Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

EL PROBLEMA DE LA INTEGRABILIDAD DE FUNCIONES DE DEMANDA

ROLF R. MANTEL

1. El problema

Típicamente -en la teoría del consumidor- integrar un sistema de funciones de demanda requiere resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. El objetivo de este ensayo es demostrar que tal procedimiento es por demás complicado, pudiendo hallarse la solución por medio de una ecuación diferencial ordinaria.

Frish (1959), en un apéndice poco conocido a un importante artículo, dió un ejemplo de la existencia de una función cuya maximización sujeta a la restricción de presupuesto reproduce la función de demanda original, pero a pesar de ello no coincide con la función de utilidad "recuperada" de la integración de la función de demanda. Es por ello que uno solo puede aspirar a determinar una función de utilidad que genera la demanda, no "la" función de utilidad, ya que ésta no requiere ser necesariamente transitiva. Dada una función de demanda y una función de utilidad que la genera, existen innumerables preferencias (en general no transitivas) que generan la misma demanda. Si no se puede postular la existencia de preferencias transitivas, nada se puede decir sobre cuál de ellas es la relación de preferencias que generó la demanda. Sin embargo en la práctica este problema no es de mucha relevancia -a los fines de predecir el comportamiento del consumidor no es necesario saber cuáles son sus verdaderas preferencias, sino cómo reacciona frente al ambiente en que le toca actuar-. Por supuesto para llegar a conclusiones normativas es necesario saber algo más sobre las preferencias. En este caso, la observación del comportamiento de los consumidores no es suficiente para revelar sus preferencias a menos que se esté dispuesto a efectuar hipótesis adicionales.

2. Funciones de demanda generadas por funciones de utilidad.

Para una descripción más detallada de los conceptos que siguen, véase la obra de Varian (1992), y el excelente panorama histórico de Hurwicz en el capítulo 9 del libro editado por
Chipman, Hurwicz, Richter, y Sonnenschein (1971).

Definición 1: Una función $v: R_+^{n+1} \to R$ es una *función de utilidad indirecta* si

a. es homogénea de grado 0 en sus argumentos *(p, m)*

b. es cuasi-convexa

c. es creciente en m, decreciente en p.

Si $v(p,m)$ es una función de utilidad indirecta, se sabe que

a. Existe una *función de utilidad directa* $u: R_+^n \to R$ tal que

$$v(p,m) = \max_{x \geq 0}\{u(x) | px \leq m\}$$

b. su inversa es la función de gasto $e: R_+^n \times R \to R$ definida como

$$e(p,u) = \min_{x \geq 0}\{px | u(x) \geq u\}$$

y que satisface

$$v(p,e(p,u)) \equiv u \qquad e(p,v(p,m)) \equiv m$$

3. Utilidad medida en dinero

Si $v(p,m)$ es una función de utilidad indirecta, se sabe que si los precios son q entonces el gasto necesario para alcanzar el mismo nivel de utilidad es

$$\mu(q;p,m) \equiv e(q,v(p,m))$$

Surge la pregunta de cuáles son las propiedades que cumple esta función, dado que el consumidor maximiza sus preferencias. Obviamente

a. Es homogénea de grado cero en (p,m) por serlo $v(.)$

b. Es homogénea de grado uno en q porque duplicar los precios implica duplicar el gasto.

c. Para $q \varepsilon R^n$ dado se comporta como una función de utilidad indirecta, por ser $e(p,u)$ creciente en u.

Dados los vectores de precios q, p y el ingreso m, defínase el vector $y \equiv q - p$; y sea $M(t) \equiv \mu(p+ty; p,m) \equiv e(p+ty, v(p,m))$ el ingreso necesario para mantener al consumidor sobre su misma superficie de indiferencia a medida que se recorren los precios entre p y q, tomado t los valores entre 0 y 1, de modo que la utilidad indirecta es constante, es decir,

$$v(p,m) \equiv v(p+ty, M(t))$$

Derivando esta identidad con respecto a t,

$$0 \equiv y\, v_p(p+ty, M(t)) + v_m(p+ty, M(t))\frac{dM(t)}{dt}$$

Despejando la derivada dM/dt se obtiene

$$\frac{dM(t)}{dt} \equiv -\frac{y\, v_p(p+ty, M(t))}{v_m(p+ty, M(t))} \equiv y\xi(p+ty, M(t))$$

una ecuación diferencial ordinaria.[1]

Aquí se ha definido la función $\xi : R^{n+1} \to R^n$ como

$$\xi(p,m) \equiv \frac{v_p(p,m)}{v_m(p,m)}$$

El resultado conocido en la teoría de la demanda del consumidor como "identidad de Roy" permite afirmar que ξ es la función (= el sistema de funciones) de demada del consumidor[2].

4. Recobrando la función de utilidad

Teorema 2 Si la función de demanda $\xi(p,m)$ es continua con derivadas continuas, homogénea de grado cero, cumple con la ley de Walras

---

[1] El texto que sigue hasta la nota 2, no figura en la versión editada por la AAEP, pero sucesivas versiones del trabajo lo han incorporado

[2] Final de texto agregado.

$p\xi(p,m) \equiv m$, y la matriz de Slutsky $S \equiv \xi_p + \xi_m \xi'$es simétrica y semidefinida negativa[3], existen preferencias que la generan.

Demostración. Sea $y \equiv q - p, \pi(t) \equiv p + ty, 0 \leq t \leq 1$ Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{dM\ (t)}{dt} = y.\xi\left(\pi(t), M\ (t)\right)$$
$$M(0) = m$$

Entonces $M(1)$ dependerá de q, p, m, es decir, $M(1) = \mu(q; p, m)$ para alguna función $\mu : R_+^n \times R_+^n \times R \to R$. Se debe demostrar que esta función $\mu(.)$ cumple con las siguientes condiciones.

a. $\mu(.)$ es homogénea de grado 0 en sus argumentos (p,m). Esto es una consecuencia de la homogeneidad de grado cero de la función de demanda $\xi(.)$.

b. Se cumple la identidad de Roy

$$\xi(p,m) \equiv -\mu_p(q; p,m)/\mu_m(q; p,m)$$

Para demostrar esto, se requiere la simetría de la matriz de Slutsky.

c. Si la matriz de Slutsky es negativa semi-definida, entonces $\mu(.)$ es cuasi-convexa en (p,m)

d. Falta demostrar que $v(p,m) \equiv \mu(q; p,m)$ es una función de utilidad indirecta que genera la
función de demanda dada. Ello se deduce de las ecuaciones de Roy (1) y (2) del apéndice, que implican que

$$\xi(p,m) \equiv -\frac{v_p(p,m)}{v_m(p,m)}$$

Como v es cuasi-convexa, de aquí se deduce que $\xi(p, m)$ maximiza la función de utilidad

$$u(x) = \min_{x \geq 0}\{v(p,m) | px \leq m\} \square$$

---

[3] En general los vectores se toman como columnas. Las excepciones son los de precios o los expresamente indicados por el apóstrofe (') indicador de transposición de matrices y vectores. También se utilizan las siguientes abreviaturas $\xi_p \equiv (\partial\xi^i / \partial p_j)$ y $\xi_m \equiv (\partial\xi^i / \partial m)$

5. Aplicaciones.

Ejemplo 3 Estructura de demanda rígida (Leontief). Sea

$$\xi(p,m)=\frac{m}{pa}a \qquad \xi_p(p,m)=-\frac{m}{(pa)^2}aa'$$

Por lo tanto,

$$\frac{dM}{dt}=\frac{ya}{pa+tya}M \qquad M(0)=m$$

implica

$$\ln(M/m)=\ln\left(1+t\frac{ya}{pa}\right)$$

$$M(1)=\mu(q;p,m)=m\frac{qa}{pa}$$

Fijando el valor de q se obtiene la función de demanda indirecta

$$v(p,m)=\frac{m}{pa}$$

correspondiente a la función de utilidad directa

$$u(x)=\min_j\left\{\frac{x_j}{a_j}\right\}$$

Ejemplo 4 Función de demanda homogénea de grado unitario en el ingreso. Sea

$$\xi(p,m)=\xi(p)m$$

Ello implica que

$$\frac{dM}{dt}=y\xi(p+ty)M$$

de modo que

$$\ln(M(1)/m)=\int_0^1 y\xi(p+ty)dt\equiv\ln\phi(q;p)$$

En consecuencia la función

$$\mu(q;p,m)=m\phi(q,p)$$

es homogénea de grado unidad.

Ejemplo 5: Función de demanda con elasticidad-precio propio unitaria. En este caso[4]

$$\xi(p,m)=\hat{p}^{-1}am=\left\{\frac{a_i}{p_i}\right\}m \qquad a_i>0;\sum_i a_i=1$$

provee la ecuación diferencial

$$\frac{dM}{dt}=\sum_j \frac{a_j y_j}{p_j+ty_j}M$$

con solución

$$\ln(M(1)/m)=\sum_j a_j \ln\left(1+t\frac{y_j}{p_j}\right)\Bigg|_{t=1}$$

equivalente a

$$\mu(q;p,m)=m\prod_j\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{a_j}$$

función que corresponde a preferencias del tipo Cobb-Douglas.

Ejemplo 6: Elasticidad unitaria, una vez satisfechas las necesidades básicas. Aquí

---

[4] El acento circunflejo (^) sobre un vector representa la matriz diagonal con las coordenadas del vector a lo largo de su diagonal principal. Por ejemplo,

$$\hat{\ } \equiv \begin{pmatrix} p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\xi(p,m) = x = a + B\hat{p}^{-1}c(m - pa)$$

$$px = pa + pB\hat{p}^{-1}c(m - pa) \equiv m$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{p_i b_{ij} c_j}{p_j} = 1$$

$$B = I \qquad x = a + \hat{p}^{-1}c(m - pa)$$

$$\frac{dM}{dt} = ya + y\left(\overset{\wedge}{p + ty}\right)^{-1} c(M - (pa + tya))$$

$$\frac{d\,ln(M - (pa + tya))}{dt} = \sum \frac{y_j c_j}{p_j + ty_j}$$

$$ln(M - (pa + tya))\Big|_0^1 = \sum c_j \, ln(p_j + ty_j)\Big|_0^1$$

$$\frac{M(1) - qa}{m - pa} = \prod \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{c_j}$$

6. Conclusiones

Hace muchos años el autor envió una versión preliminar de este trabajo -para el caso de funciones de demanda linealmente homogéneas en el ingreso (Mantel (1968))- para su publicación en *Econometrica*. El referee informó que el resultado era ampliamente conocido; no teniendo acceso a una biblioteca especializada en Buenos Aires, el tema quedó allí. Sin embargo, con posterioridad se publicó el libro editado por Chipman, Hurwicz, Richter, y Sonnenschein (1971) en el que Uzawa corrige un error en su demostración anterior, donde se continúa utilizando ecuaciones diferenciales parciales. Después de todo ese tiempo incluso en textos avanzados y actualizados como el libro de Varian (1992) se sigue demostrando la existencia de una función de utilidad que racionaliza las funciones de demanda por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Es posible que al menos en las presentaciones del problema a alumnos, sea más sencilla la utilización de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se deja al lector el decidir si el presente trabajo realmente ofrece una alternativa más sencilla a un tema que siempre fue engorroso, desde el momento en que el mismo Pareto cometiera el desliz que indujera a la intervención de Volterra.

7. Apéndice

A continuación se presenta el detalle de las demostraciones anunciadas en el texto.

a. Homogeneidad de $\mu(.)$. Sea

$$\tau \equiv \frac{t}{t+\lambda(1-t)} \qquad t = \frac{\lambda\tau}{\lambda\tau + 1 - \tau}$$

de modo que $N(t) \equiv \frac{t}{\tau} M(\tau)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = [1-(1-\lambda)\tau]\frac{dM(\tau)}{dt} + (1-\lambda)M(\tau)$$
$$= [(q-p)(1-(1-\lambda)\tau) + (1-\lambda)(p+\tau(q-p))]\xi(p+\tau(q-p), M(\tau))$$
$$= (q-\lambda p)\xi\left[\frac{t}{\tau}[p+\tau(q-p)], N(t)\right]$$
$$= (q-\lambda p)\xi[(t+\lambda(1-t))p + tq - tp, N(t)]$$
$$= (q-\lambda p)\xi[\lambda p + t(q-\lambda p), N(t)]$$

con la condición inicial $N(0) = \lambda m$. En consecuencia,

$$N(1) = \frac{1}{1}M(1) = M(1) \square$$

b. Identidad de Roy. Sea $S = S'$. Defínase

$$\omega \equiv M_m \xi^0 + M_p - (1-t)\xi$$

donde los argumentos de las funciones indicadas con el índice ^{0} se evalúan en el punto $(\pi, M)^0 \equiv (p, m)$. Entonces

$$\omega^0 = 1.\xi^0 + 0 - (1-0)\xi^0 = 0,$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \xi^0 \frac{dM_m}{dt} + \frac{dM_p}{dt} - (1-t)\frac{dx}{dt} + \xi \\
&= \xi^0 y\xi_m M_m + (-\xi + \xi_P' y(1-t) + y\xi_m M_p) - (1-t)(\xi_p y + \xi_m y\xi) + \xi \\
&= (y\xi_m)[\xi^0 M_m + M_p - (1-t)\xi] + (1-t)[\xi_P' - \xi_p - \xi_m\xi' + \xi\xi_m']y \\
&= (y\xi_m)\omega + (1-t)[S' - S]y \\
&= (y\xi_m)\omega
\end{aligned}$$

de donde $\omega = 0$ para todo t, ya que ésta es una solución —trivial— de la ecuación diferencial, y se sabe que tal solución es única. En otros términos,

$$M_p + \xi^0 M_m = (1-t)\xi,$$

y en especial, para $t = 1$,

$$M_p^1 + \xi^0 M_m^1 = 0$$

El resultado surge de observar que

$$\mu_p = M_p^1 \qquad \mu_m = M_m^1 \square$$

c. $\mu(.)$ es cuasi-convexa. Derivando la ecuación de Roy (1) se obtienen las dos relaciones

$$M_{pp}^1 + \xi^0 M_{mp}^1 = -M_m^1 \xi_p^0$$

$$M_{pm}^1 + \xi^0 M_{mm}^1 = -M_m^1 \xi_m^0$$

Multiplicando la última relación por $\xi^{0'}$ y sumando,

$$M_{pp}^1 + M_{pm}^1 \xi^{0'} + \xi^0 M_{mp}^1 + \xi^0 M_{mm}^1 \xi^{0'} = -M_m^1 (\xi_p^0 + \xi_m^0 \xi^{0'}) = -M_m^1 S^0.$$

Esta matriz es positiva semi-definida por ser $M_m^1 > 0$; como $\mu \equiv M^1$ es homogénea de grado cero, el resultado sigue. $\square$

REFERENCIAS

CHIPMAN, J.S., L.HURWICZ, M.K.RICHTER, y H.F.SONNENSCHEIN, (1971) Preferences, Utility, and Demand. Nueva York: Harcourt Brace Jovanovich, Inc.

FRISCH, R., (1959) A complete scheme for computing all direct and cross demand elasticities in a model with many sectors, Econometrica 27 (Abril), 177-196

MANTEL, R.R., (1968) Homothetic indifference maps and integrability. Buenos Aires: Instituto Torcuato Di Tella, TI 58.

VARIAN, H.R., (1992) Microeconomic Analysis, 3ra. ed.. Nueva York: W.W.Norton