Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

# AGREGACIÓN DE BIENES PERFECTAMENTE COMPLEMENTARIOS

ROLF R. MANTEL*

## 1. Resumen e Introducción

De una investigación del presente autor (1965) es sabido desde tres décadas que una economía Arrow-Debreu con un número finito de agentes puede ser descripta por completo -desde el punto de vista de los niveles de utilidad alcanzables- por medio de una transformación de coaliciones en niveles de utilidad.

También fue demostrado por el autor (1991) que la naturaleza de tal descripción no permite distinguir la economía resultante de una economía competitiva de intercambio puro -es decir, una sin actividades productivas- aún si se restringen las preferencias de los consumidores a mercancías que son complementos perfectos. Esto significa que son del tipo Leontief, con "curvas" o superficies de indiferencia con ángulos rectos.

Es el propósito de la presente investigación demostrar que el resultado precedente es aún más generalizado, ya que también es válido para el comportamiento de los mercados. Cualquier función de demanda excedente que satisface la ley de Walras puede ser descompuesta en funciones de demanda excedente individuales provenientes del tipo de preferencias mencionado; para tal descomposición solo es necesario considerar individuos que consumen bienes en proporciones fijas.

Este resultado extiende el conocido en la literatura por los nombres de Sonnenschein-Mantel-Debreu. Como se recordará, Sonnenschein (1972) conjeturó que es posible descomponer funciones de demanda excedente de mercado en funciones de demanda excedente individuales racionalizables, y lo demostró para funciones que son polinomios. El presente autor (1974) demostró que son suficientes dos consumidores por cada mercancía. Finalmente Debreu (1974) demostró que basta con un consumidor por cada mercancía.

Paralelamente, estas mismas investigaciones fueron proporcionando distintos requisitos de continuidad para las funciones a descomponer. De los

* Universidad de San Andrés, Buenos Aires, Argentina. Mayo, 1995.

polinomios de Sonnenschein, el presente autor sólo requirió segundas derivadas acotadas, mientras que Debreu no utilizó más que la continuidad. En el estudio de McFadden, Mas-Colell y Richter en colaboración con el autor [1974] se extienden estos resultados a funciones de demanda excedente acotadas inferiormente.

La extensión presentada en esta investigación es a una situación en que se imponen restricciones considerablemente más duras sobre el comportamiento individual, al costo de un número de agentes más elevado.

En la sección 2 se presenta el modelo a utilizar. La sección 3 demuestra el caso especial de dos mercancías, y la sección 4 el de tantas mercancías como observaciones. La sección 5 se refiere a cuando hay mas observaciones que mercancías; sólo fue posible demostrar el resultado para tres mercancías y cuatro observaciones, por lo que se presentan simulaciones para otros casos, y se conjetura que el resultado es válido cuando el número de observaciones es finito. La sección 6 presenta algunas conclusiones, mientras que la sección 7 incluye un apéndice con resultados matemáticos necesarios en el texto. Al final se incluyen las referencias bibliográficas.

## 2. El Modelo

Sea $n$ el número de mercancías, y $m$ el número de consumidores. Si las preferencias de los consumidores son del tipo de Leontief, i.e. cada consumidor demanda los bienes en proporciones fijas, entonces la función de demanda individual es

$$f^i(p) = a^i \frac{pw^i}{pa^i} - w^i \qquad (1)$$

de modo que la función de demanda excedente agregada puede ser escrita como sigue

$$f(p) = A\left(\hat{A'p}\right)^{-1} W'p - Ws \qquad (2)$$

En esta expresión A es la matriz de preferencias, con el.vector de proporciones demandadas $a^i \varepsilon R^n$ como su i-ésima columna, y $W$ es la matriz de las dotaciones, con la dotación inicial $w^i \varepsilon R^n$ del consumidor $i$ como su i-ésima columna, para $i$ = 1, ..., $m$. El apóstrofe ( ' ) indica la transposición de una matriz o de un vector, un acento circunflejo ($\wedge$) denota a una matriz diagonal con los elementos del vector bajo el acento a lo largo de su diagonal principal, y el vector $s \; \varepsilon \; R^m$ es el vector suma, de dimensión conformable con la matriz cuyas columnas han de ser sumadas y con todas sus coordenadas iguales a la unidad.

Si se dispone de $m$ observaciones $p^1, \ldots, p^m$ sobre vectores de precios y las correspondientes listas de demandas excedentes agregadas se encuentran disponibles, surge la pregunta de si es posible hallar dos matrices positivas $A, W$, ambas de dimensiones $n \times m$, tales que la función de demanda excedente arbitrariamente dada iguala a la expresión indicada en la ecuación (2) en los $m$ puntos seleccionados. Nótese de las funciones de demanda excedente individuales mostradas en la ecuación (1) que los vectores $f^i \equiv f\,(p^i\,)$ son funciones lineales del vector $w = \mathrm{vec}(W) \; \varepsilon \; R^{n.m}$ formado apilando una sobre otra las columnas de la matriz $W$.

Pregunta: ¿Se puede elegir $A > 0$ de modo tal que el rango de este operador lineal es $(n\text{-}1) \times m$? Nótese que no puede exceder este valor puesto que la relación $pf(p) = 0$ vale para cada vector de precios. Esto se debe a la ley de Walras (W), como puede verse premultiplicando la función de demanda excedente agregada en la ecuación (2) por el vector de precios $p$. Para cualquier cantidad de mercancías $n$, si solamente está dado un vector de precios, $p$, tómese como dotación $w$ cualquier vector positivo que satisfaga la relación $w > -f\,(p)$, y defínase $a \equiv w + f\,(p)$. Entonces

$$a\frac{pw}{pa} = w + f(p)$$

ya que $p.\ a = p.\ w$ gracias a (W).

El resultado buscado es demostrar que si se permite un número arbitrario de consumidores cualquier función de demanda excedente conocida en un número arbitrario de puntos es posible.

Esto implicaría que entre otros muchos el ejemplo de Debreu

$$f(p) = max\{0{,}1 - \alpha\|p - p_0\|\}(I - pp')a$$

con $\|p\|^2 \equiv p'p = 1$ puede ser descompuesto con funciones de demanda excedente individuales racionalizables, *si solamente se observa un número finito de vectores de precios.*

A fin de simplificar el problema, nótese mirando la función de demanda excedente agregada definida en la ecuación (2) que si $A$. $W$ resuelven el problema, así también lo hará el par $A, W + A\hat{\lambda}$ para cualquier $\lambda \varepsilon R^m$. En consecuencia no es necesario considerar explícitamente la restricción de que las dotaciones iniciales deben ser positivas, ya que cualquier matriz de dotaciones puede ser transformada en una que es positiva sumándole un múltiplo de la matriz –positiva- de preferencias.

## 3. Dos Mercancías

A fin de describir el problema en $R^2$, sea dada la función arbitraria $f: R_+ \rightarrow R$. Se interpreta $p = p_1$ como precio del bien 1, $f(p) = f_1(p)$ como función de demanda excedente del bien 1. El precio de la segunda mercancía se normaliza tomándolo como unidad o sea $P_2 = 1$, También se normializa la utilidad igualándola a la cantidad del bien 1 deseado por cada consumidor. Si hubiera $m$ observaciones sobre el precio de la primera mercancía y si la matriz $2 \times m$ de dotaciones iniciales tiene los vectores $u$, $v \ \varepsilon \ R^m$ como sus filas, el problema se reduce al siguiente.

Hallar la solución de

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_{i=1}^{m} \left[ (p_i u_i + v_i)/(p_j + a_i) - u_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left[ v_i - u_i a_i \right]/(p_j + a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} b_i/(p_j + a_i) \end{aligned}$$

hallando el vector desconocido $b$, donde se defina $b_i \equiv v_i - u_i \, . \, a_i$,, para que estas ecuaciones sean válida para $j = 1, \ldots, m$. Supóngase –ésto no afecta la generalidad del argumento- que los precios se hallan ordenados de manera tal que $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_m$. En tal caso existen varias posibilidades.

### 3.1 Solamente la demanda excedente correspondiente a un precio está dada

Es decir, $m = 1$. En tal caso

$$f = b \,/\, (p+a)$$

para demsotrar que en este caso una solución existe, tómese cualquier $a > 0$, $b = f\,(p+a)$

### 3.2 Está dada la demanda excedente para dos precios

En este caso $m$=2, de manera que si $f_i \equiv f(p_i)$ se tiene

$$f_1 = b_1/\,(p_1+a_1) \;+\; b_2/\,(p_1+a_2)$$

$$f_2 = b_1/\,(p_2+a_1) \;+\; b_2/\,(p_2+a_2)$$

La matriz de coeficientes de este sistema lineal en las dos incógnitas $b_1$, $b_2$ tiene un determinante $Det$ dado por

$$(p_1+a_2)\,(p_2+a_1)\,(p_1+a_1)\,(p_2+a_2).Det =$$

$$= (p_1+a_2)\,(p_2+a_1) - (p_1+a_1)\,(p_2+a_2) =$$

$$= p_1.a_1 + p_2.a_2 - p_1.a_2 - p_2.a_1 =$$

$$= (p_1-p_2).(a_1-a_2)$$

de modo que $Det \neq 0$ si, y sólo si, $a_2 \neq a_1$ con $p_2 \neq p_1$

- **Ejemplo. Consumidores especiales**. Para cada precio $p$ para la primera mercancía hay un consumidor que desea dicha mercancía en la proporción $p$ a la segunda mercancía. En otros términos, $a_j = p_j \;\forall$ j, de modo que

$$f_1 = b_1/\,(p_1+p_1) \;+\; b_2/\,(p_1+p_2)$$

$$f_2 = b_1/\,(p_2+p_1) \;+\; b_2/\,(p_2+p_2)$$

y

$$g_1 \equiv 2\,p_1\,(p_1+p_2)\,f_1 = (p_1+p_2)\,b_1 + 2\,p_1\,b_2$$

$$g_2 \equiv (p_2+p_1)\;2\,p_2\;\,f_2 = 2\,p_2 b_1 \;+\; (p_1+p_2)\,b_2$$

Equivalentemente,

$$D\,b_1 = (p_1+p_2)\,g_1 - 2\,p_2\,g_2$$

$$D\, b_2 = (p_2+p_1)\, g_2 - 2\, p_1\, g_1$$

$$D = (p_1+p_2)^2 - 4\, p_1\, p_2 = (p_1-p_2)^2$$

### 3.3 La demanda excedente está dada para *m* precios

En este caso se tiene

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} b_j / (p_i + a_j)$$

de modo que si hay tantos consumidores como precios, si las constantes $a_j$ se asignan arbitrariamente (aunque todas diferentes), un conjunto de números $b_j$ que resuelven estas ecuaciones siempre existe, puesto que la matriz formada por los coeficientes del sistema es una *matriz de Hilbert generalizada*. Como se demuestra en el apéndice, tales matrices son regulares.

- **Ejemplo**. Las figuras muestran un ejemplo en el que $m = 128$ observaciones han sido simuladas en base a la función de demanda excedente para la primera mercancía, mostrada en Figura 1, como función del precio p de la segunda mercancía,

$$f = (p-1).(p-25).(p-4) / (1+p^4)$$

para pares de precios equidistantes sobre la intersección del circulo unidad con el cuadrante positivo. Las dos coordenadas de la función de demanda excedente han sido representadas una en función de la otra en el primer panel de la Figura 2, usando $p$ como parámetro. Normalizando como se indicó anteriormente,

$$p = tan\left( i . \frac{\pi}{2.(m+1)} \right).$$

para $i = 1, \ldots m$. Eligiendo $a_i = p_i$ para todo $i$, la matriz que debe invertirse es

$$\Gamma = \left( \frac{1}{p_i + a_j} \right)$$

proveyendo así el vector solución $b$. Las coordenadas del vector $b$ se han representado como una función del logaritmo de los coeficientes de las preferencias dados por el vector $a$ en el segundo panel de Figura 2.

El error absoluto máximo entre los valores dados de $f$ y los calculados por agregación de las funciones de demanda excedente individuales obtenidas de la descomposición es 0.0013, bastante bajo si se lo compara con el valor absoluto máximo de $f$, 0.9368, especialmente si uno toma en cuenta el que la matriz de coeficientes está extremadamente mal condicionada. La función de demanda excedente se compara con la descompuesta en la figura 3, y el error relativo se ha representado en la figura 4. En estos dos gráficos, las dos líneas punteadas paralelas al eje horizontal indican la región donde el error es menos del 1%. Nótese que los picos que exceden dicho limite corresponden a puntos en los que la demanda excedente es casi nula, como indica la curva de trazo discontinuo también representada en la figura.

**Fig.1: Demanda Excedente 1, función del precio 2**

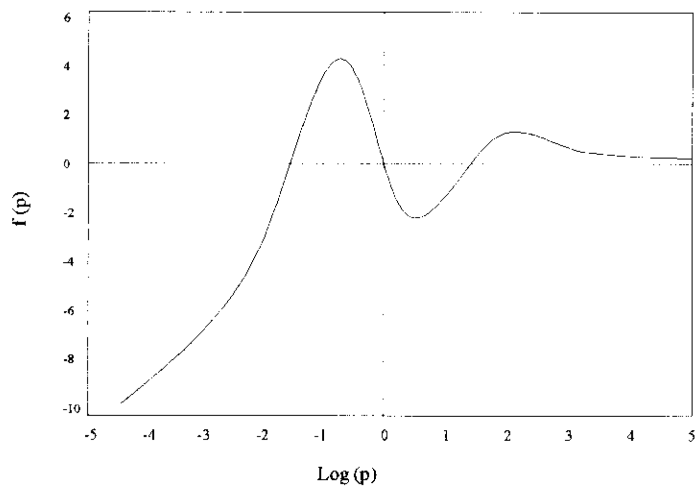


**Fig. 2a: f 2 vs. fl** **Fig. 2b: b vs. log(a)**

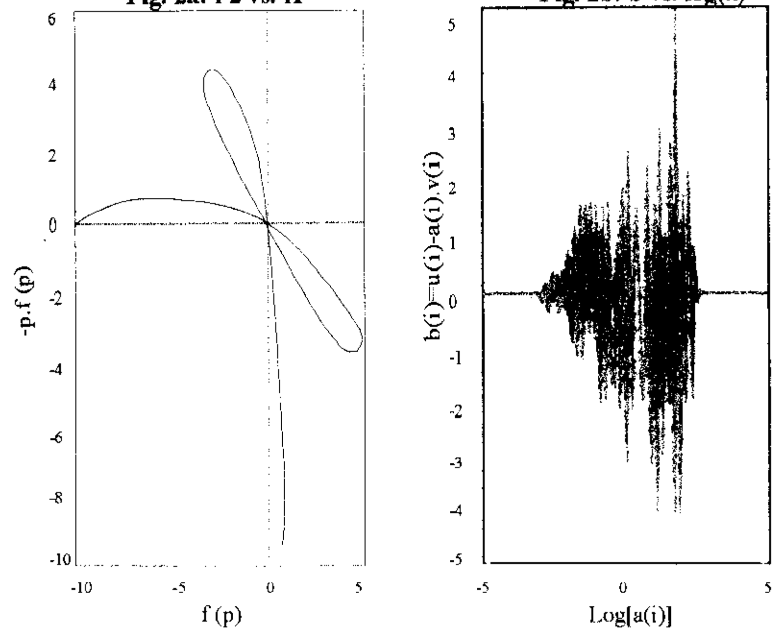
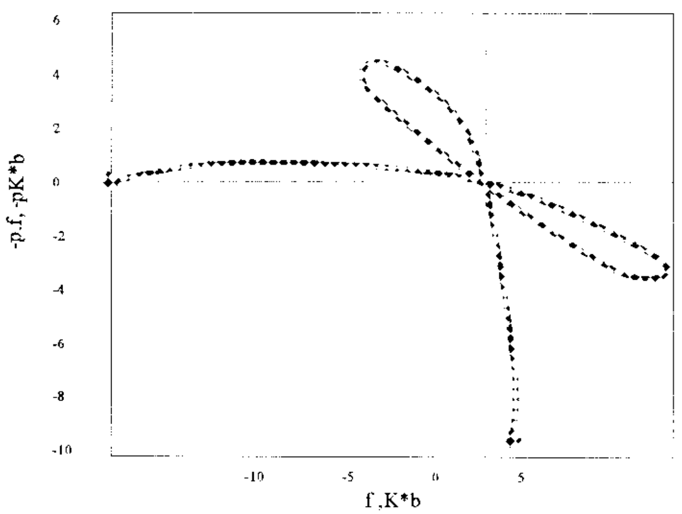



**Fig.3: f original y descompuesta**



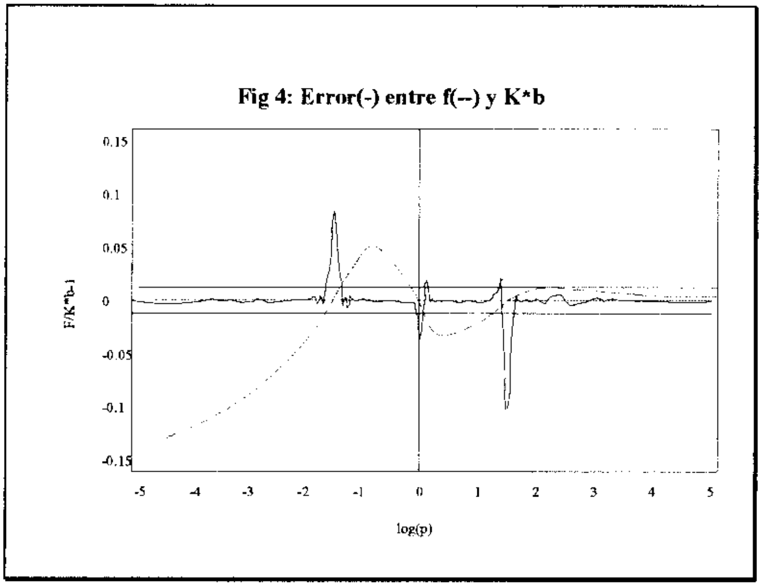



**Fig 4: Error(-) entre f(--) y K*b**

### 3.4 La demanda excedente está dada por un número ∞ de precios

Aquí debería resolverse el siguiente sistema de un sistema formado por un ∞ número de ecuaciones integrales (una para cada $p$),

$$f(p) = \int_a^b [\varphi(t)/(p+a(t)]dt$$

Este sistema debería ser resuelto para hallar las funciones desconocidas $\varphi$ y $a$. La existencia de tales soluciones es una cuestión aún no resuelta.

## 4- El número de observaciones coincide con el número de mercancías.

En este caso se tiene $m = n$. Defínase $\bar{n} \equiv n\text{-}1$, $\bar{m} \equiv m = 1$. Los coeficientes del sistema son los elementos de la matriz de $m$ filas y columnas compuestas a su vez de matrices de orden $\bar{n}$

$$K[(I - \gamma_{ij} a_j p'_i)];\ i,j=1,\ldots,m$$

donde

$$A \equiv (a_1,\ldots a_m), P \equiv (p_1,\ldots p_m) \in R_{++}^{\bar{n}.m}$$

Para todo $i, j$ se define

$$\gamma_{ij} \equiv \frac{1}{1+a_j p_i}$$

Utilizando como pivote a la submatriz superior izquierda, y eliminando la correspondiente fila y columna de matrices de orden $n$ queda la matriz de orden $\bar{m} \times \bar{n}$

$$((\gamma_{ij}.a_j.\pi'_i))$$

Reordenando las filas, se obtiene la matriz

$$M = (\alpha \otimes I).diag(vec(\Gamma)).(I \otimes \pi')$$

donde

$$\alpha_j \equiv a_j - a_1; \qquad \pi_i \equiv p_i - p_1$$

y el símbolo ($\otimes$) indica el producto de Kronecker de dos matrices. En el caso $m=n$ uno tiene entonces la inversa explícita

$$M^{-1} = (\alpha^{-1} \otimes I)(diag(vec(\Gamma)))^{-1}.(I \otimes (\pi')^{-1})$$

**Nota**: El presente caso es en cierto sentido similar al de un análisis anterior (Mantel [1975]), dónde se demostró que si el Jacobiano $J$ de la función de demanda excedente está dada para cierto vector de precios $p$, entonces es posible hallar $n$ consumidores cuya función de demanda excedente agregada tiene el Jacobiano $J$ dado en dicho punto. La información contenida en los coeficientes de $J$ consiste del mismo número de parámetros que el que se requiere en esta sección, eso es, $n$ vectores en $R^n$.

## 5- El número de observaciones excede el número de mercancías

La conjetura principal es la siguiente.

- **Conjetura**. Si las matrices $A$ y $P$ son totalmente regulares, y si $m \geq n$, entonces $K$ es una matriz regular.

Es posible demostrar que esto es verdad en los casos siguientes.

**5.1 Dos mercancías**

Aquí $n = 2$. Sea

$$1-\frac{p_i a_j}{1+p_i a_j} = \frac{1}{1+p_i a_j} = \frac{1/p_i}{1/p_i a_j} \equiv \frac{b_i}{b_i+a_j}$$

por lo que

$$det(K)=\prod_i b_i . \overset{m}{\underset{i,j=1}{det}}\left(\left(\frac{1}{b_i+a_j}\right)\right)$$

$$=\prod_i b_i . \frac{1}{b_1+a_1} . det\left(\left(\frac{1}{b_i+a_j}-\frac{1}{b_i+a_1}\frac{1}{b_1+a_j}.(b_1+a_1)\right)\right)$$

$$=\prod_i \frac{b_i}{b_i+a_1} . \prod_{j>1}\frac{1}{b_1+a_j} det\left(\left(\frac{b_i.a_j+a_1.b_1-b_i.a_1-a_j.b_1}{b_i+a_j}\right)\right)$$

$$=\prod_i b_i . \frac{1}{b_1+a_1} . \prod_{i>1}\frac{b_i-b_1}{b_i+a_1} . \prod_{j>1}\frac{a_j-a_1}{b_1+a_j} . det^m_{i,j-2}\left(\left(\frac{1}{b_i+a_j}\right)\right)$$

Como $a_1$, $b_1$ son positivas y difieren de $a_l$, $b_l$, respectivamente, se sigue que el determinante de orden *m*, *K*, *no* es nulo siempre cuando el determinante de orden *m*-1 en la ultima línea es distinto de cero, de modo que el resultado sigue por inducción.

- **Definición.** Una matriz es *regular si* tiene rango completo, *i.e.* si su rango iguala el número de sus columnas o el de sus filas, cualquiera sea menor.

Nótese que no es suficiente suponer que las matrices *A*, *B* son regulares; es necesario que todas sus submatrices sean regulares.

- **Definición.** Una matriz es *totalmente regular* si todas sus submatrices son regulares
- **Lema.** Sea A una matriz totalmente regular, y sea S cualquier submatriz cuadrada de *S*. Si la columna *j*-ésima no está contenida en S, entonces el vector $S^{-1}a^j$ no tiene elementos nulos.
- **Demostración.** Obviamente es suficiente demostrar esta proposición para el caso en que *A* tiene *n* filas y *n*+1 columnas y *S* consiste de las primeras *n* columnas. Entonces $S^{-1}A = (I, \beta)$ para algún vector columna, $\beta$. Es inmediato

que $A\begin{pmatrix}\beta\\ -1\end{pmatrix}=0$. Si β tuviera una coordenada nula, despreciando la columna correspondiente de la matriz $A$ uno obtendría una combinación lineal no trivial entre $n$ de sus columnas, y $A$ no sería totalmente regular.

## 5.2. Tres mercancías

En este caso, n = 3.

### 5.2.1 Cuatro observaciones

En este subcaso $m$= 4, y uno requiere una expresión explícita para el determinante

$$M = (\alpha \otimes I).diag(vec(\Gamma)).(I \otimes \pi')$$

El elemento típico de esta matriz de orden $\bar{n}\,\bar{m} \times \bar{n}\,\bar{m} = 6\times 6$ es

$$m_{ip,jq} = \alpha_{ij}.\gamma_{pj}.\pi_{qp}$$

de modo que

$$M = \left(\left(\alpha_{ij}.\hat{\gamma}_j.\pi'\right)\right)$$

Los símbolos α*, π* representan matrices cuadradas, no singulares tales que $\alpha^*\alpha=(I,\beta)$ y $\pi^*\pi=(I,\rho)$. Estas matrices existen si son totalmente regulares. Las propiedades del producto de Kronecker implican entonces que

$$\left(\alpha^* \otimes I\right)M\left(I \otimes \pi^{*\prime}\right) = \left((I,\beta)\otimes I\right).diag(vec(\Gamma)).\left(I \otimes (I,\rho)'\right)$$

El determinante de este producto es

$$\mu \equiv det(\alpha^*).det(M).det(\pi^*) = \begin{Vmatrix} \gamma_1^1 & 0 & 0 & 0 & \beta_1\gamma_1^3 & 0 \\ 0 & \gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & \beta_1\gamma_2^3 \\ \gamma_3^1\rho_1 & \gamma_3^1\rho_2 & 0 & 0 & \beta_1\gamma_3^3\rho_1 & \beta_1\gamma_3^3\rho_2 \\ 0 & 0 & \gamma_1^2 & 0 & \beta_2\gamma_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2^2 & 0 & \beta_2\gamma_2^3 \\ 0 & 0 & \gamma_3^2\rho_1 & \gamma_3^2\rho_2 & \beta_2\gamma_3^3\rho_1 & \beta_2\gamma_3^3\rho_2 \end{Vmatrix}$$

Utilícense las primeras dos filas para cancelar el resto de las primeras dos columnas, y utilícense las filas 3 y 4 para cancelar el resto de las columnas tres y cuatro:

$$\mu = \begin{Vmatrix} \gamma_1^1 & 0 & 0 & 0 & \beta_1\gamma_1^3 & 0 \\ 0 & \gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & \beta_1\gamma_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1\left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_1^3}{\gamma_1^1}\right)\rho_1 & \beta_1\left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_2^3}{\gamma_2^1}\right)\rho_2 \\ 0 & 0 & \gamma_1^2 & 0 & \beta_2\gamma_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2^2 & 0 & \beta_2\gamma_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2\left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^2\gamma_1^3}{\gamma_1^2}\right)\rho_1 & \beta_2\left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^2\gamma_2^3}{\gamma_2^2}\right)\rho_2 \end{Vmatrix}$$

Así uno obtiene

$$\mu = \prod\nolimits_{i,j=1}^{2}\gamma_i^j \begin{Vmatrix} \beta_1\left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_1^3}{\gamma_1^1}\right)\rho_1 & \beta_1\left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_2^3}{\gamma_2^1}\right)\rho_2 \\ \beta_2\left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_1^3}{\gamma_1^2}\right)\rho_1 & \beta_2\left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^2\gamma_2^3}{\gamma_2^2}\right)\rho_2 \end{Vmatrix}$$

de modo que

$$\mu\Big/\left(\prod\nolimits_{i=1}^{2}(\beta_i\rho_i)\prod\nolimits_{j=1}^{2}\gamma_i^j\right) = \begin{Vmatrix} \left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_1^3}{\gamma_1^1}\right) & \left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_2^3}{\gamma_2^1}\right) \\ \left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^2\gamma_1^3}{\gamma_1^2}\right) & \left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^2\gamma_2^3}{\gamma_2^2}\right) \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} \left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_1^3}{\gamma_1^1}\right) & \left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^1\gamma_2^3}{\gamma_2^1}\right) & 0 & 0 \\ \left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^2\gamma_1^3}{\gamma_1^2}\right) & \left(\gamma_3^3 - \dfrac{\gamma_3^2\gamma_2^3}{\gamma_2^2}\right) & 0 & 0 \\ -\dfrac{\gamma_1^3}{\gamma_1^1} & -\dfrac{\gamma_2^3}{\gamma_2^1} & 1 & 0 \\ -\dfrac{\gamma_1^3}{\gamma_1^2} & -\dfrac{\gamma_2^3}{\gamma_2^2} & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

En consecuencia,

$$\mu/\left(\Pi_{i=1}^2(\beta_i\rho_i)\Pi_{j=1}^2\gamma_i^j\right) = \begin{Vmatrix} \gamma_3^3 & \gamma_3^3 & \gamma_3^1 & 0 \\ \gamma_3^3 & \gamma_3^3 & 0 & \gamma_3^2 \\ -\dfrac{\gamma_1^3}{\gamma_1^1} & -\dfrac{\gamma_2^3}{\gamma_2^1} & 1 & 0 \\ -\dfrac{\gamma_1^3}{\gamma_1^2} & -\dfrac{\gamma_2^3}{\gamma_2^2} & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$= \left(\left(\gamma_3^3 - \frac{\gamma_3^1\gamma_1^3}{\gamma_1^1}\right)\left(\gamma_3^3 - \frac{\gamma_3^2\gamma_2^3}{\gamma_2^2}\right) - \left(\gamma_3^3 - \frac{\gamma_3^2\gamma_1^3}{\gamma_1^2}\right)\left(\gamma_3^3 - \frac{\gamma_3^1\gamma_2^3}{\gamma_2^1}\right)\right)$$

de mode que

$$\mu/\left(\Pi_{i=1}^2(\beta_i\rho_i)\Pi_{j=1}^2\gamma_i^j\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\gamma_1^3}\left(\frac{1}{\gamma_2^1}\frac{1}{\gamma_3^2} - \frac{1}{\gamma_2^2}\frac{1}{\gamma_3^1}\right) + \frac{1}{\gamma_2^3}\left(\frac{1}{\gamma_1^2}\frac{1}{\gamma_3^1} - \frac{1}{\gamma_1^1}\frac{1}{\gamma_3^2}\right) + \frac{1}{\gamma_3^3}\left(\frac{1}{\gamma_1^1}\frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma_1^2}\frac{1}{\gamma_2^1}\right)\right)$$

$$= \begin{Vmatrix} 1/\gamma_1^1 & 1/\gamma_1^2 & 1/\gamma_1^3 \\ 1/\gamma_2^1 & 1/\gamma_2^2 & 1/\gamma_2^3 \\ 1/\gamma_3^1 & 1/\gamma_3^2 & 1/\gamma_3^3 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 1+a_1 \cdot p_1 & 1+a_2 \cdot p_1 & 1+a_3 \cdot p_1 \\ 1+a_1 \cdot p_2 & 1+a_2 \cdot p_2 & 1+a_3 \cdot p_2 \\ 1+a_1 \cdot p_3 & 1+a_2 \cdot p_3 & 1+a_3 \cdot p_3 \end{Vmatrix}$$

que no es cero si y sólo si todos los factores, en particular todos $\beta_i$, $\rho_i$ y el determinante det$(s.s'+P'A)$ son todos diferentes de cero.

## 5.3 El caso general con más observaciones que mercancías

En esta sección no se pueden ofrecer demostraciones. Sin embargo se han llevado a cabo varios experimentos para distintas combinaciones de número de mercancías $n$ y número de observaciones $m$.

El modelo es $f(p_j) = \Sigma_i \left[ \frac{1}{p^j \cdot a^i} a^i p^{j'} - I \right] w^i \equiv K \cdot w$ una vez eliminadas las filas y columnas de la matriz K correspondientes a la última mercancía. Aquí $p_j$, $a_j$ están en $R^n$ ; $i, j = 1, \ldots, m$; $f$, $w$ $R^{n.m}$, de modo que

$$A \equiv (a_1, \ldots, a_m); P \equiv (p_1, \ldots, p_m) \in R^{n \times m}$$

El rango $r$ de $K$ - la matriz que se espera resulte regular - ha sido calculado para elecciones al azar de elementos positivos para las matrices A $y$ P, para todas las dimensiones hasta 10 mercancías y 40 observaciones. En todos los casos el rango de $K$ resultó igual al número de sus filas y columnas. En el ejemplo mas grande, con n = 10 y $m = 40$, $K$ es una matriz de orden 360 x 360 y de rango $r = 360$, aunque muy mal condicionada. Su descomposición en valores singulares (singular value decomposition) arrojó 42.4536 y 6.73853 x $10^{-6}$ como sus valores singulares máximo y mínimo, respectivamente, con una relación de 6300134 a uno. Este mal acondicionamiento no debe sorprender si uno considera el caso de dos mercancías, donde la matriz tiene propiedades similares a los de una matriz de Hilbert, o si se observan las violentas oscilaciones que muestra el segundo panel de la figura 2.

## 6. Conclusiones

Se han presentado argumentos para mostrar que la descomposición de funciones de demanda excedente, por medio de consumidores que demandan mercancías en proporciones fijas es factible si

- para cualquier número de observaciones, o bien hay dos mercancías o hay tantas como observaciones, o
- hay tres mercancías y cuatro observaciones.

Además se han calculado ejemplos mostrando que una solución al problema existe si hay a lo sumo 10 mercancías y 40 observaciones.

La conjetura es que, genéricamente, siempre hay una solución cuando el número de mercancías no excede al número de observaciones, y se permite la presencia de al menos un consumidor por observación.

Un interesante tema merecedor de una investigación futura es si es posible elegir vectores de precios en una grilla suficientemente fina y consumidores con preferencias apropiadas, de modo tal que la relación entre preferencias de los consumidores y sus dotaciones iniciales es suave. En ese caso uno podría obtener una solución con agentes cuyas características serían, en algún sentido, continuas. Pero se trata de una cuestión sin definir.

## 7. Apéndice

### 7.0.1 Matrices de Hilbert generalizadas

Sea

• **Definición.** Una *matriz de Hilbert generalizada* es igual a

$$H = \begin{pmatrix} 1/(p_1 + a_1) & \dots & 1/(p_1 + a_m) \\ 1/(p_m + a_1) & & 1/(p_m + a_m) \end{pmatrix} = (h_{i,j}),$$

**Definición 1** *donde*

$$0<a_1<a_2< \dots <a_m,$$

y

$$0<p_1<p_2< \ldots <p_m$$

Una matriz de Hilbert generalizada es totalmente positiva (esto significa que todos sus menores son positivos, ver por ejemplo [1959]). En particular, su determinante es positivo, y por lo tanto la matriz es regular.

• **Teorema.** Una matriz de Hilbert generalizada *H* es totalmente positiva.

• **Demostración.** Como cualquier submatriz cuadrada de una matriz de Hilbert generalizada es también una matriz de Hilbert generalizada, es suficiente demostrar que la matriz completa tiene un determinante positivo. A fin de calcular det *(H)*, sustráigase la primera fila de las demás de manera tal que los elementos de la primera columna -excepto el de la primera fila- se anulen.

En tal caso

$$\det(H) = \det \begin{pmatrix} 1/(p_1+a_1) & 1/(p_1+a_2) & \ldots & 1/(p_1+a_m) \\ 0 & h'_{2,2} & .. & h'_{2,m} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & h'_{m,2} & .. & h'_{m,m} \end{pmatrix}$$

Un elemento típico de la fila $i$, columna $j$, es

$$\begin{aligned} h'_{i,j} &= 1/(p_i+a_j) - (p_1+a_1)/[(p_i+a_1)(p_1+a_j)] \\ &= (p_i\, a_j + a_1 p_1 - p_i a_1 - a_j p_1)/[(p_i+a_j)(p_i+a_1)(p_1+a_j)] \\ &= (p_i - p_1)(a_j - a_1)/[(p_i+a_j)(p_i+a_1)(p_1+a_j)] \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\det(H) = \frac{1}{p_1+a_1} \cdot \prod_{i=2}^{m} \left[\frac{p_i - p_1}{p_i + a_1}\right] \cdot \prod_{i=2}^{m} \left[\frac{a_j - a_1}{p_1 + a_j}\right] \cdot \Delta,$$

donde

$$\Delta \equiv det \begin{pmatrix} 1/(p_2+a_2) & \ldots & 1/(p_2+a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1/(p_m+a_2) & \ldots & 1/(p_m+a_m) \end{pmatrix}$$

Obviamente el último factor, $\Delta$, es el determinante de una matriz de Hilbert generalizada de orden *m-1*, mientras que los demás factores son positivos. Como el determinante de una matriz de Hilbert generalizada de orden uno es ciertamente positivo, el resultado sigue por inducción en $m$.

**REFERENCIAS**

DEBREU, GERARD, (1974) "Excess Demand Functions", Journal of Mathematical Econonomics 1, pp 15-23.

GANTMACHER, F. R., (1959) T'he theory of matrices. New York: Chelsea.

MCFADDEN, DANIEL, Mas-Colell, Andreu; Mantel, Rolf R.; Richter, Marcel K., (1974), "A Characterization of Community Excess Demand Functions", Journal of Econonic Theory 9, 361-374.

MANTEL, ROLF R., (1965)"Equilibrio de una economía competitiva: una prueba de su existencia". Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, diciembre. Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo. Tesis doctoral, Yale University, publicada por University Microfilms, 1956. Publicada bajo el titulo "Toward a constructiva proof of the existence of equilibrium in a competitive economy", Yale Economic Essays, 1968.

MANTEL, ROLF R., (1974) "On the characterization of aggregate excess demand", Journal of Economic Theory 7, 348-3 53.

MANTEL, ROLF R., (1975) "Implications of microeconomic theory for community excess demand functions". Trabajo invitado para el Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto. Publicado como capítulo 3b en M.D.Intriligator, comp., Frontiers of Quantitative Econonics, vol. IIIA. Amsterdam: North-Holland, 1977, pp. 111-126.

MANTEL, ROLF R., (1991) "Economías de mercado y complementaridad perfecta". Anales de la Asociación Argentina de Economía Política. Santiago del Estero: Universidad Católica, setiembre.

SHAFER, WAYNE, y HUGO SONNENSCHEIN, (1982) "Market demand and excess demand functions", capítulo 14 en K.J. Arrow y M.D.Intriligator, comp., Handbook of Mathematical Economics, vol. II. Amsterdam: North-Holland, pp. 671-693

SONNENSCHEIN, HUGO, (1972) "Do Walras identity and continuity characterize the class of community excess demand functions?" Joumal of Economic Theory 6, pp.345-354.