva es equivalente al concepto de perspectiva temporal dado por Koopmans, Diamond y Wiliamson (1964). En efecto, para cualquier función de utilidad definida para tiempo discreto, es posible hallar muchos funcionales de utilidad definidos para tiempo contínuo, que una vez restringidos a programas constantes a tramos se reducen a las preferencias originales. Este hecho puede ser utilizado cuando sea necesario computar una transformación de la escala de utilidad que evidencie la propiedad de perspectiva temporal.

4. Conclusiones

Hemos visto que es posible definir funciones de utilidad para tiempo contínuo con una tasa de preferencia temporal variable, en un todo de acuerdo con la situación reinante para tiempo discreto. Se espera que su aplicación a teoría económica nos provea de nuevos conocimientos. Se han dado resultados para la teoría del crecimiento económico (Mantel, 1967b, 1967c, 1992); en particular es de hacer notar que cuando se permite que la tasa de preferencia temporal varíe, un país puede decidir no emprender el esfuerzo que representa el desarrollo económico cuando su dotación inicial de capital está por debajo de cierto nivel crítico. Por otra parte, si estuviera por encima del nivel crítico, puede aceptar el sacrificio de su generación presente en aras del bienestar de las generaciones futuras. Es imposible obtener tal resultado con una tasa de preferencia temporal constante en el caso de una tecnología neoclásica sencilla.

REFERENCIAS

BEALS, R., Y KOOPMANS. T.C. (1967): "Maximizing Stationary Utility in a Constant Technology", Cowles Foundation Discussion Paper No. 229, julio 14.

BEALS, R. Y KOOPMANS, T.C. (1969): "Maximizing Stationary Utility in a Constant Technology", SIAM Journal of Applied Mathematics 17, No. 5, 1001- 1015

IWAI, K. (1972): "Optimal economic growth and stationary ordinal utility: A Fisherian approach", Journal of Economic Theory 5, agosto, 121-51

KOOPMANS, T.C. (1960): "Stationary Ordinal Utility and Impatience", Econometrica 28. 287-309.

KOOPMANS, T.C., P.A. DIAMOND, Y R.E. WILLIAMSON (1964): "Stationary Utility and Time Perspective", Econometrica 32, 82-100.

MANTEL, R.R. (1966): "Sobre la tasa de preferencia temporal", Instituto Torcuato Di Tella, mimeo, junio

MANTEL, R.R. (1967ª): "Tentative list of postulates for a utility function for an infinite future with continuous time", Cowles Foundation for Research in Economics, CF-70525 May 25.

MANTEL , R. R. (1967b): "Maximization of utility over time with a variable rate of time-preference". Cowles Foundation for Research in Economics, CF-70525 (2), May 25.

MANTEL, R.R. (1967c): "Criteria for Optimal Economic Development", Instituto Torcuato Di Tella, Documento de Trabajo No. 38, junio (Castellano) y 38b, December (English). Publicado como Criterios de desarrollo económico óptimo. Económica (La Plata) 3, No.3, 1968.

MANTEL, R.R.(1970): "On the utility of infinite programs when time is continuous", Trabajo presentado en el "Second World Congress of the Econometric Society", Cambridge, U. K. Mimeo, Instituto Torcuato Di Tella, setiembre. Resumen en Econometrica 38

MANTEL, R.R. (1992): "Grandma's dress, or what's new for optimal growth", trabajo presentado en el XI Encuentro Latinoamericano de la Econometric Society, México, setiembre. Publicado en Revista de Análisis Económico 8, junio de 1993, 61-81.

UZAWA, HIROFUMI (1968): "Time preference, the consumption function and optimum asset holdings", capítulo 21 de J.N.Wolfe (comp.) Value, Capital, and Growth. Papers in honor of Sir John Hicks. Edinburgh: University Press, 485-504.