SEGUIMIENTO OPTIMO DE PARAMETROS IDEALES

CARLOS E. D'ATTELLIS*

1. *Introducción*

Trataremos en el presente trabajo una aplicación de la teoría del control óptimo a un problema de interés en el campo de la economía, como lo es el de aproximación óptima de variables a ciertos parámetros ideales establecidos previamente.

Tiene esto particular importancia en estudios de estabilización económica: las variables serán estados y controles de un sistema lineal y el criterio para la optimización estará dado por una función cuadrática. Trabajos recientes se han referido a este problema, considerando dicho modelo lineal-cuadrático, como los de Mantel [1] y Pindyck [2] y [3].

En lo que sigue haremos el planteo exacto del problema y obtendremos su solución.

Los dos métodos modernos de optimización son los dados por Bellman [4] y Pontryagin [5]; utilizaremos el desarrollado por el primero de dichos autores como extensión del clásico de Hamilton y Jacobi, ya que nos provee de condiciones suficientes con las cuales podremos obtener, según veremos, la síntesis del control óptimo, es decir, la expresión del control en función de los estados del sistema en cada instante.

2. *Modelo y formulación del problema*

Como fue dicho en la introducción, nuestro modelo será lineal

$$\dot{x} = F\,x + G\,u \qquad (1)$$

donde x es el vector de estados (n-dimensional), u el vector de control (r-dimensional) y F y G matrices de $n \times n$ y $n \times r$ respectivamente.

Este sistema puede interpretarse, por ejemplo, como representando una economía cuyos estados están dados por el vector x, y la velocidad de variación de los mismos, respondiendo a una función lineal de los estados x y de los controles (es decir, de los instrumentos de política económica) u.

* Profesor Adjunto del Departamento de Estadística y Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de La Plata. Investigador del Departamento de Instrumentación, Comisión Nacional de Energía Atómica.

Con el objeto de asegurar la controlabilidad del sistema (1), o sea, la posibilidad de transferir el sistema entre dos estados arbitrarios, tomaremos como hipótesis (Ref. [6])

$$rg\,[G,\ F\,G, \ldots,\ F^{n-1}G] = n$$

Supongamos que el período de tiempo en el que se realiza la planificación es $[O,\ T]$ y que damos en él los parámetros ideales $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ a los cuales pretendemos aproximarnos en forma óptima con los controles y estados que intervienen en (1).

Nuestro objetivo es determinar el control $u^*(t)$ y la trayectoria correspondiente a él, $x^*(t)$ (o sea, la solución de (1) para $u^*(t)$ dada alguna condición inicial) de tal manera que se aproximen lo más posible al ideal fijado.

Como fue dicho, el criterio para la deseada optimalidad estará dado por una función cuadrática

$$J\ (x, u) = \int_{O}^{T} \Big[(x - \hat{x})'\ Q\ \ (x - \hat{x}) + (u - \hat{u})'\ R\ \ (u - \hat{u}) \Big]\, \mathrm{dt} \qquad (2)$$

donde Q y R son matrices simétricas y además, R es positiva definida (entonces tiene inversa) (Ref [7]). En la integral queda involucrado el costo debido tanto a la desviación de los controles o instrumentos como a la de los estados del sistema respecto de sus trayectorias ideales, en todo el intervalo $[O,\ T]$.

3. *Optimización*

Resolveremos el problema, como ya anunciamos, empleando condiciones suficientes.

Llamemos

$$\tilde{x} = x - \hat{u}$$
$$\tilde{u} = u - \hat{u}$$

Dados (1) y (2), y llamando $\psi\ (t)$ a las variables adjuntas ($\psi\ (t)$ es un vector de dimensión n), el Hamiltoniano será (Ref. [5]):

$$H = \tilde{x}'Q\,\tilde{x} + \tilde{u}'R\,\tilde{u} + \psi'\ (F\,x + G\,u) \qquad (3)$$

Haremos por conveniencia para el cálculo, $\psi = 2\,\mu$ con lo cual

$$\psi'F\,x = 2\ \mu'F\,x = \mu'F\,x + \mu'F\,x = \mu'F\,x + x'F'\mu$$

pues

$$(\mu'F\,x)' = x'F'\mu = \mu'F\,x$$

y también

$$\psi'G\,u = \mu'G\,u + u'G'\mu$$

Reemplazando en (3)

$$\begin{aligned} H &= \tilde{x}'Q\,\tilde{x} + \tilde{u}'R\,\tilde{u} + x'F'\mu + \mu'F\,x + \mu'G\,u + u'G'\mu \\ &= (\tilde{u}'R\,\tilde{u} + \mu'G\,u + u'G'\mu) + \tilde{x}'Q\,\tilde{x} + \mu'F\,x + x'F'\mu \\ &= (\tilde{u}'R\,\tilde{u} + \mu'G\,\tilde{u} + \tilde{u}'G'\mu) + \mu'G\,\hat{u} + \hat{u}'G'\mu + \qquad (4) \\ &\quad + \tilde{x}'Q\,\tilde{x} + \mu'F\,x + x'F'\mu \end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que

$$\tilde{u}'R\,\tilde{u} + \mu'G\,\tilde{u} + \tilde{u}'G'\mu = (\tilde{u} + R^{-1}G'\mu)'\ R\ (\tilde{u} + R^{-1}G'\mu) - \\ - \mu'G\,R^{-1}G'\mu \qquad (5)$$

Con estas operaciones, la minimización del Hamiltoniano se realiza en forma inmediata; en efecto, reemplazando (5) en (4)

$$H = (\tilde{u} + R^{-1}G'\mu)'\ R\ (\tilde{u} + R^{-1}G'\mu) - \mu'G\,R^{-1}G'\mu + \mu'G\,\hat{u} + \\ + \hat{u}'G'\mu + \tilde{x}'Q\,\tilde{x} + \mu'F\,x + x'F'\mu$$

Vemos que u aparece solo en la forma cuadrática R, de donde, ya que buscamos tomar el mínimo de H como función de $\tilde{u}$, y por el hecho de ser R positiva definida, resulta

$$\tilde{u}^* = -R^{-1}G'\mu$$

y entonces

$$u^* = -R^{-1}G'\mu + \hat{u} \qquad (6)$$

que es el control óptimo buscado.

Llamando H^* al Hamiltoniano (3) para el u^* encontrado

$$H^* = -\mu'G\,R^{-1}G'\mu + \mu'G\,\hat{u} + \hat{u}'G'\mu + \tilde{x}'Q\,\tilde{x} + \mu'F\,x + x'F'\mu \qquad (7)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi es (Ref. [8], [9], [10], [11])

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H^* = 0 \qquad (8)$$

Utilizando

$$V = \tilde{x}'P\,\tilde{x} \qquad (9)$$

con P matriz simétrica, resulta

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}} = 2\ \tilde{x}'P \qquad (10)$$

Entonces,

$$\psi' = 2\ \mu' = 2\ \tilde{x}'P$$

y

$$\mu' = \tilde{x}'P \qquad (11)$$

Reemplazando (10 y (11) en (8), donde H^* está dado por (7) y usando

$$x = \tilde{x} + \hat{x}$$

en los dos últimos sumandos, obtenemos

$$-\tilde{x}'P\,G\,R^{-1}G'P\,\tilde{x} + \tilde{x}'P\,G\,\hat{u} + \hat{u}'G'P\,\tilde{x} + \tilde{x}'Q\,\tilde{x} +$$
$$+ \tilde{x}'P\,F\,\tilde{x} + \tilde{x}'F'P\,\tilde{x} + \tilde{x}'P\,F\,\hat{x} + \hat{x}'F'P\,\tilde{x} = 0$$

$$\tilde{x}'[-P\,G\,R^{-1}G'P + P\,F + F'P + Q]\,\tilde{x} + \tilde{x}'P\,G\,\hat{u} +$$
$$+ \hat{u}'G'P\,\tilde{x} + \tilde{x}'P\,F\,\hat{x} + \hat{x}'F'P\,\tilde{x} = 0$$

o sea, para todo $\tilde{x}$

$$\tilde{x}'[-P\,G\,R^{-1}G'P + P\,F + F'P + Q]\,\tilde{x} + 2\,\tilde{x}'P\,[G\,\hat{u} + F\,\hat{x}] = 0$$

que se cumplirá cuando

$$-P\,G\,R^{-1}G'P + P\,F + F'P + Q = 0 \tag{12}$$

(ecuación matricial de Riccati) y

$$P\,[G\,\hat{u} + F\,\hat{x}] = 0 \tag{13}$$

Si resolvemos para P, queda resuelto el problema, ya que reemplazando en (11) y ésto en (6) donde teníamos la expresión del control óptimo,

$$\tilde{u}^* = -R^{-1}G'P\,\tilde{x}$$
$$u^* = -R^{-1}G'P\,(x - \hat{x}) + \hat{u} \tag{14}$$

Supongamos ahora que los parámetros ideales que pretendemos seguir, se mantienen constantes en subintervalos de nuestro período de planificación; o sea suponemos que el ideal no es cambiado a cada instante.

Con ésto, en cada intervalo en que se ha dividido la planificación tenemos, al multiplicar (12) por

$$G\,\hat{u} + F\,\hat{x} = v$$

por la izquierda,

$$P\,F\,v + Q\,v = 0$$

y llamando

$$F\,v = w \quad , \quad Q\,v = -\lambda \tag{15}$$

resulta

$$P\,w = \lambda$$

4. *Conclusiones*

Las aplicaciones de la teoría del control óptimo son útiles cuando se consigue cerrar un lazo de realimentación, o dicho de otra manera, cuando las variables de estado del sistema en cada instante son las que determinan el control a utilizar para que el proceso se desarrolle en forma óptima de acuerdo al criterio fijado para ello.

Vemos entonces que el estudio precedente sobre el seguimiento óptimo de parámetros permite obtener resultados de interés para la determinación de políticas de estabilización económica, pues justamente, la aplicación de las condiciones suficientes al modelo mencionado, conduce a una expresión del control óptimo dada por la ecuación (14) donde la matriz P debe satisfacer las condiciones (12) y (13), que se reducen, en el caso descripto, a una simple fórmula como la (15).

El cálculo efectivo de dicha solución se realiza mediante operaciones algebraicas solamente, que son computables aún cuando el orden del sistema sea grande; el almacenamiento de matrices de $n \times n$ asociadas con modelos econométricos de gran dimensión, puede realizarse directamente (y también su procesamiento) para $n \angle 150$; tal es el caso en el ejemplo dado en [3], donde las variables de estado son 28. En otros casos, las matrices deberán ser particionadas.

REFERENCIAS

[1] Mantel, R. R. *Políticas de estabilización económica,* Económica (La Plata), XVII, N.° 2, Mayo-Agosto 1971.

[2] Pindyck, R. S. *Optimal Economic Stabilization Policy,* (Thesis), MIT, 1971.

[3] Pindyck, R. S. *An application of the linear quadratic tracking problem to economic stabilization policy,* Transactions IEEE, AC-17, N.° 3, June 1972.

[4] Bellman, R. *Dynamic Programming,* Princeton University Press, New Jersey, 1957.

[5] Pontryagin, L. S., y otros. *The mathematical theory of optimal processes,* Interscience Pub., 1962.

[6] Kalman, R. E., Ho, C. y Narendra, K. *Controllability of linear dynamical systems, Contributions to Differential Equations,* Vol. 1, N.° 2, 1961.

[7] Gantmacher, F. R. *Matrix Theory,* Chelsea Pub., New York, 1957.

[8] Bellman, R. *Introd. to the mathematical theory of control,* Academic Press, 1967.

[9] Bernhard, P. *Théorie de la commande optimale,* (mimeo), 1970.

[10] D'Attellis, C. E. *Control Optimo,* C. N. E. A., EN - 27/96 (1973).

[11] Athans, M. y Falb, P. L. *Optimal control and its applications,* McGraw-Hill, New York, 1965.