Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

EL MODELO GENERAL DE PRODUCCIÓN Y CRECIMIENTO PROPORCIONAL*

ROLF R. MANTEL

1. Introducción

El modelo de von Neumann [1937] es una de las primeras instancias de lo que posteriormente se conoce bajo el nombre de análisis de actividades. También es el primer modelo desagregado de la teoría del capital.

Las relaciones del *modelo general de producción estático* se describen con las matrices no negativas de insumos de bienes producidos (A, de m filas - una por cada producto- y n columnas - una por cada proceso productivo-), de producción (B, de m filas por n columnas), y de insumos de factores originarios (T, de o filas -una por cada factor- y n columnas), respectivamente. Dados los niveles de demanda final ($c \varepsilon R^m$) y los recursos productivos ($l \varepsilon \mathrm{R}^o$), un plan de producción factible consiste de una lista de niveles de utilización de los procesos productivos ($x \varepsilon \mathrm{R}^n$) no negativa, de manera que se cumplen las desigualdades $x \geq Ax + c$; $l \geq Tx$. El problema analizado en el caso estático consiste en investigar las implicancias de la eficiencia productiva en cuanto a la posibilidad de descentralizar las decisiones productivas por medio de un sistema de precios implícitos o precios sombra.

En el presente artículo se tomará en consideración que en general la producción requiere tiempo de una manera esencial, lo que convierte el problema en uno dinámico. Hoy se producen los insumos para mañana, y lo que es más importante, casi todos los procesos productivos producen varios bienes de manera simultánea, ya que al final de un período no sólo emergen los bienes que son el objetivo final del proceso, sino también máquinas en distinto estado de utilización -en general algo más gastadas que antes- y de bienes intermedios en distinto estado de elaboración parcial. En consecuencia, el supuesto de que cada proceso produce un solo producto es insostenible en una economía en desarrollo; el concepto de bienes de capital aparece de manera insoslayable.

---

* Mendoza- Agosto 1998

2. Evolución temporal de la economía de von Neumann; crecimiento proporcional

La introducción del tiempo obliga a distinguir entre los vectores de consumo y niveles de operación de los procesos como sigue, donde las relaciones del modelo general de producción se han adaptado a las nuevas circunstancias dinámicas,

$$k^{t+1} \equiv Bx^t \geq Ax^{t+1} + c^{t+1}$$

$$l^{t+1} \geq Tx^{t+1}$$

Se ha definido al vector $k^{t+1} \varepsilon R^m$ como el resultado de la producción durante el período t, disponible al final del período. Su interpretación es la del capital disponible al comienzo del período siguiente $t+1$, necesario para los fines de cubrir las necesidades de los niveles de actividad x^{t+1}.

Los teoremas fundamentales del álgebra lineal y de programación lineal son válidos para el análisis de la eficiencia productiva en este caso. A fin de interpretarlos correctamente, es necesario considerar a bienes producidos en períodos diferentes como bienes distintos, aún cuando se trate de bienes de denominación similar. No es igual desde el punto de vista económico, por ejemplo, un automóvil disponible hoy que un automóvil disponible mañana.

La aparente complejidad adicional del sistema comparado con el caso estático no modifica los resultados referidos a la eficiencia productiva; basta con reinterpretar las variables, designando con nombres distintos a bienes disponibles en momentos distintos, aunque se trate de un mismo bien.
A fin de introducir las dificultades de a una, se presentará aquí la extensión más sencilla del modelo estático, analizando el caso de las economías que Hicks [en Capital and Growth, 1965] ha denominado *regularmente progresivas*. En tales economías las estructuras productivas y de consumo permanecen constantes y todas las variables reales se expanden proporcionalmente de acuerdo con algún *factor de expansión* que se designará con γ. Dicho factor de expansión es igual a la tasa de crecimiento incrementada en una unidad. No se distinguirá entre los casos de expansión propiamente dicha, con factores mayores que la unidad correspondientes a tasas de crecimiento positivas, y los de contracción o de estancamiento, con factores menores o iguales a la unidad y tasas negativas o nulas. Sólo la escala cambia de un período al siguiente. La definición Hicksiana permite reemplazar

las variables en el período t por su valor en un período determinado multiplicado por γ^t. Por lo tanto, si z representa a una variable cualquiera, su nivel en el período t será $\gamma^t z$; reemplazando en el sistema de ecuaciones anterior y dividiendo por γ^t se deduce que

$$\begin{aligned} &\gamma(c + Ax) \leq Bx \equiv k \\ &Tx \leq l \end{aligned},$$

sistema de relaciones que por analogía con el caso estacionario puede llamarse *cuasi-estacionario*. En dicho sistema todas las variables reales se expanden de acuerdo con el factor γ, es decir, crecen a la tasa $\gamma - 1$.

En los casos en que los recursos son fijos, si las tasas de crecimiento son positivas, tarde o temprano el crecimiento de la economía estará acotado por los factores de la producción no reproducibles, es decir, estará limitada por el factor de crecimiento más lento. Por ello este ensayo se limitará a estudiar los casos en que no hay bienes no producibles; al igual que en el modelo cerrado de Leontief, se supondrá que también la "producción" de mano de obra es endógena, generada por procesos de consumo que a cambio de bienes producidos ofrecen mano de obra bajo la forma de un stock de habilidades disponibles.

Siguiendo a von Neumann [1937] todos los bienes producidos se representan por los acervos de los mismos existentes al final de cada período. La producción se lleva a cabo entre el final de un período, que coincide con el comienzo del siguiente, y el final del período siguiente. En consecuencia, los acervos de bienes disponibles al final del período t, iguales a $Bx^t = k^{t+1}$, deben ser uficientes para cubrir los requisitos de insumos a ser utilizados durante el período siguiente e iguales a $Ax^{t+1} \leq k^{t+1}$ -recuérdese que entre los insumos deben contarse los bienes de capital necesarios para llevar a cabo la producción, listándose entre los productos los mismos bienes con mayor desgaste como si fueran bienes diferentes, distinguiéndose por ejemplo entre tractores de una semana, dos semanas, etc., de uso-.

Como el sistema es cerrado, no hay consumo exógeno. Todo consumo necesario para generar las distintas categorías de trabajo está contabilizado como insumo para los procesos correspondientes, de manera que las restricciones de balance físico de bienes del modelo estático ahora se reducen a $Ax^1 \leq k^0$, para el período inicial, dados los acervos k^0 heredados del pasado, y $Ax^{t+1} \leq Bx^t$, para cada período t subsiguiente.

Para el caso de una economía regularmente progresiva -o regresiva- la expansión proporcional implica que los niveles de producción de cada período se pueden obtener en base a los iniciales multiplicándolos por el factor de expansión una vez por cada período transcurrido, siendo las restricciones para cada período las mismas excepto por la escala. Si el vector x, no negativo y no nulo, representa la estructura de los niveles de producción durante algún período, los niveles de producción para el período siguientes serán γx, y la desigualdad entre producción de un período e insumos del siguiente se simplifica a $A(\gamma x) \leq Bx$.

3. Crecimiento proporcional a la tasa máxima

La pregunta que se formulara von Neumann consistió en inquirir si existe una tasa máxima de crecimiento compatible con una expansión regular de la economía, y en caso afirmativo, de cuáles son sus propiedades. El primer interrogante es equivalente a inquirir si el siguiente problema de optimización,.

$$\begin{aligned} &\textit{maximizar} && \gamma \\ &\textit{sujeto a} && (\gamma A - B)x \leq 0 \\ & && -s'x \leq -1 \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

tiene una solución, siendo $s' = (1,\ldots,1) \varepsilon R^n$ un vector que permite expresar la suma del vector x como producto interno. Nótese que la restricción sobre la suma de las coordenadas del vector x de niveles de producción se agrega a fin de evitar que el mismo se anule, ya que en tal caso cualquier factor de expansión sería factible; cuál es la suma de las coordenadas no es importante, ya que sólo se requiere la estructura productiva, no la escala puesto que el sistema es homogéneo.

En su artículo, von Neumann propone que las matrices de insumos y de productos A y B, además de ser no negativas, cumplen con la condición de que su suma es positiva, es decir, $A + B > 0$. Sin embargo esta condición es poco realista, ya que exigen que cada proceso que no utilice alguno de los bienes como insumo debe producirlo. Gale [1960] propone condiciones mucho menos restrictivas para demostrar que una solución existe.

Ellas son

a) Todo proceso requiere al menos un insumo,

b) Todos los bienes pueden ser producidos.

Del primero de estos supuestos se deduce que si ninguno de los bienes es un bien libre los costos de producción serán positivos para todos los procesos; en especial, si se fijan todos los precios iguales a la unidad, se obtiene

a') $s'A>0$

Del mismo modo, la condición b) implica que si todos los procesos se operan la producción de cada bien será estrictamente positiva; si entonces se operan todos los procesos al nivel unidad se obtiene

b') $Bs>0$

Estas dos condiciones, junto con la no negatividad de las dos matrices, son suficientes para demostrar que:

1) Hay un programa de expansión regular con factor de expansión positivo.

Defínase $\gamma^{-} \equiv 1/max_i\left\{\sum_j a_{ij}/\sum_j b_{ij}\right\}$. Los cocientes representan la recíproca del factor de expansión de cada bien, y el número calculado es el menor de todos ellos. Es obvio que este número es positivo, ya que todos los denominadores entre llaves son estrictamente positivos gracias a la condición b') mientras que al menos uno de los numeradores también lo es—la matriz A no es nula—. Por lo tanto se deduce que $(\gamma^{-}A-B)s\leq 0$, y por ello la economía que opera todos sus procesos al mismo nivel se expande regularmente a la tasa $(\gamma^{-}-1)$.

2) Los factores de expansión tienen una cota superior.

Defínase $\gamma^{+} \equiv 1/max_i\left\{\sum_j b_{ij}/\sum_j a_{ij}\right\}$. Los cocientes representan el factor de expansión del valor de cada proceso, y el número calculado es el mayor de todos ellos. Es obvio que este número es positivo, ya que todos los denominadores son estrictamente positivos gracias a la condición a') mientras que al menos uno de los numeradores también lo es - la matriz B no es nula-. Por lo tanto se deduce que $s'(\gamma^{+}A-B)\geq 0$, y por ello la economía que valúa todos sus bienes al mismo precio, obtiene que los valores de la producción de cada uno de sus procesos no exceda el correspondiente valor de los insumos en una fracción igual a $\gamma^{+} - 1$.

Una consecuencia del resultado anterior es que si el factor de expansión γ y el vector de niveles de operación de los procesos x, entonces al premultiplicar las restricciones por el vector suma y las desigualdades del párrafo anterior por el vector de niveles de operación de los procesos se obtiene la cadena de relaciones $\gamma s'Ax \leq s'Bx \leq \gamma^{+}s'Ax$; como el vector x no es nulo, la condición a') garantiza que $s'Ax$ es un número positivo y por lo tanto que $\gamma \leq \gamma^{+}$.

3) Existe un factor de expansión regular máximo.

Es fácil demostrar que el conjunto de factores de expansión es un segmento cerrado. En primer lugar es obvio que si cierto factor de expansión es factible, entonces cualquier factor de expansión menor también lo será, de modo que el conjunto de factores de expansión factibles es un segmento. El resultado obtenido bajo *2)* nos dice que dicho segmento está acotado superiormente por γ^{+},de modo que existe un máximo que designaremos con γ^{*}; siguiendo la costumbre, denominaremos a este máximo como *factor de expansión de von Neumann,* y a la tasa de crecimiento correspondiente como *tasa de crecimiento de von Neumam*n. Por los resultados en *1)* y *2)* sabemos que $0< \gamma^{-} \leq \gamma \leq \gamma^{+}$. La estructura de niveles de producción óptima correspondiente a este factor de expansión máximo será designada con x^{*}, y recibirá el nombre de *niveles de operación de los procesos de von Neumann.* El vector $k^{*} \equiv Bx^{*}$ recibe usualmente el nombre de *niveles de producción de von Neuman*n.

El segundo interrogante de von Neumann corresponde a la descripción del óptimo, y en especial en relacionar la trayectoria de crecimiento máximo con un equilibrio competitivo. Intuitivamente un economista tendería a pensar que una tasa de crecimiento máxima debería cumplir con ciertas condiciones de eficiencia, usualmente acompañadas por un sistema de precios que permite descentralizar las decisiones individuales de producción.

Ahora bien, el problema propuesto no es lineal, ya que el factor de expansión aparece multiplicando a los niveles de operación de los procesos. Las restricciones ni siquiera tienen la curvatura apropiada como para que el teorema de Kuhn y Tucker pueda ser aplicado en su forma global. Sin embargo podemos aplicar la forma diferencial de dicho teorema.

Para obtener las condiciones marginales, construyamos el Lagrangeano

$$L(\gamma, x; p, \rho) \equiv \gamma + p'(B - \gamma A)x + \rho(s' x - 1),$$

donde todas las variables deben ser no negativas. La condición de Slater se cumple - basta para verificarlo tomar $x = s$, $\gamma = 0$. Por lo tanto el teorema de Kuhn y Tucker-, en su forma diferencial, es aplicable. Calculemos las derivadas

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - p' Ax \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = p'(B - \gamma A) + \rho s' \leq 0;$$

además deben cumplirse las condiciones de holgura complementaria,

$$[p'(B - \gamma A) + \rho s']x = [1 - p' Ax]\gamma = p'[(B - \gamma A)x] = \rho[s' x - 1] = 0$$

Comparando el primer miembro con el tercero es obvio que $\rho s' x = 0$; como x es no negativo y no nulo, se deduce que $\rho = 0$. Comparando el segundo miembro con el tercero se deduce que $p' Bx = 1$ de modo que algo de valor se produce -Bx es el producto, y el vector p se interpreta como los precios de los bienes, que en consecuencia además de ser no negativo es no trivial-.

En consecuencia se puede presentar el siguiente resultado. El factor óptimo de crecimiento proporcional γ^* se complementa con un vector no negativo, no nulo de niveles de operación de los procesos x^{*}' y un vector no negativo, no nulo de precios p^{*}' -conocidos como los *precios de von Neumann*- tales que se cumplen las siguientes cinco condiciones enunciadas por Kemeny, Morgenstern, Snell y Thompson.

$$1.\left(B-\gamma^{*}A\right)x^{*}\geq 0$$
$$2.p^{*\prime}\left(B-\gamma^{*}A\right)\leq 0$$
$$3.p_{i}^{*}\left(B_{i}-\gamma^{*}A_{i}\right)x^{*}=0 \quad \forall i$$
$$4.p^{*\prime}\left(B^{j}-\gamma^{*}A^{j}\right)x_{j}^{*}=0 \quad \forall j$$
$$5.p^{*\prime}Bx^{*}>0$$

Estas condiciones describen un equilibrio competitivo. La condición 1. dice que los mercados de bienes están balanceados -la producción de un período es suficiente para cubrir los insumos para el siguiente-. La condición 2. compara el valor de la producción por unidad de operación de cada proceso, la coordenada j-ésima de $p^{*\prime}B$, con el valor de los insumos, es decir el costo del mismo, dado por la coordenada j-ésima $p^{*\prime}A$. El factor γ^{*} en este contexto debe interpretarse como un factor de capitalización, que aparece por el hecho de que entre el momento en que se requieren los insumos hasta el momento en que se hacen disponibles los productos transcurre un período. Debido a esta interpretación, el factor y la tasa de expansión óptimos también reciben el nombre de *factor de capitalización* y *tasa de interés de von Neumann*, respectivamente. La relación 3. expresa una de las condiciones de holgura complementaria; nos indica que los bienes producidos en exceso necesariamente serán bienes libres al ser su precio nulo. Del mismo modo la relación 4., la otra condición de holgura complementaria, afirma que los procesos que arrojen pérdidas no serán utilizados. Finalmente la condición 5. requiere que la solución, a fin de tener un sentido económico, debe requerir la producción de algo de valor.

Lamentablemente las condiciones enunciadas no definene un conjunto convexo. Se puede demostrar que en algunos casos hay soluciones para distintos factores de expansión. Aquí solamente se analiza el máximo, pero puede haber otros.

Es de hacer notar que el modelo de von Neumann contiene como casos especiales los modelos usuales de crecimiento económico en los que no se trata el progreso tecnológico.

Es fácil demostrar que el conjunto de niveles de operación de los procesos de von Neumann, al igual que el conjunto de precios de von Neumann, es convexo, para un dado factor de crecimiento.

4. Graficación en el caso de dos bienes

A fin de visualizar la determinación del factor de expansión óptimo se utilizará el siguiente ejemplo, donde el número de bienes es m = 2 y el número de procesos (incluyendo los de eliminación gratuita de los excedentes de producción) es n = 6.

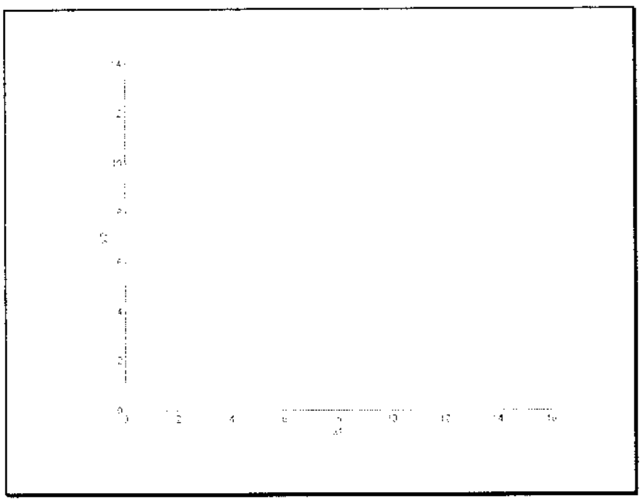
Se utilizarán las matrices de coeficientes de insumos y de productos siguientes,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 14 & 10 & 14 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La determinación del factor de expansión máximo se llevará a cabo gráficamente. A tal fin se utilizó el programa de MATLAB que se transcribe en el apéndice[1].

Los resultados de los cálculos se muestran en la figura.



[1] En la publicación original de la AAEP no se presentó el apéndice con el programa.

Es de notar que la matriz de insumos A tiene columnas que suman todas igual a 10. Esto puede interpretarse como que las unidades de los bienes han sido elegidas de modo que todos los precios que conforman algún índice para insumos son iguales a la unidad, de modo que la suma de las columnas de la matriz de insumos A representan el valor de los insumos del proceso correspondiente. Luego se elige la unidad de operación de cada proceso para que el costo de todos sea el mismo, igual a 10 en el ejemplo. Estos supuestos en nada afectan la generalidad del análisis, sólo son útiles para simplificar la representación gráfica.

En la figura se han representado, tomando como ejes las cantidades de los dos insumos y las de los dos productos, los distintos procesos, cada uno marcado con dos círculos. Los insumos pueden ser identificados porque los círculos correspondientes se halla sobre un segmento —no representado en la figura— de pendiente igual a -1; los círculos que representan a los productos se encuentran por arriba y a la derecha, aunque unidos a los insumos que los generan por una línea de puntos. Tomando todos los pares posibles de procesos, se los ha mezclado a fin de determinar la tasa de expansión máxima permitida por cada mezcla de procesos. En otras palabras, dando valores a t entre 0 y 1 se han calculado los insumos $a = a^j + t\left(a^{j'} - a^j\right)$ y los correspondientes productos $b = b^j + t\left(b^{j'} - b^j\right)$. El factor de expansión de dicho proceso mixto será el máximo consistente con la desigualdad $\gamma a \leq b$; en la figura, es la relación entre la longitud del segmento que une el origen con el perímetro del rectángulo con vértices 0, b, pasando por el punto a, y la longitud del segmento que une a 0 con a. La unión de todos los segmentos definidos de esta manera, representados en la figura con líneas de trazo continuo, proporcionan en este ejemplo, aproximadamente, la silueta de una hoja de árbol.

La figura también muestra el punto de máxima expansión proporcional a partir de las combinaciones óptimas de insumos. Ambos puntos han sido marcados con sendos asteriscos. La semirrecta por el origen que pasa por dichos puntos corresponde a las proporciones en que los bienes se producen a lo largo de la *trayectoria de von Neumann* de crecimiento a la tasa máxima. Cálculos adicionales muestran que en este ejemplo el valor del *factor de expansión máximo* es $\gamma^* = 2.198$. Las proporciones de los insumos en la *trayectoria de von Neumann* están dadas por el vector $k^* = (4.76, 5.24)$.

5. Determinación de la trayectoria de von Neumann en el caso general

Por supuesto el método gráfico descripto en la sección anterior no es viable en casos en que las dimensiones excedan las posibilidades de graficación. En tal caso es útil el siguiente procedimiento de bisección, propuesto en un trabajo anterior del autor [1969], y por lo tanto solo se lo esboza aquí.

Se comienza con dos cotas, una por defecto y otra por exceso, de la tasa de expansión, que se designarán con b por "baja" y a por "alta". A falta de algo mejor se puede tomar $b = \gamma^-$, $a = \gamma^+$. A partir de entonces, se realizan los siguientes cálculos.

1) Tomar como nueva aproximación al factor de expansión el promedio $g-(b-a)/2$.

2) Si $(B-gA)\ x \geq 0$ para algún $x \ \varepsilon\ R_+^n \setminus \{0\}$ reemplazar b por g y recomenzar con 1).

3) Si no hay solución para el sistema del punto 2), reemplazar a por g y recomenzar con 1).

Es obvio que el procedimiento converge, ya que la solución del sistema en 2) puede obtenerse en un número finito de pasos utilizando una variante apropiada del método Simplex de programación lineal, si es que existe. En caso contrario, también en un número finito de pasos el método Simplex indica que no hay solución. Como cada vez que se repite el paso 1) el error se reduce a $(a-b)2^{-t}$, donte t es el número de la iteración, es obvio que es posible llegar a reducirlo a un valor predeterminado arbitrario en un número finito de operaciones.

REFERENCIAS

GALE, DAVID, 1960, *The Theory of Linear Economic Models*. Nueva York: McGraw-Hill.

HICKS, JOHN R., 1965, *Capital and Growth*. Oxford: Clarendon Press.
Mantel, Rolf R., 1969, *An efficient algorithm for the computation of a solution to vonNuemann's model*. Buenos Aires: Instituto Torcuato Di Tella, DTE 68, junio

VON NEUMANN, JOHN, 1937, Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemaeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, en Karl Menger (comp.), *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 8*, 1935-36, traducido al inglés como "A Model of General Economic Equilibrium" por Champernowne, *Review of Economic Studies 13* (1945-46) pp. 1-9.