UN MODELO SIMPLE DE EQUILIBRIO GENERAL: CAMBIO TECNOLOGICO

HÉCTOR L. DIEGUEZ Y ALBERTO PORTO*

I. *Introducción*

Este trabajo es continuación de uno anterior [1] en que se analizaron los efectos ocasionados por cambios en las dotaciones de factores y en el precio relativo de los bienes. Se utiliza el mismo modelo simple de equilibrio general, respecto al cual, por lo tanto, son válidos los comentarios y observaciones entonces formulados (Sección I).

Para evitar reiteraciones, se supone conocido el modelo y sus principales relaciones, consideradas en dicho trabajo (Secciones II y III).

Como se indicó en [1], nuestra presentación sigue el camino sistematizado conceptualmente por H. G. Johnson [2], procurando formalizarlo, completarlo y detallarlo, por lo que el tratamiento analítico se asemeja al de M. Kemp, [4] y [5], utilizando instrumental básico de microeconomía.

Como el anterior [1], este trabajo no tiene pretensión de contribución original, excepto en cuanto a completar e interconectar algunos importantes trabajos existentes, como los mencionados de H. G. Johnson y M. Kemp, y otros, como por ejemplo el artículo de R. W. Jones [3]. El artículo de H. G. Johnson es muy valioso por su tratamiento conceptual del tema, pero creemos que nuestra formalización permite precisar mejor las conclusiones del modelo,

II. *El modelo*

Las siguientes veinte ecuaciones describen el modelo que se utiliza, correspondiendo (1) a (14) y (16) a (18) al caso de economía cerrada y (1) a (12), (13′), (14′) y (15) a (18), al caso de economía abierta.

$$X_1 = \lambda'_1 \quad T_1 \quad f_1 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda'_1} \quad \rho_1 \right] \tag{1}$$

$$X_2 = \lambda'_2 \quad T_2 \quad f_2 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda'_2} \quad \rho_2 \right] \tag{2}$$

* Profesores del Departamento de Economía e investigadores del Instituto de Investigaciones Económicas, Universidad Nacional de La Plata.

$$w = \lambda_1 f_1' \tag{3}$$

$$w = \pi \lambda_2 f_2' \tag{4}$$

$$r = \lambda'_1 \quad f_1 - \lambda_1 \quad \rho_1 f_1' \tag{5}$$

$$r = \pi (\lambda'_2 \quad f_2 - \lambda_2 \quad \rho_2 \quad f_2') \tag{6}$$

$$T_1 + T_2 = T \tag{7}$$

$$\rho_1 T_1 + \rho_2 T_2 = L \tag{8}$$

$$Y_1 = X_1 + \pi X_2 \tag{9}$$

$$y_1 = \frac{Y_1}{L} \tag{10}$$

$$D_1 = L \quad d_1(y_1, \pi) \tag{11}$$

$$D_2 = L \quad d_2(y_1, \pi) \tag{12}$$

$$X_1 - D_1 = 0 \tag{13}$$

$$X_2 - D_2 = 0 \tag{14}$$

$$E_1 = X_1 - D_1 \tag{13'}$$

$$E_2 = X_2 - D_2 \tag{14'}$$

$$E_1 + \pi E_2 = 0 \tag{15}$$

$$Y_w = w \quad L \tag{16}$$

$$Y_r = r \quad T \tag{17}$$

$$\alpha = \frac{Y_w}{Y_r} \tag{18}$$

Las expresiones (1) y (2) son las funciones de producción del bien agrario (X_1) y del bien industrial (X_2), respectivamente; ρ_i son las relaciones medias trabajo-tierra correspondientes a cada sector —se supone que para todo precio relativo de los factores, se verifica que $\rho_2 > \rho_1$—; T_i son las cantidades de tierra asignadas a la producción de cada bien. Las expresiones (3) a (6) corresponden a la condición competitiva de pago a los factores según productividades marginales; w y r son las remuneraciones del trabajo (L) y la tierra (T) en términos de X_1, bien adoptado como numerario del modelo; π es el precio relativo de X_2 en términos de X_1. Las expresiones (7) y (8) constituyen las condiciones del pleno empleo de los factores; (9) y (10) son las definiciones del ingreso agregado (Y_1) y del ingreso *per capita* (y_1); (11) y (12) son las funciones agregadas de demanda (D_i) por los dos bienes que resultan de multiplicar las funciones individuales de demanda (d_i) —que dependen del precio relativo y del ingreso *per capita*- por el número de individuos; se supone que las elasticidades— ingreso (ϵ_i) son positivas, siendo además $\epsilon_2 > 1$.

Como se indicó en [1], las funciones de demanda por los dos bienes no son independientes, sino que una puede ser obtenida a partir de la otra utilizando la restricción presupuestaria. Procediendo de ese modo, ambas quedan expresadas en función de las elasticidades precio e ingreso de una sola de las funciones de demanda. Las expresiones (13) y (14) implican que en economía cerrada la producción y el consumo de cada bien deben ser iguales; (13′) y (14′) implican que en economía abierta la producción y el consumo de cada bien pueden diferir dando lugar a excesos positivos o negativos de oferta (E_i), con la condición que se cumpla (15), o sea que el valor de las exportaciones (E_1) sea igual al valor de las importaciones (πE_2). Las expresiones (16) a (18) representan los ingresos absolutos del trabajo (Yw) la tierra (Yr) y el ingreso relativo (α) de los factores, respectivamente.

La única alteración respecto al modelo utilizado en el trabajo anterior consiste en la inclusión de los parámetros λ.

Siendo la función de producción del bien i, que se supone homogénea de primer grado,

$$X_i = g_i(L_i,\ T_i)$$

se introduce la posibilidad de progreso tecnológico mediante tales parámetros,

$$X_i = g_i(\lambda_i L_i, \lambda'_i\, T_i)$$

e inicialmente $\lambda_i = \lambda'_i = 1$, de modo que $d\lambda_i > 0$ representa un cambio técnico ahorrador de trabajo dado que el nivel anterior de producción puede luego del cambio obtenerse con la misma cantidad de tierra pero con menos utilización del factor trabajo; $d\lambda'_i > 0$ implica un cambio técnico ahorrador de tierra; y $d\lambda_i = d\lambda'_i > 0$, un cambio neutral[1].

En términos de proporción media de uso de factores,

$$X_i = \lambda'_i\, T_i f_i \left[\frac{\lambda_i}{\lambda'_i}\ \rho_i \right]$$

que es el tipo de función (1) y (2).

III. *El modelo en un contexto de economía cerrada*

En esta sección se presenta el análisis de estática comparativa correspondiente al modelo de economía cerrada. Las expresiones que se obtienen permiten estudiar cambios tecnológicos de distinta naturaleza e intensidad, en una o ambas industrias. El análisis se divide en cinco puntos. En primer lugar, se presentan los efectos del cambio tecnológico sobre las producciones de los dos bienes. Posteriormente, se estudian los efectos sobre las cantidades demandadas de los dos bienes. En el punto tercero se presenta el efecto sobre el precio relativo de los bienes y en el punto cuarto los efectos sobre el ingreso agregado y el ingreso per capita. Finalmente, en el punto quinto, se presentan los efectos sobre la distribución absoluta y relativa del ingreso entre los factores.

[1] Hemos optado por esta forma de tratamiento analítico —siguiendo a KEMP, [4] y [5]— por razones de simplicidad. Ello implica una definición restringida de cambio tecnológico, que puede interpretarse como una razonable aproximación de formas mas generales de definición.

1. *Efectos del cambio tecnológico sobre la producción de bienes.*

Hallando los diferenciales totales de las expresiones (1) a (8), resolviendo para las dos producciones y completando tasas de cambio se obtienen[2]

$$\frac{dX_1}{X_1} = -\frac{L}{T_1(\rho_2 - \rho_1)} e + \frac{\rho_2 \quad T}{T_1(\rho_2 - \rho_1)} t - A \ (d\lambda_1 - d\lambda_2) -$$

$$- B \ (d\lambda'_1 - d\lambda'_2) - K_2\sigma_t \ \frac{d\,\pi}{\pi} \tag{19}$$

$$\frac{dX_2}{X_2} = \frac{L}{T_2(\rho_2 - \rho_1)} e - \frac{\rho_1 \quad T}{T_2(\rho_2 - \rho_1)} t + \tag{20}$$

$$+ \frac{K_1}{K_2} A \ (d\lambda_1 - d\lambda_2) + \frac{K_1}{K_2} B \ (d\lambda'_1 - d\lambda'_2) + K_1\sigma_t \ \frac{d\,\pi}{\pi}$$

de donde surge que

$$\frac{dX_1}{X_1} - \frac{dX_2}{X_2} = - R \ (e - t) - \frac{A}{K_2} \ (d\lambda_1 - d\lambda_2) - \tag{21}$$

$$- \frac{B}{K_2} \ (d\lambda'_1 - d\lambda'_2) - \sigma_t \ \frac{d\,\pi}{\pi}$$

siendo

$$e = \frac{L_1 \quad d\lambda_1 + L_2 \quad d\lambda_2}{L}$$

$$t = \frac{T_1 \quad d\lambda'_1 + T_2 \quad d\lambda'_2}{T}$$

$$R = \frac{LT}{(\rho_2 - \rho_1) \ T_1 \quad T_2}$$

$$A = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left[\frac{T_2 \quad f_2' \quad \rho_1}{f_2'' \quad T_1} + \frac{\pi^2 \quad f_2 \quad \rho_2 \quad f_2'}{f_1 \quad f_1''} \right]$$

$$B = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left[\frac{T_2(f_2 - \rho_2 f_2')}{T_1 \quad f_2''} + \frac{\pi^2 \quad f_2 \quad (f_2 - \rho_2\, f_2')}{f_1 \quad f_1''} \right]$$

[2] Para la obtención de las principales expresiones utilizadas en el texto, ver Apéndice, parte I.

$$\sigma_t = -\frac{1}{(\rho_2-\rho_1)^2}\left[\frac{\pi^2 f_2^2}{f_1 \quad f_1'' \quad K_2}+\frac{f_1^2}{\pi^2 \quad f_2 \quad f_2'' \quad K_1}\right]$$

$$K_1 = \frac{X_1}{Y_1}$$

$$K_2 = 1 - K_1 = \frac{\pi X_2}{Y_1}$$

Los efectos de cambios en las funciones de producción —provocados por cambio tecnológico— sobre las producciones de los dos bienes se obtienen de (19) y (20). El efecto total puede ser dividido analíticamente en dos partes: el efecto del cambio tecnológico con precio relativo de los bienes constante y el efecto de la variación del precio relativo de los bienes con tecnología dada.

El primer efecto —cambio tecnológico con precio relativo de los bienes constante— comprende los cuatro primeros términos de (19) y (20) y puede, a su vez, ser dividido en dos partes que se denominarán efecto "ahorro de factores" del cambio tecnológico y efecto "reducción de costos" del cambio tecnológico[3].

El efecto "ahorro de factores" está representado por los dos primeros términos de (19) y (20)[4]. Recoge el hecho de que, *ceteris paribus*, debido al cambio tecnológico, es posible obtener el nivel original de producciones con menor cantidad de tierra (y/o trabajo), de modo que quedan liberadas cantidades del factor ahorrado. Esto implica un ajuste de las producciones similar al que ocurre ante expansiones en la dotación de un factor: tiende a incrementarse en valores absolutos la producción intensiva en el uso del factor ahorrado y a contraerse en valores absolutos la otra producción.

El efecto "reducción de costos" está representado por el tercer y cuarto términos de (19) y (20). Con precios de los factores inalterados y menores cantidades de factores necesarias para lograr las producciones, el costo unitario de producción se reduce. Pero como el precio relativo de los bienes no ha cambiado —y debe ser igual al costo relativo, por el supuesto de competencia perfecta— es necesario reasignar recursos hacia la industria donde ha ocurrido el mayor cambio tecnológico, de modo que se encarezca relativamente el factor utilizado en ella en forma intensiva. De ese modo,se restablece la razón original de costo de los bienes.

[3] Ver JOHNSON, H. G. [2].

[4] Comparando los dos primeros términos de (19) y (20) con los dos primeros términos de las expresiones (34) y (35) de DIÉGUEZ, H. L. y PORTO, A. [1], se observa que la única diferencia es que e y t, o sea los porrcentajes de factores ahorrados por el cambio tecnológico, reemplazan a $\frac{dL}{L}$ y $\frac{dT}{T}$, que son los porcentajes de expansión de las dotaciones de factores. De modo que se verifica la equivalencia entre el efecto "ahorro de factores" del cambio tecnológico y el efecto de la acumulación de factores.

Si la industria en la que el cambio tecnológico es mayor es la que usa en forma intensiva el factor ahorrado, los efectos "ahorro de factores" y "reducción de costos" actuan en la misma dirección y en direcciones opuestas en el caso contrario.

El quinto término de (19) y (20) refleja la variación en las producciones ocasionadas por cambios en el precio relativo de los bienes[5]. La variación de precios es necesaria para restablecer el equilibrio y depende tanto de las fuerzas del lado de la producción como de la demanda. Si como consecuencia del ajuste el precio relativo aumenta (disminuye) se produce una expansión (contracción) de la producción de X_2 y una contracción (expansión) de la de X_1.

Seguidamente se analiza en detalle una de dichas expresiones, la (19).

El primer término, $\frac{L}{T_1(\rho_2 - \rho_1)}$, con signo negativo, es el efecto Rybczynski de la acumulación de trabajo, que tiende a reducir en valores absolutos la producción del bien agrario, que es intensivo en tierra. Está multiplicado por e que representa el porcentaje de trabajo ahorrado, para la economía en su conjunto, por el cambio tecnológico.

El segundo término, $\frac{\rho_2 T}{T_1(\rho_2 - \rho_1)}$, es el efecto Rybczynski de la acumulación de tierra y tiende a incrementar en valores absolutos la producción del bien agrario, que es intensivo en ese factor. Está multiplicado por t que representa el porcentaje de tierra ahorrada, para la economía en su conjunto, por el cambio tecnológico.

El tercer término, $A\ (d\lambda_1 - d\lambda_2)$, con signo negativo, es el efecto que tiene sobre la producción la disminución de los costos de producción, en una o en las dos industrias, debida a la reducción del costo del factor trabajo por unidad de producto. Este efecto es equivalente al causado, con tecnología constante, por un subsidio por utilización del trabajo, pagado en proporción a la remuneración del mismo[6]. El cambio tecnológico ahorrador de trabajo tiene el mismo efecto sobre los costos unitarios ya que reduce la cantidad de factor necesaria[7]. Como $A < 0$, el efecto sobre la producción de X_1 depende de si el cambio tecnológico ahorrador de trabajo ocurre a una tasa mayor en la primera o en la segunda industria. Si, por ejemplo, es mayor en la primera industria $d\lambda_1 > d\lambda_2$ y X_1 aumenta. La explicación conceptual es la siguiente: si $d\lambda_1 > d\lambda_2$ se abaratan los costos en las dos industrias, pero relativamente más en la primera; como el costo relativo de los bienes debe ser igual al precio relativo —por el supuesto de competencia perfecta—, la única forma de restablecer el costo relativo inicial es desplazar recursos de la

[5] En el trabajo anterior [1] se ha explicado en detalle el ajuste de precios en el contexto de economía cerrada.

[6] Ver JONES, R. W. [3].

[7] Para la demostración de la equivalencia, ver Apéndice, parte II.

segunda industria a la primera, provocando en consecuencia un encarecimiento relativo del factor usado en forma intensiva en X_1.

El cuarto término, $B\,(d\lambda'_1 - d\lambda'_2)$, con signo negativo, representa el efecto sobre la producción de la disminución de los costos causada por la menor cantidad de tierra requerida para obtener un nivel dado de producto, debido al cambio tecnológico. Este efecto es equivalente al que resulta de dejar inalterada la cantidad requerida del factor pero disminuir el precio de su servicio por la vía de un subsidio otorgado en proporción a su remuneración. Nuevamente, y por la misma razón que en el caso anterior,

$$\frac{dX_1}{X_1}$$

será mayor, igual o menor que cero dependiendo de que el cambio tecnológico ahorrador de tierra ocurra en la primera industria a una tasa mayor, igual o menor que en la segunda.

El quinto término, $K_2\sigma_t$, con signo negativo, indica la disminución de la producción del bien agrario ante aumentos en el precio relativo del bien industrial.

2. *Efectos del cambio tecnológico sobre la demanda de bienes.*

Hallando los diferenciales totales de las expresiones (11) y (12), resolviendo para las demandas por los dos bienes y completando tasas de cambio, se obtienen

$$\frac{dD_1}{D_1} = \epsilon_1 \left[(1 - y_r)\, e + y_r t + (K_2 - K'_2)\, \frac{d\pi}{\pi} \right] + \tilde{\eta}_1\, \frac{d\pi}{\pi} \qquad (22)$$

$$\frac{dD_2}{D_2} = \epsilon_2 \left[(1 - y_r)\, e + y_r t + (K_2 - K'_2)\, \frac{d\pi}{\pi} \right] - \tilde{\eta}_2\, \frac{d\pi}{\pi} \qquad (23)$$

donde $y_r = \dfrac{rT}{Y_1}$, es la participación relativa del factor tierra en el ingreso agregado.

De las expresiones anteriores surge que

$$\frac{dD_1}{D_1} - \frac{dD_2}{D_2} = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \left[(1 - y_r)\, e + y_r t + (K_2 - K'_2)\, \frac{d\pi}{\pi} \right] + \\ + \sigma_D\, \frac{d\pi}{\pi} \qquad (24)$$

Considérense los cuatro términos de una de las expresiones precedentes, por ejemplo la (22). Los tres primeros términos dentro del corchete corresponden a "efectos-ingreso". Los efectos "ahorro de factores" del cambio tecnológico tienden a incrementar el ingreso *per capita* y, por consiguiente, la demanda agregada por el bien —corresponden a los dos primeros términos. El tercer término dentro del corchete es el efecto ingreso del cambio en el precio relativo; este efecto será distinto de cero en la medida en que $K_2 \neq K_2'$, o sea en el caso de economía abierta. En el caso que se trata en esta sección de economía cerrada, el efecto ingreso del cambio en el precio relativo se anula. El cuarto término representa el efecto sustitución en el consumo provocado por el cambio del precio relativo de los bienes[8].

De acuerdo con lo anterior, en el caso de economía cerrada las expresiones (22) a (24) toman la forma

$$\frac{dD_1}{D_1} = \epsilon_1 \left[(1 - y_r)\ e + y_r t \right] + \tilde{\eta}_1 \frac{d\pi}{\pi} \tag{22'}$$

$$\frac{dD_2}{D_2} = \epsilon_2 \left[(1 - y_r)\ e + y_r t \right] - \tilde{\eta}_2 \frac{d\pi}{\pi} \tag{23'}$$

$$\frac{dD_1}{D_1} - \frac{dD_2}{D_2} = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \left[(1 - y_r)\ e + y_r t \right] + \sigma_D \frac{d\pi}{\pi} \tag{24'}$$

3. *El ajuste de precios.*

El cambio en el precio relativo de los bienes, requerido para mantener el balance entre oferta y demanda una vez ocurrido el cambio tecnológico se obtiene igualando (21) y (24'), de donde resulta

$$\frac{d\pi}{\pi} = -\frac{R\ (e - t) + \frac{A}{K_2}\ (d\lambda_1 - d\lambda_2) + \frac{B}{K_2}\ (d\lambda'_1 - d\lambda'_2) +}{\sigma_D + \sigma_t} \frac{+ (\epsilon_1 - \epsilon_2)\ [\ (1 - y_r)\ e + y_r t\ ]}{\sigma_D + \sigma_t} \tag{25}$$

[8] Debe observarse que la forma en que hemos especificado las funciones de demanda permite diferenciar el efecto de incrementos en el ingreso nacional causados por un aumento de trabajadores (con disminución del ingreso *per capita*) de los incrementos causados por progreso técnico (con aumento del ingreso *per capita*). Comparando (22) a (24) con las expresiones (37) a (39) de H. L. Diéguez y A. Porto [1], se aprecia las similitudes y diferencias de los efectos del cambio tecnológico ahorrador de un factor y la expansión en la dotación del mismo. Por ejemplo, de los terceros términos (22) y (37) se aprecia que un cambio técnico ahorrador de tierra tiene el mismo efecto sobre la cantidad demandada que la expansión de ese factor, con la diferencia que t sustituye a $\frac{dT}{T}$. En cambio, son distintos los efectos referidos al factor trabajo. Si ocurre un cambio técnico ahorrador de trabajo, aumenta la cantidad demandada debido al crecimiento del ingreso *per capita* (primer término de (22)); si se expande la dotación de trabajo, la cantidad demandada tiende a aumentar debido al crecimento del número de demandantes (primer término de (37)) y tiende a disminuir dada la disminución del ingreso *per capita* motivada por los rendimientos decrecientes (segundo término de (37)).

El denominador de (25) es positivo. Los tres primeros términos del numerador provienen del lado de la producción y pueden ser positivos, cero o negativos, tendiendo a disminuir, dejar inalterado o aumentar, respectivamente, el precio relativo. Así, el primer término, $R\ (e - t)$, que representa el efecto "ahorro de factores" del cambio tecnológico, tiende a disminuir el precio relativo de los bienes si prevalece el sesgo ahorrador de trabajo, para toda la economía, del cambio tecnológico; a aumentarlo si prevalece el sesgo ahorrador de tierra para toda la economía; y a dejarlo inalterado si el cambio tecnológico es neutral desde el punto de vista de la economía en su conjunto.

El segundo término, $\frac{A}{K_2}\ (d\lambda_1 - d\lambda_2)$, representa el efecto sobre el precio relativo de la "reducción de costos" debida a cambio tecnológico ahorrador de trabajo; según que el cambio tecnológico sea mayor, igual o menor en la primer industria en relación con la segunda, el precio relativo tenderá a aumentar, permanecer inalterado o disminuir respectivamente.

El tercer término, $\frac{B}{K_2}\ (d\lambda'_1 - d\lambda'_2)$, representa el efecto sobre el precio relativo de la "reducción de costos" debida a cambio tecnológico ahorrador de tierra y tiene una interpretación similar al anterior: dependiendo de si la tasa de cambio tecnológico en la primer industria es mayor, igual o menor que en la segunda, el precio relativo de los bienes tenderá a aumentar, permanecer constante o disminuir, respectivamente.

Por último, el cuarto término del numerador proviene del lado de la demanda; representa el efecto sobre la demanda de aumentos en el ingreso *per capita* debidos a cambio tecnológico con precio relativo de los bienes constante y tiende a aumentar π dado el supuesto de que $\epsilon_2 > \epsilon_1$.

En conclusión, con los supuestos adoptados en el modelo con relación a elasticidades-ingreso en el consumo e intensidades de uso de factores en la producción, se tiene que producido un cambio tecnológico (supuesto siempre positivo, o sea "progreso" tecnológico), el efecto del lado de la demanda siempre tiende a aumentar el precio relativo del bien industrial; el efecto producción proveniente del "ahorro de factores" actúa en la misma dirección que el efecto demanda si para la economía en su conjunto prevalece el sesgo ahorrador de tierra en el cambio tecnológico; y el efecto producción proveniente de la "reducción de costos" actúa en la misma dirección que los anteriores si el cambio tecnológico ocurre a una tasa superior en la primer industria con relación a la segunda.

4. *Variaciones del ingreso.*

Los efectos del cambio tecnológico sobre el ingreso agregado y el ingreso *per capita* se obtienen a partir de (9) y (10); hallando los diferenciales totales y completando tasas de cambio, surge que[9]

$$\frac{dY_1}{Y_1} = \frac{dy_1}{y_1} = y_w \quad e + y_r \quad t + K_2 \frac{d\,\pi}{\pi} \tag{26}$$

Tanto el ingreso agregado como el ingreso *per capita* tienden a aumentar debido al efecto "ahorro de factores" del cambio tecnológico —representado por los dos primeros términos de (26). Como el cambio del precio relativo puede ser en cualquier dirección, dependiendo de la naturaleza del cambio tecnológico, se tiene la certeza que $\frac{dY_1}{Y_1} > 0$ solo si $\frac{d\,\pi}{\pi} \geqq 0$.

5. *Cambio tecnológico y distribución del ingreso*

Los efectos del cambio tecnológico sobre las participaciones absolutas y relativas de los dos factores en el ingreso se obtienen a partir de las expresiones (16) a (18). Diferenciando totalmente y completando tasas de cambio se obtienen

$$\frac{dYw}{Yw} = \frac{dw}{w} \tag{27}$$

$$\frac{dYr}{Yr} = \frac{dr}{r} \tag{28}$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dw}{w} - \frac{dr}{r} \tag{29}$$

[9] Comparar con las expresiones (41) y (42) de Diéguez, H. L. y Porto, A. [1]. En lo que hace al ingreso agregado la única diferencia es que $\frac{dL}{L}$ y $\frac{dT}{T}$ son reemplazadas por e y t, lo que demuestra la equivalencia de la expansión de las dotaciones de factores con el efecto "ahorro de factores" del cambio tecnológico. En cambio, existe una diferencia significativa en lo relativo al ingreso *per capita*: una expansión de la dotación de trabajo, disminuye el ingreso *per capita* debido a los rendimientos decrecientes, en tanto que un cambio tecnológico ahorrador de trabajo aumenta el ingreso *per capita.*

Debe hacerse notar con respecto a esta s dos variables —como también con respecto a w, r, Yw e Yr— que al estar expresadas en términos de valor, su nivel depende de la elección del numerario. El sentido de las variaciones de los niveles de equilibrio para Y_1 e y_1, ante cambios en parámetros depende del numerario escogido; en cambio, para w, r, Yw, Yr, el sentido de las variaciones es independiente del numerario, aunque no su magnitud. Ver notas [11] y [26] de [1] para mayor detalle.

Las expresiones correspondientes a las tasas de cambio de las remuneraciones de los factores se obtienen de las expresiones (3) a (6):

$$\frac{dw}{w} = -\frac{\rho_1}{(\rho_2 - \rho_1)} d\lambda_1 + \frac{\rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)} d\lambda_2 - \frac{(f_1 - \rho_1 f_1')}{f_1'(\rho_2 - \rho_1)} (d\lambda'_1 - d\lambda'_2) + \frac{f_2}{f_2'(\rho_2 - \rho_1)} \frac{d\pi}{\pi} \tag{30}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{f_1' \rho_1 \rho_2}{(f_1 - \rho_1 f_1')(\rho_2 - \rho_1)} (d\lambda_1 - d\lambda_2) + \frac{\rho_2}{(\rho_1 - \rho_1)} d\lambda'_1 - \frac{\rho_1}{(\rho_2 - \rho_1)} d\lambda'_2 - \frac{\rho_1 f_2}{(f_2 - \rho_2 f_2')(\rho_2 - \rho_1)} \frac{d\pi}{\pi} \tag{31}$$

Con precio relativo de los bienes constante, aumenta la remuneración (y, por consiguiente, la participación absoluta en el ingreso) del factor usado en forma intensiva en la industria en la que ocurre el cambio tecnológico, y disminuye la remuneración (y, por consiguiente, la participación absoluta en el ingreso) del otro factor. El efecto del cambio en el precio relativo de los bienes puede actuar o no en la misma dirección. Como se demostró en [1] un aumento del precio relativo del bien industrial aumenta la remuneración de factor en el cual es intensivo ese bien y disminuye la remuneración del otro factor.

IV. *El modelo en un contexto de economía abierta*

El modelo se aplica ahora al caso de una economía abierta que toma como un dato fijado por el mercado mundial el precio relativo de los bienes. Las expresiones (19) a (24) y (26) a (31) que describen el comportamiento de las distintas variables en el caso de economía cerrada, pueden ser utilizadas para el caso de economía abierta; pero mientras en economía cerrada el precio es variable endógena de ajuste cuyos cambios son motivados por el avance tecnológico, en economía abierta es variable exógena, cuyos cambios se producen en forma autónoma. Tal como ocurre con el mecanismo de ajuste en economía cerrada ante cambios en las dotaciones de factores, tambien el mecanismo de ajuste en economía cerrada ante cambio tecnológico puede interpretarse analíticamente como una combinación de los mecanismos de ajuste que funcionan en una economía abierta del tipo analizado, ante cambios en la tecnología y los términos del intercambio. Los efectos de variaciones en los términos del intercambio ya fueron considerados en el trabajo anterior [1], de modo que en lo que sigue nos limitamos a analizar los efectos de cambio tecnológico. Haciendo $\frac{d\pi}{\pi} = 0$ en (19) a (24) y (26) a (31) quedan las expresiones en la forma adecuada para realizar dicho análisis.

En esta parte del trabajo la atención se centrará sobre el comportamiento del volumen de exportaciones e importaciones, tanto en valores absolutos como en su relación con el ingreso agregado. El análisis se realizará para cinco tipos de cambio tecnológico:

a) ahorrador de trabajo en la segunda industria;
b) ahorrador de trabajo en las dos industrias a la misma tasa;
c) neutral en la segunda industria;
d) neutral en las dos industrias a la misma tasa; y
e) neutral en las dos industrias, pero mayor en la segunda que en la primera.[10]

1. *Efectos del cambio tecnológico sobre la producción de bienes.*

Tanto el volumen de exportaciones como el de importaciones dependen del comportamiento de la oferta y la demanda internas. La demanda por ambos bienes —como se observó al tratar el efecto del cambio tecnológico con π constante, en el caso de economía cerrada— aumenta ante cualquier tipo de cambio tecnológico, dado que aumenta el ingreso *per capita*. En cuanto a la oferta, todo cambio tecnológico —con precio relativo de los bienes constante—, cualquiera sea la intensidad a la que ocurra en una o las dos industrias, y cualquiera sea su naturaleza, tiene un doble efecto sobre las producciones, pero tanto el efecto "ahorro de factores" como el "reducción de costos" varían para cada producción según la naturaleza del cambio tecnológico y pueden o no actuar en la misma dirección.

a) *Cambio tecnológico ahorrador de trabajo en la segunda industria.*

$$\frac{dX_1}{X_1} = - \frac{L}{T_1\ (\rho_2 - \rho_1)}\ e + A\ d\lambda_2 \qquad (32)$$

$$\frac{dX_2}{X_2} = \frac{L}{T_2\ (\rho_2 - \rho_1)}\ e - \frac{K_1}{K_2}\ A\ d\lambda_2 \qquad (33)$$

El efecto total del cambio tecnológico con precio relativo de los bienes constante, comprende el efecto equivalente a la expansión del factor trabajo y el efecto del abaratamiento del mismo. En este caso, como el cambio ahorrador de trabajo ocurre en la industria que utiliza en forma intensiva ese factor, ambos efectos actúan en la misma dirección, disminuyendo la oferta de exportables y aumentando la de importables.

[10] Las expresiones analíticas presentadas son generales y permiten considerar otros casos. Los cinco tipos de cambio tecnológico comprenden algunas de las posibilidades de mayor relevancia y su análisis ejemplifica el tratamiento aplicable a otros casos.

b) *Cambio tecnológico ahorrador de trabajo en las dos industrias a la misma tasa.*

$$\frac{dX_1}{X_1} = -\frac{L}{T_1\ (\rho_2 - \rho_1)}\ e \tag{34}$$

$$\frac{dX_2}{X_2} = \frac{L}{T_2\ (\rho_2 - \rho_1)}\ e \tag{35}$$

En este caso, en la fórmula final solo aparece el efecto "ahorro de factor", o sea el efecto equivalente a la expansión del factor trabajo que aumenta la oferta de importables y disminuye la de exportables. La disminución de costos ocurre en las dos industrias a la misma tasa, por lo que el costo relativo no se altera y el efecto "reducción de costos" se cancela: $d\lambda_1 > 0$ tiende a provocar un desplazamiento de recursos de X_2 a X_1 que se compensa exactamente con el desplazamiento de recursos de X_1 a X_2 motivado por $d\lambda_2 > 0$.

c) *Cambio tecnológico neutral en la segunda industria*[11].

$$\frac{dX_1}{X_1} = -K_2\ \ \sigma_t\ \ d\lambda_2 \tag{36}$$

$$\frac{dX_2}{X_2} = d\lambda_2 + K_1\ \ \sigma_t\ \ d\lambda_2 \tag{37}$$

El efecto "ahorro de factores" es tal que el porcentaje ahorrado de ambos factores en la segunda industria es el mismo; por consiguiente, como $\rho_2 > \rho$, para la economía en su conjunto es equivalente a expansión simultánea de ambos factores a tasas distintas, creciendo L proporcionalmente más que T, y con $k^* = \dfrac{L_2}{T_2}\dfrac{d\lambda_2}{d\lambda'_2} = \rho_2$. Como se demostró en el trabajo anterior [1], en tales circunstancias se expande X_2 (a la tasa a la que ocurre el cambio tecnológico), pero X_1 no se altera.

El efecto "reducción de costos" equivale, por corresponder a abaratamientos iguales de los dos factores, a un aumento del precio relativo de los bienes.

[11] El lector puede apreciar que el efecto "ahorro de factores" en los casos c), d) y e) siguientes —en los que existe ahorro de los dos factores provocado por el cambio tecnológico— es equivalente a distintas combinaciones de expansiones simultáneas en las dotaciones de los dos factores. Si en las expresiones (34') y (35') de [1] se hacen sucesivamente $k = \rho_2$, $k = \rho$ y $k = h\rho$ se obtienen expresiones equivalentes a las de los casos c), d) y e)

Tambien en este caso aumenta la oferta de importables y disminuye la de exportables.

d) *Cambio tecnológico neutral en las dos industrias a la misma tasa.*

$$\frac{dX_1}{X_1} = \frac{\rho_2 T - L}{T_1 \ (\rho_2 - \rho_1)} \ d\lambda_1 \tag{38}$$

$$\frac{dX_2}{X_2} = \frac{L - \rho_1 T}{T_2 \ (\rho_2 - \rho_1)} \ d\lambda_1 \tag{39}$$

En este caso, el efecto "ahorro de factores" es equivalente a expansión de los dos factores a la misma tasa proporcional; o sea, provoca que las dos producciones se expandan a la misma tasa proporcional

$$\left[\frac{dX_1}{X_1} = \frac{dX_2}{X_2} \right].$$

El efecto "reducción de costos" se cancela porque dicha reducción tiene lugar a la misma tasa en las dos industrias, no alterándose en consecuencia el costo relativo.

e) *Cambio tecnológico neutral en las dos industrias a tasas distintas — mayor en la segunda industria que en la primera.*

$$\frac{dX_1}{X_1} = \frac{L \ (\rho_2 - k^*)}{k^* \ T_1 \ (\rho_2 - \rho_1)} \ e + K_2 \sigma_t (d\lambda_1 - d\lambda_2) \tag{40}$$

$$\frac{dX_2}{X_2} = - \frac{L \ (\rho_1 - k^*)}{k^* \ T_2 \ (\rho_2 - \rho_1)} \ e - K_1 \ \sigma_t (d\lambda_1 - d\lambda_2) \tag{41}$$

siendo

$$e = h^* t$$

$$k^* = \frac{L_1 \ d\lambda_1 + L_2 \ d\lambda_2}{T_1 \ d\lambda_1 + T_2 \ d\lambda_2} = h^* \rho$$

Al ser el cambio tecnológico mayor en la segunda industria que en la primera, el efecto "ahorro de factores" equivale a expansión simultánea de ambos factores, con L creciendo proporcionalmente mas que T. La producción de X_2 se expande, y como $\rho_2 > k^*$ también crece la producción de X_1 [12]. Por el efecto "reducción de costos" ocurre lo siguiente: como $d\lambda_2 > d\lambda_1$, el costo relativo de X_2 disminuye y para restituirlo a su nivel original es necesario desplazar recursos de X_1 hacia X_2, expandiéndose X_2 y contrayéndose X_1.

En este caso, la oferta de importables se expande, pero la de exportables puede aumentar, permanecer constante o disminuir.

2. *Consecuencias sobre el volumen de comercio exterior.*

Hallando el diferencial total de (13') y completando tasas de cambio se obtiene

$$\frac{dE_1}{E_1} = \frac{X_1}{E_1} \frac{dX_1}{X_1} - \frac{D_1}{E_1} \frac{dD_1}{D_1}$$

de donde, reemplazando y reordenando, surge que

$$\frac{dE_1}{E_1} = \frac{1}{E_1}\left[- \frac{f_1 \; L}{(\rho_2 - \rho_1)} \; e - AX_1(d\lambda_1 - d\lambda_2) - D_1 \; \epsilon_1 \; (1 - y_r) \; e \right] +$$

$$+ \frac{1}{E_1}\left[\frac{\rho_2 \; T \; f_1}{(\rho_2 - \rho_1)} \; t - BX_1 \; (d\lambda'_1 - d\lambda'_2) - D_1 \; \epsilon_1 \; y_r \; t \right] \qquad (42)$$

A partir de esta expresión general se obtienen las formas particulares que permiten estudiar los cinco casos seleccionados.

a) *Cambio tecnológico ahorrador de trabajo en la segunda industria.*

$$\frac{dE_1}{E_1} = \frac{1}{E_1}\left[- \frac{f_1 \; L}{(\rho_2 - \rho_1)} \; e + AX_1 d\lambda_2 - D_1 \; \epsilon_1 \; (1 - y_r) \; e \right] \qquad (43)$$

En este caso los dos efectos provenientes del lado de la producción actúan en la misma dirección: ambos disminuyen la oferta de exportables como surge de los dos primeros términos de la expresión anterior. El tercer, término representa el efecto del aumento de la demanda. Por consiguiente, los tres efectos actúan en la misma dirección. Un cambio tecnológico ahorrador del factor que es utilizado en forma intensiva en la producción del bien importable y ocurre en esa industria (o en ambas, pero siendo mayor

[12] En

$$k^* = \frac{L_1 \; d\lambda_1 + L_2 d\lambda_2}{T_1 \; d\lambda'_1 + T_2 \, d\lambda'_2}$$

teniendo en cuenta que $d\lambda_i = d\lambda'_i$ —dado que el cambio técnico es neutral en las dos industrias—, y que $d\lambda_1 = c d\lambda_2$, con $c < 1$ —dado que el cambio técnico es mayor en la segunda industria—, resulta

$$k^* = \frac{L_2 + cL_1}{T_2 + cT_1}$$

verificándose, en consecuencia, que

$$\rho_1 < k^* < \rho_2$$

en la segunda industria que en la primera), disminuye el volumen absoluto de exportaciones. Como a su vez el ingreso agregado aumenta, se trata de un caso de crecimiento económico ultra-anti-comercial[13].

b) *Cambio tecnológico ahorrador de trabajo en las dos industrias a la misma tasa.*

$$\frac{dE_1}{E_1} = \frac{1}{E_1}\left[-\frac{f_1\ L}{(\rho_2 - \rho_1)}\ e - D_1\ \epsilon_1\ (1 - y_r)\ e\right] \tag{44}$$

Es un caso similar al anterior, pero solo existe el efecto "ahorro de factores" del lado de la producción, ya que el efecto "reducción de costos" se cancela.

De los casos a) y b) anteriores se concluye que un cambio tecnológico ahorrador del factor que es utilizado en forma intensiva en la producción del bien importable, y que ocurre en ambas industrias a la misma tasa o a una tasa mayor para la segunda industria que para la primera, disminuye el volumen absoluto de exportaciones o sea que produce un crecimiento económico de tipo ultra-anti-comercial.

c) *Cambio tecnológico neutral en la segunda industria.*

$$\frac{dE_1}{E_1} = \frac{1}{E_1}\left[-X_1\ K_2\ o_t\ d\lambda_2 - D_1\ \epsilon_1\ \left[(1-y_r)\ e + y_r\ t\right]\right] \tag{45}$$

Tanto el efecto proveniente del lado de la producción —representado por el primer término— como el proveniente del lado de la demanda —representado por el segundo término— disminuyen el volumen absoluto de exportaciones, dando lugar a crecimiento económico ultra-anti-comercial.

[13] En el trabajo anterior [1], siguiendo la sistematización de H. G. JOHNSON [2], se definieron cinco tipos de crecimiento económico en función de la variación relativa del comercio exterior respecto a las variaciones del ingreso de la economía. Siendo $\gamma = \frac{E_1}{Y_1}$ diferenciando totalmente y completando tasas de cambio se obtiene

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dE_1}{E_1} - \frac{dY_1}{Y_1}$$

1. Si $\frac{d\gamma}{\gamma} = 0$, el crecimiento económico es denominado neutral;

2. Si $\frac{d\gamma}{\gamma} > 0$, el crecimiento económico es sesgado en pro del comercio, distinguiéndose dos casos:
2.1. Si $dE_1 > dY_1$, el crecimiento es ultra-pro-comercial;
2.2. Si $dE_1 < dY_1$, el crecimiento es pro-comercial;

3. Si $\frac{d\gamma}{\gamma} < 0$, el crecimiento económico es sesgado en contra del comercio distinguiéndose dos casos:
3.1. Si $\frac{dE_1}{E_1} < 0$, el crecimiento es ultra-anti-comercial;
3.2. Si $\frac{dE_1}{E_1} > 0$, el crecimiento es anti-comercial.

d) *Cambio tecnológico neutral en las dos industrias a la misma tasa.*

$$\frac{dE_1}{E_1} = \frac{1}{E_1}\left[\frac{f_1\ (\rho_2 T - L)}{(\rho_2 - \rho_1)}\ d\lambda_1 - D_1\ \epsilon_1\ [(1-y_r)\ e + y_r\ t]\right] \tag{46}$$

En este caso se expanden tanto la oferta como la demanda de exportables. El ingreso agregado de la economía se expande a la misma tasa que las dos producciones; la demanda por el bien exportable se expande a una tasa inferior a la del ingreso, debido al supuesto de $\epsilon_1 < 1$. En consecuencia,

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dE_1}{E_1} - \frac{dY_1}{Y_1} > 0$$

y el crecimiento económico es sesgado en favor del comercio; como $dY_1 > dE_1$,[14] se trata del caso de crecimiento económico pro-comercial.

e) *Cambio tecnológico neutral en las dos industrias a tasas distintas — mayor en la segunda industria que en la primera.*

$$\frac{dE_1}{E_1} = \frac{1}{E_1}\left[\frac{f_1\ (\rho_2 - k^*)}{k^*(\rho_2 - \rho_1)}\ e + X_1\ K_2\ \sigma_t(d\lambda_1 - d\lambda_2) - \right.$$
$$\left. - D_1\ \epsilon_1\ [(1-y_r)\ e + y_r\ t]\right] \tag{47}$$

Los dos efectos provenientes del lado de la producción actúan en direcciones opuestas: el efecto "ahorro de factores" —primer término— tiende a incrementar la oferta de exportables; el efecto "reducción de costos" —segundo término— tiende a disminuirla. El efecto proveniente del lado de la demanda —tercer término— refuerza el efecto "reducción de costos". El volumen de exportaciones puede aumentar, permanecer constante o disminuir. El crecimiento económico puede ser desde pro-comercial hasta ultra-anti-comercial, quedando excluída la posibilidad del caso ultra-pro-comercial [15].

[14] Siendo

$$dE_1 = dX_1 - dD_1$$

y

$$dY_1 = dX_1 + \pi\ dX_2$$

reemplazando y reordenando surge que

$$dE_1 - dY_1 = -(\pi\ dX_2 + dD_1) < 0$$

Esto implica $dY_1 > dE_1$ (con $dE_1 > 0$).

[15] Como en el caso de la nota [14], $dE_1 - dY_1 < 0$ excluye la posibilidad de crecimiento ultra-pro-comercial. Pero ahora, dE_1 puede ser mayor, igual o menor que cero.

V. *Apéndice*

En la primera parte de este apéndice se presenta —con la finalidad de facilitar la lectura del trabajo y su utilización como material pedagógico— la obtención de las principales fórmulas utilizadas en el texto. En la segunda parte se demuestra la equivalencia entre el efecto "reducción de costos" del cambio tecnológico y un subsidio por utilización del factor ahorrado. En ambas partes la obtención de los resultados se realiza suponiendo precio relativo de los bienes dado.

I

Los efectos sobre las producciones de los dos bienes de cambios tecnológicos de distinta naturaleza se obtienen diferenciando [1] y [2],

$$dX_1 = \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial X_1}{\partial \lambda'_1} d\lambda'_1 + \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \frac{\partial X_1}{\partial \lambda'_2} d\lambda'_2$$

$$dX_2 = \frac{\partial X_2}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial X_2}{\partial \lambda'_1} d\lambda'_1 + \frac{\partial X_2}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \frac{\partial X_2}{\partial \lambda'_2} d\lambda'_2$$

Desarrollando se obtienen

$$\begin{aligned} dX_1 = & \left[f_1 \frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1} + T_1 f_1' \rho_1 + T_1 f_1' \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda_1} \right] d\lambda_1 + \\ & + \left[f_1 T_1 + f_1 \frac{\partial T_1}{\partial \lambda'_1} - T_1 f_1' \rho_1 + T_1 f_1' \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda'_1} \right] d\lambda'_1 + \\ & + \left[f_1 \frac{\partial T_1}{\partial \lambda_2} + T_1 f_1' \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda_2} \right] d\lambda_2 + \\ & + \left[f_1 \frac{\partial T_1}{\partial \lambda'_2} + T_1 f_1' \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda'_2} \right] d\lambda'_2 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} dX_2 = & \left[f_2 \frac{\partial T_2}{\partial \lambda_1} + T_2 f_2' \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda_1} \right] d\lambda_1 + \\ & + \left[f_2 \frac{\partial T_2}{\partial \lambda'_1} + T_2 f_2' \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda'_1} \right] d\lambda'_1 + \\ & + \left[f_2 \frac{\partial T_2}{\partial \lambda_2} + T_2 f_2' \rho_2 + T_2 f_2' \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda_2} \right] d\lambda_2 + \\ & + \left[f_2 T_2 + f_2 \frac{\partial T_2}{\partial \lambda'_2} - T_2 f_2' \rho_2 + T_2 f_2' \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda'_2} \right] d\lambda'_2 \end{aligned} \tag{49}$$

El paso siguiente es analizar los efectos del cambio tecnológico sobre las utilizaciones medias de factores y sobre las cantidades de tierra asignada a cada sector.

Eliminando w y r, [3] a [6] se reducen a

$$\lambda_1 f_1' = \pi \lambda_2 f_2' \tag{50}$$

$$\lambda'_1 f_1 - \lambda_1 \rho_1 f_1' = \pi (\lambda'_2 f_2 - \lambda_2 \rho_2 f_2') \tag{51}$$

Derivando con respecto a λ_1 se obtienen

$$f_1' + f_1'' \rho_1 + f_1'' \frac{d\rho_1}{d\lambda_1} = \pi f_2'' \frac{d\rho_2}{d\lambda_1}$$

$$-\rho^2_1 f_1'' - \rho_1 f_1'' \frac{d\rho_1}{d\lambda_1} = -\pi \rho_2 f_2'' \frac{d\rho_2}{d\lambda_1}$$

y resolviendo,

$$\frac{d\rho_1}{d\lambda_1} = -\left[\rho_1 + \frac{\rho_2 f_1'}{f_1''(\rho_2 - \rho_1)}\right] \tag{52}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\lambda_1} = -\frac{\rho_1 f_2'}{f_2''(\rho_2 - \rho_1)} \tag{53}$$

Procediendo de manera similar, o sea derivando (50) y (51)) con respecto a λ'_1, λ_2 y λ'_2, y resolviendo para las dos utilizaciones medias, se obtienen, respectivamente,

$$\frac{d\rho_1}{d\lambda'_1} = \rho_1 - \frac{f_1 - \rho_1 f_1'}{f_1'' (\rho_2 - \rho_1)} \tag{54}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\lambda'_1} = -\frac{f_2 - \rho_2 f_2'}{f_2''(\rho_2 - \rho_1)} \tag{55}$$

$$\frac{d\rho_1}{d\lambda_2} = \frac{f_1' \rho_2}{f_1''(\rho_2 - \rho_1)} \tag{56}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\lambda_2} = -\rho_2 + \frac{\rho_1 f_2'}{f_2''(\rho_2 - \rho_1)} \tag{57}$$

$$\frac{d\rho_1}{d\lambda'_2} = \frac{f_1 - \rho_1 f_1'}{f_1''(\rho_2 - \rho_1)} \tag{58}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\lambda'_2} = \rho_2 + \frac{f_2 - \rho_2 f_2'}{f_2''(\rho_2 - o_1)} \tag{59}$$

Derivando (7) y (8) con respecto a un λ genérico,

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial T_2}{\partial \lambda} = 0$$

$$\rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial \lambda} + \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial \lambda} + T_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda} + T_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda} = 0$$

de donde surge que

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} = - \frac{\partial T_2}{\partial \lambda} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)} \left[T_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda} + T_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda} \right] \qquad (60)$$

Haciendo el λ genérico sucesivamente igual a λ_1, λ'_1, λ_2 y λ'_2 y utilizando (52) a (59), se obtienen los efectos de cambios tecnológicos de distinta naturaleza sobre las cantidades de tierra asignadas a cada sector.

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1} = - \frac{\partial T_2}{\partial \lambda_1} = - \frac{\rho_1 \; T_1}{(\rho_2 - \rho_1)} - \\ - \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left[\frac{T_1 \; f_1' \; \rho_2}{f_1''} + \frac{T_2 \; \rho_1 \; f_2'}{f_2''} \right] \qquad (61)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda'_1} = - \frac{\partial T_2}{\partial \lambda'_1} = \frac{\rho_1 \; T_1}{(\rho_2 - \rho_1)} - \\ - \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left[\frac{T_1 \; (f_1 - \rho_1 \; f_1')}{f_1''} + \frac{T_2 (f_2 - \rho_2 \; f_2')}{f_2''} \right] \qquad (62)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda_2} = - \frac{\partial T_2}{\partial \lambda_2} = - \frac{\rho_2 \; T_2}{(\rho_2 - \rho_1)} + \\ + \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left[\frac{T_1 f_1' \; \rho_2}{f_1''} + \frac{T_2 \; f_2' \; \rho_1}{f_2''} \right] \qquad (63)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda'_2} = - \frac{\partial T_2}{\partial \lambda'_2} = \frac{\rho_2 \; T_2}{(\rho_2 - \rho_1)} + \\ + \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left[\frac{T_1 (f_1 - \rho_1 \; f_1')}{f_1''} + \frac{T_2 (f_2 - \rho_2 \; f_2')}{f_2''} \right] \qquad (64)$$

Utilizando (52) a (59) y (61) a (64), reordenando y completando tasas de cambio, (48) y (49) se transforman en

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{X_1} = &-\left[\frac{\rho_1}{(\rho_2-\rho_1)}+A\right]d\lambda_1 + \\ &+\left[\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}-B\right]d\lambda'_1 + \\ &+\left[-\frac{\rho_2\ T_2}{T_1\ (\rho_2-\rho_1)}+A\right]d\lambda_2 + \\ &+\left[\frac{\rho_2\ T_2}{T_1\ (\rho_2-\rho_1)}+B\right]d\lambda'_2\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}\frac{dX_2}{X_2} = &\left[\frac{\rho_1\ T_1}{T_2\ (\rho_2-\rho_1)}+\frac{K_1}{K_2}\ A\right]d\lambda_1 + \\ &+\left[-\frac{\rho_1\ T_1}{T_2\ (\rho_2-\rho_1)}+\frac{K_1}{K_2}\ B\right]d\lambda'_1 + \\ &+\left[\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}-\frac{K_1}{K_2}\ A\right]d\lambda_2 - \\ &-\left[\frac{\rho_1}{(\rho_2-\rho_1)}+\frac{K_1}{K_2}\ B\right]d\lambda'_2\end{aligned} \tag{66}$$

donde

$$\text{A} = \frac{1}{(\rho_2-\rho_1)^2}\left[\frac{T_2\ f_2'\ \rho_1}{f_2''\ T_1}+\frac{\pi^2\ f_2\ \rho_2\ f_2'}{f_1\ f_1''}\right]$$

$$B = \frac{1}{(\rho_2-\rho_1)^2}\left[\frac{T_2\ (f_2-\rho_2 f_2')}{T_1\ f_2''}+\frac{\pi^2\ f_2\ (f_2-\rho_2\ f_2')}{f_1\ f_1''}\right]$$

$$K_1 = \frac{X_1}{Y_1}\ ;\ K_2 = (1-K_1) = \frac{\pi X_2}{Y_1}$$

Reordenando (65) y (66) se obtienen

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{X_1} = &-\frac{L}{T_1\ (\rho_2-\rho_1)}\ e + \frac{\rho_2\ T}{T_1(\rho_2-\rho_1)}\ t - A\ (d\lambda_1-d\lambda_2) - \\ &-B\ (d\lambda'_1-d\lambda'_2)\end{aligned}$$

$$\frac{dX_2}{X_2} = \frac{L}{T_2(\rho_2 - \rho_1)} e - \frac{\rho_1 T}{T_2(\rho_2 - \rho_1)} t + \frac{K_1}{K_2} A (d\lambda_1 -$$

$$- d\lambda_2) + \frac{K_1}{K_2} B (d\lambda'_1 - d\lambda'_2)$$

donde

$$e = \frac{L_1 \, d\lambda_1 + L_2 \, d\lambda_2}{L}$$

$$t = \frac{T_1 \, d\lambda'_1 + T_2 \, d\lambda'_2}{T}$$

Se verifica, operando, que

$$A + B = - K_2 \, . \, \sigma_t$$

siendo σ_t la elasticidad de sustitución entre bienes en la producción medida sobre una curva de transformación, que viene dada por la expresión obtenida en [1] [16],

$$\sigma_t = - \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left[\frac{\pi^2 f_2^2}{f_1 \, f_1'' \, K_2} + \frac{f_1^2}{\pi^2 \, f_2 \, f_2'' \, K_1} \right]$$

Los efectos del cambio tecnológico sobre el ingreso agregado se obtienen a partir de (9). Diferenciando y completando tasas de cambio, se obtiene

$$\frac{dY_1}{Y_1} = K_1 \frac{dX_1}{X_1} + K_2 \frac{dX_2}{X_2}$$

que, utilizando (65) y (66) y reordenando, se transforma en

$$\frac{dY_1}{Y_1} = \left[- \frac{K_1 \, L}{T_1(\rho_2 - \rho_1)} + \frac{K_2 \, L}{T_2(\rho_2 - \rho_1)} \right] e +$$

$$+ \left[\frac{K_1 \, \rho_2 \, T}{T_1(\rho_2 - \rho_1)} - \frac{K_2 \, \rho_1 \, T}{T_2(\rho_2 - \rho_1)} \right] t$$

correspondiendo las expresiones entre corchetes a las participaciones relativas del trabajo y la tierra en el ingreso, respectivamente, de modo que

$$\frac{dY_1}{Y_1} = y_w \, e + y_r \, t$$

[16] Ver pp. 15-16.

II

Supóngase que no existe cambio tecnológico, de modo que las funciones de producción pueden escribirse

$$X_1 = T_1 f_1(\rho_1) \tag{67}$$

$$X_2 = T_2 f_2(\rho_2) \tag{68}$$

Las condiciones marginales son

$$s_1 \quad w = f_1'$$

$$s_2 \quad w = \pi f_2'$$

$$s'_1 \quad r = f_1 - \rho_1 f_1'$$

$$s'_2 \quad r = \pi (f_2 - \rho_2 f_2')$$

donde s_i y s_i' indican que el empresario paga solamente una fracción de la productividad marginal del trabajo o la tierra, siendo el resto un subsidio de modo que $s_i < 1$, $s_i' < 1$.

Inicialmente $s_i = s_i' = 1$. Si se definen

$$\frac{1}{s_i} = \lambda_i, \quad \text{y} \quad \frac{1}{s_i'} = \lambda_i',$$

las condiciones marginales se convierten en

$$w = \lambda_1 f_1' = \pi \lambda_2 f_2' \tag{69}$$

$$r = \lambda'_1 (f_1 - \rho_1 f_1') = \pi \lambda'_2 (f_2 - \rho_2 f_2') \tag{70}$$

Las condiciones (7) y (8) de ocupación plena de los recursos también se mantienen en este modelo.

Considérese ahora el efecto sobre las producciones del otorgamiento de un subsidio por utilización del factor trabajo en la primer industria, otorgado en proporción a su remuneración (o sea, $d\lambda_1 > 0$ y $d\lambda'_1 = d\lambda_2 = d\lambda'_2 = 0$).

Diferenciando (67) y (68) se obtienen

$$dX_1 = \left[f_1 \frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1} + T_1 f_1' \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda_1} \right] d\lambda_1 \tag{71}$$

$$dX_2 = \left[f_2 \frac{\partial T_2}{\partial \lambda_1} + T_2 f_2' \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda_1} \right] d\lambda_1 \tag{72}$$

Los efectos sobre las utilizaciones medias surgen de derivar (69) y (70) con respecto a λ_1 resultando

$$f_1' + f_1'' \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda_1} = \pi f_2'' \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda_1}$$

$$- \rho_1 f_1'' \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda_1} = - \pi \rho_2 f_2'' \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda_1}$$

y resolviendo

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda_1} = - \frac{\rho_2 f_1'}{(\rho_2 - \rho_1) f_1''} \tag{73}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda_1} = - \frac{\rho_1 f_2'}{f_2'' (\rho_2 - \rho_1)} \tag{74}$$

De las restricciones de recursos se obtiene

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1} = - \frac{\partial T_2}{\partial \lambda_1} =$$

$$- \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left[\frac{T_1 \rho_2 f_1'}{f_1''} + \frac{T_2 \rho_1 f_2'}{f_2''} \right] \tag{75}$$

Utilizando (73) a (75), reordenando y completando tasas de cambio, (71) y (72) se transforman en

$$\frac{dX_1}{X_1} = - A \, d\lambda_1$$

$$\frac{dX_2}{X_2} = \frac{K_1}{K_2} A \, d\lambda_1$$

con lo que queda demostrada la equivalencia entre el efecto "reducción de costos" del cambio tecnológico ahorrador de trabajo en la primer industria con un subsidio por utilización de trabajo en la primer industria, pagado en proporción a la remuneración del factor. En forma similar se demuestran las demás equivalencias.

REFERENCIAS

[1] DIÉGUEZ, H. L. y PORTO, A., *Un modelo simple de equilibrio general: acumulación de factores y variación de los términos de intercambio. Económica,* N.° 3, set.-dic. 1972, p. p. 279-310.

[2] JOHNSON, H. G., "Economic development and international trade", en *Money, trade and economic growth,* G. Allen & Unwin Ltd., London, 1962. Versión castellana en *Dinero, comercio internacional y crecimiento económico,* Rialp. Madrid, 1965.

[3] JONES, R. W., "The structure of simple general equilibrium models", *The Journal of Political Economy,* Vol. LXIII, N.° 6, December 1965.

[4] KEMP, M. C., *The pure theory of international trade,* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1964.

[5] KEMP, M. C., "*The pure theory of international trade and investment*", Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1969.

UN MODELO SIMPLE DE EQUILIBRIO GENERAL: CAMBIO TECNOLOGICO

Resumen

Se presenta un modelo simple de equilibrio general con dos factores y dos productos, estudiándose la estática comparativa de los cambios debidos al progreso tecnológico. Se distinguen los casos de economía cerrada y economía abierta. Se consideran los efectos de cambios tecnológicos de distinta naturaleza e intensidad, en uno o en los dos sectores, sobre las estructuras de producción, consumo comercio exterior y distribución de ingresos. Se interpretan conceptualmente las fórmulas matemáticas que se obtienen, mostrando las equivalencias de los distintos efectos con los originados por acumulación de factores y variación de precios (analizados en un trabajo anterior.)

A SIMPLE MODEL OF GENERAL EQUILIBRIUM TECNOLOGICAL CHANGE

Summary

A simple model of general equilibrium —two factors and two goods— is presented, analizing the comparative statics of change due to technological progress. Two cases are distinguished: a closed economy and a open one. The paper studies the effects of technological changes (considering different characteristics and intensities of such changes, in one and both sectors) on the structures of production, consumption, foreing trade, and income distribution. The mathematical expressions are conceptually interpreted, showing the equivalence with the effects due to factors accumulation and changes in the terms of trade (studied in a previosus paper).