GRADUALISMO, INEFICACIA E INESTABILIDAD CICLICA*

JULIO H. G. OLIVERA**

1. *Introducción*

Este artículo tiene por objeto ilustrar las proposiciones siguientes:

a) De la velocidad con que se avance a una meta de política económica no sólo depende el período necesario para alcanzarla, sino el que se la alcance o no en absoluto; esta proposición es válida aun con el más estricto *ceteris paribus.*

b) Además de la frustración de los fines perseguidos, una velocidad demasiado baja puede ocasionar fenómenos de fluctuación regular (i. e. no explosiva ni amortiguada) sin necesidad de cambios de orientación en la política económica.

En el tratamiento del tema surgirá asimismo, como resultado incidental, una posibilidad de ciclo de crecimiento diversa de las estudiadas por otros autores.

2. *Factores dinámicos*

Sea Y una "variable de control" en un plan económico. Denotemos con y el valor corriente de Y, con y^* el valor deseado para esa variable por la autoridad económica, con y_0 el valor inicial cuando se pone en ejecución el programa considerado. La autoridad económica se propone elevar el valor de Y desde y_0 hasta y^*, en el curso de un intervalo cuya duración es tanto mayor cuanto más gradual es el programa respectivo. Supondremos que el ajuste total del valor de Y se distribuye de manera uniforme a lo largo del tiempo:

$$y' = c > 0,$$

donde c es constante y el tilde indica derivación con respecto al tiempo.

La política económica no opera *in vacuo.* Existirá probablemente cierto nivel crítico $\tilde{y}$, más allá del cual todo aumento ulterior suscitará resistencia

* Dedico el presente artículo a la venerada memoria de mi padre, profesor Julio Olivera. Su muerte me privó de contar en este trabajo con el inestimable concurso de su opinión y consejo.

** Profesor Titular de Teoría Económica en la Facultad de Ciencias Económicas, y profesor invitado de Economía Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

por parte de grupos de intereses. Tales resistencias determinarán cierta retardación que puede suponerse proporcional al exceso sobre el nivel crítico. La aceleración neta efectiva en la región $y \geq \tilde{y}$ resultará, pues,

$$y'' = -j\ (y - \tilde{y}),\ j > 0,$$

siendo j una constante. Supondremos que $y^* > \tilde{y} > y_o$. Esto completa la descripción de nuestras hipótesis.

3. *Efectos cíclicos*

Formulemos el sistema dinámico que surge de los supuestos anteriores:

$$\begin{aligned} &y'' + j\ (y - \tilde{y}) = 0, && \text{si } y \geq \tilde{y}, \\ &y' - c = 0, && \text{si } y \leq \tilde{y}. \end{aligned}$$

En el instante inicial $y = y_o$, $y' = c$. El movimiento consecutivo está gobernado por la segunda ecuación y conduce a $\tilde{y}$. En este punto las dos ecuaciones dinámicas son iguales. El par de valores $[y = \tilde{y},\ y' = c]$ basta exactamente para determinar el sendero posterior de Y en la región $y > \tilde{y}$, bajo el imperio de la primera ecuación.

Puede suceder que el ascenso de y la lleve finalmente a y^*. Sin embargo, si la velocidad de ajuste elegida es tal que

$$(j)^{\frac{1}{2}}\ (y^* - \tilde{y}) > c$$

el valor de la variable alcanzará un máximo inferior a y^* (tanto más distante de y^* cuanto mayor la diferencia entre los miembros de la desigualdad precedente) y luego descenderá. Al cabo de un tiempo el sistema habrá regresado a $\tilde{y}$. Nuevamente se dará el par de valores $[y = \tilde{y}, y' = c]$ y se reiterará, en consecuencia, el ciclo anterior dentro de la región $y \geq \tilde{y}$. El movimiento del sistema repetirá *ad infinitum* la misma oscilación, cuya amplitud y frecuencia (es preciso notarlo) resultan independientes de y_o.

El sistema dinámico considerado verifica, pues, las dos proposiciones enumeradas en la introducción de este artículo. La desigualdad $(j)^{\frac{1}{2}}$ $(y^* - \tilde{y}) > c$ sugiere, además, que la autoridad económica debe elevar la velocidad del ajuste si se propone objetivos más ambiciosos (mayor y^*) o si las fuerzas retardatrices empiezan a operar más pronto (menor $\tilde{y}$) o acrecientan su intensidad (mayor j).

4. *Ajuste exponencial*

La alternativa inmediata de la función de ajuste $y' = c$ es la hipótesis de una tasa proporcional constante:

$$y' = h\,y\ ,\ h \text{ constante} > 0.$$

En este caso el sendero elegido para Y no es lineal sino exponencial con relación al tiempo. Conservando sin alteración las otras hipótesis el sistema dinámico resultante es

$$\begin{aligned} & y'' - h\,y' + j\;(y - \tilde{y}) = 0, && \text{si } y \geq \tilde{y}, \\ & y' - h\,y = 0, && \text{si } y \leq \tilde{y}. \end{aligned}$$

A pesar de la diferencia en el modo de ajuste, este sistema posee propiedades cualitativas similares a las del anterior. Especialmente, si

$$h^2 < 4\,j,$$

$$y^* - \tilde{y} > \frac{2\,h\,\tilde{y}}{\sqrt{4\,j - h^2}},$$

el valor de Y fluctuará regularmente entre $\tilde{y}$ como mínimo y un máximo inferior a y^*. Es decir, si la tasa proporcional de ajuste es suficientemente baja, el sistema no alcanzará nunca el valor deseado y se verá sujeto a oscilaciones permanentes. Debe observarse que la amplitud y frecuencia de estas variaciones cíclicas son constantes en el curso del tiempo. Las oscilaciones que tiende a engendrar *por sí sola* la primera ecuación no son regulares sino explosivas, pero en cambio el sistema completo presenta fluctuaciones con amplitud y frecuencia invariables.

Lo expresado en el párrafo final de la sección precedente es asimismo válido con respecto a este sistema. Más aún, si h^2 difiere poco de cero la región paramétrica considerada aquí puede describirse aproximadamente por la fórmula

$$(y^* - \tilde{y})\;(j)^{\frac{1}{2}} > h\,\tilde{y},$$

que solo difiere de la del modelo anterior en que la velocidad correspondiente al nivel crítico sustituye a la velocidad constante.

5. *Frustración e inestabilidad*

Si es constante la velocidad de ajuste, ya sea en magnitud absoluta o proporcional, la imposibilidad de alcanzar y^* se presenta juntamente con la inestabilidad cíclica. Pero puede no ocurrir lo mismo si la tasa de ajuste es variable. Ilustraré esta proposición con la hipótesis de ajuste parcial utilizada generalmente en teoría económica, que supone una proporción fija entre la velocidad de ajuste y el déficit existente con respecto al valor deseado:

$$y' = k\;(y^* - y)\;,\; 0 < k < 1,$$

donde k es una constante. El sistema dinámico completo es, de tal modo,

$$\begin{aligned} & y'' + k\,y' + j\;(y - \tilde{y}) = 0, && \text{si } y \geq \tilde{y}, \\ & y' - k\,(y^* - y) = 0, && \text{si } y \leq \tilde{y}. \end{aligned}$$

Puesto que $1 > k > 0$, y $j > 0$, la posibilidad de convergencia a y^* está completamente excluída. Solo subsisten dos posibilidades. Si $k^2 \geq 4\,j$, el sistema retorna a $\tilde{y}$ en forma "monótona" y asintótica una vez que trasciende ese valor. Por el contrario, si $k^2 < 4j$, la variable fluctúa regularmente entre $\tilde{y}$ como valor mínimo y cierto máximo inferior a y^*. El carácter amortiguado de las oscilaciones a las que tiende separadamente la primera ecuación no aparece en la solución del sistema completo. Por obra de la "barrera reflejante" $\tilde{y}$ la amplitud y frecuencia de las oscilaciones es fija.

Importa notar que la amplitud de vibración está dada por

$$A = \frac{2k(y^* - \tilde{y})}{\sqrt{4j - k^2}};$$

y, por lo tanto, dentro de la zona de inestabilidad cíclica ($k^2 < 4j$) un aumento del coeficiente de ajuste permite reducir el grado medio de frustración. Pero fuera de esa zona el margen de frustración es aproximadamente igual a $y^* - \tilde{y}$, sea cual fuere el coeficiente de ajuste. En este modelo, a diferencia de los anteriores, existe una clara relación de sustitución entre eficacia y estabilidad.

6. *Ciclos de crecimiento*

En los estudios actuales sobre fluctuaciones de la tasa de crecimiento económico suelen contemplarse las que provienen de cambios de política económica ("policy cycles"). Notaremos aquí, como una aplicación especial del análisis precedente, que una baja velocidad de ajuste puede originar ciclos de crecimiento sin que la política económica como tal experimente variación alguna. El fenómeno cíclico que nos proponemos enfocar es lo que puede llamarse ciclo *puro* de crecimiento, pues la caída de la tasa de crecimiento económico en la fase descendente no va acompañada por una contracción absoluta del producto real.[1]

Trataremos como "variable de control" a la tasa de acumulación, definida como la parte de la formación neta de capital en el producto real neto. Supongamos que dicha variable presenta la clase de oscilaciones descriptas en las secciones que anteceden. Sea X el producto real neto del sistema. Según la conocida ecuación de crecimiento

$$X' = (s/m)\, X,$$

donde s representa la tasa de acumulación y m el coeficiente marginal de capital. Es frecuente tomar s y m como parámetros fijos. Seguiremos esa práctica con respecto a m, pero, de acuerdo con lo expresado, daremos por cierto que s fluctúa con amplitud y frecuencia constantes entre dos valores positivos.

[1] Desde el punto de vista real este tipo de fluctuaciones es el que prevalece en las economías socialistas: Ver, OLIVERA (1960) y BAJT (1971).

En consecuencia, podemos reformular la ecuación de crecimiento como

$$X' = a\,(t)\,X,$$

donde a es una función positiva y continua, y tal que $a\,(t + w) = a\,(t)$ para todo instante t. Cada solución no trivial de esta ecuación[2] tiene la forma

$$X\;(t) = f\;(t)\;e^{\alpha t},$$

en la cual

$$\alpha = \frac{1}{w}\int_{0}^{w} a\;(t)\;d\,T$$

siendo f una función periódica con período w.

Claramente $a\;(t) > 0$ para todo instante t, dadas las condiciones del modelo. Si estipulamos que $X\;(0) > 0$, entonces $X\;(t) > 0$ para todo t. El ciclo bajo examen configura, pues, un ciclo puro de crecimiento. Además, la tasa proporcional de crecimiento se divide con nitidez en una componente cíclica f'/f y una componente de tendencia α.

7. *Notas comparativas*

La naturaleza del ciclo de crecimiento sobre el que trata la sección anterior resultará más evidente si se lo compara con los modelos de Phillips (1961) y Goodwin (1967). El aspecto principal que los vincula es la existencia de soluciones caracterizadas por el crecimiento cíclico. Pero el origen y carácter de las oscilaciones difieren apreciablemente. Tales diferencias nacen, a su vez, de la diversidad de las construcciones analíticas.

En el modelo formulado por Phillips la solución general para el subsistema de las variables reales no es oscilatoria. La posibilidad de fluctuaciones surge con la inclusión de la cantidad de dinero, y de los salarios y precios en dinero. Por el contrario, el ciclo de crecimiento descripto en la sección precedente se deriva sólo de causas reales.

En lo que respecta al modelo elaborado por Goodwin, un papel crucial en su comportamiento oscilatorio juega la inestabilidad de la tasa de empleo. Tal cosa no ocurre con las fluctuaciones estudiadas en la sección anterior. No hay nada en nuestro argumento que excluya la posibilidad de crecimiento cíclico con plena ocupación. Este aspecto reviste especial interés por lo que atañe a los ciclos de crecimiento en las economías colectivistas.

Aun queda otro punto por señalar. En los modelos de Phillips y Goodwin, la amplitud y frecuencia de los ciclos depende para siempre de las condiciones iniciales. Esta es una propiedad inconveniente desde el punto de vista del valor explicativo de un modelo dinámico[3]. En cambio, según lo indicamos más arriba, las fluctuaciones que hemos estado considerando se hallan libres de toda influencia duradera del estado inicial.

[2] Sobre las ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos, ver De Cesare (1969).

[3] Ver Samuelsonn (1965) p. 337.

8. *Frustración estacionaria*

A pesar de la importancia e interés del fenómeno oscilatorio, ha de subrayarse que la proposición b) enunciada en la introducción es menos general que la proposición a). En el análisis del modelo convencional de ajuste (sección 5) vimos que, para ciertos valores de los parámetros, la frustración respecto a los objetivos no va acompañada de inestabilidad cíclica. Debemos agregar ahora que lo mismo ocurre si el término $j\ (y - \tilde{y})$ reduce directamente la velocidad del proceso.

En el caso de ajuste constante, verbigracia, la velocidad efectiva será

$$y' = c - j\ (y - \tilde{y})$$

para toda $y \geq \tilde{y}$. Es obvio que si

$$c < j\ (y^* - \tilde{y})$$

la velocidad se tornará negativa antes de arribar el sistema al valor deseado y^*. El ascenso de la variable se detendrá en el momento preciso en que c iguale $j\ (y - \tilde{y})$, y su valor permanecerá estancado desde entonces al nivel que tenga en ese instante.

Desde otro punto de vista, sin embargo, el caso oscilatorio no se limita a la especificación lineal si el término en $y - \tilde{y}$ se resta de la aceleración del proceso. La representación

$$j\ (y)\ \ (y - \tilde{y})\ \ ,\ j\ (y) > 0\ \ ,\ dj/dy \geq 0\ \ ,\ y \geq \tilde{y},$$

apreciablemente más general que

$$j\ (y - \tilde{y})\ \ ,\ j \text{ constante}\ \ ,\ y \geq \tilde{y},$$

conserva todas las propiedades oscilatorias deducidas en las secciones precedentes. El interés de esta generalización radica en que la intensidad de las fuerzas retardatrices es probable que se acreciente, no sólo en magnitud absoluta sino también relativa, al aumentar el exceso de y sobre su valor crítico.

9. *Medios y fines*

La elección de la velocidad de ajuste no es enteramente discrecional para la autoridad económica. Por ejemplo, una mayor tasa de acumulación requiere que la producción de bienes de capital se expanda con relación a la de bienes de consumo. Esto puede implicar la necesidad de transferencias de recursos entre sectores. Como en la práctica la movilidad de los recursos productivos no es infinita, el ajuste considerado sólo podrá efectuarse al cabo de cierto tiempo.

Si la máxima tasa factible de ajuste es inferior a la velocidad mínima necesaria para alcanzar la meta, el instrumento o "control" elegido resulta entonces ineficaz desde el punto de vista del efecto que se desea producir sobre las variables finales. En tal caso deberá ser combinado con otros medios, o sustituído por un "control" que sea susceptible de ajustarse con la rapidez necesaria. El análisis precedente importa, de tal modo, no sólo para la decisión sobre la tasa de ajuste de cada variable instrumental sino también para la selección de estas variables.

El problema que hemos estado considerando debe distinguirse de la cuestión, ampliamente debatida, de los rezagos de la política monetaria y otros medios de regulación económica. El primero se refiere a los cambios en el valor de las variables instrumentales o "controles", mientras que la segunda alude a los efectos que tales cambios inducen en el valor de las variables finales o "estados" del sistema. Es concebible que el ajuste de las variables instrumentales sea rápido mientras que la reacción de las variables finales sea lenta, e inversamente.

En el caso de la política monetaria, por ejemplo, no hay en principio obstáculo técnico alguno para que la tasa de redescuento o los requisitos de reserva sean alterados instantáneamente en la medida que se estime necesaria, pero los efectos de una variación de esta clase sobre el conjunto de la economía no pueden desarrollarse por completo en forma inmediata. Al contrario, el ajuste del ritmo de crecimiento del producto real a una tasa mayor de acumulación de capital fijo puede lograrse en tiempo más breve, por lo general, que el indispensable para elevar dicha tasa.

10. *Procesos óptimos*

En vista de las extensas aplicaciones económicas de la teoría del control óptimo y del llamado "principio del máximo"[4], no resultará superfluo esclarecer cómo se insertan las consideraciones precedentes en ese esquema. Al mismo tiempo se presentará una forma de generalizar a cualquier número finito de variables el análisis que, en las secciones anteriores, se formuló con respecto a una sola variable instrumental.

Sea x la variable de estado y M el espacio de fase respectivo. Sea $t \rightarrow y\ (t)$ una función de control, definida sobre el intervalo $[t_o,\ t_1]$ con valores en la región de control N. Se supone que el movimiento del sistema puede representarse mediante la ecuación diferencial vectorial

$$x' = f\ (x,\ y),$$

donde f es una función definida para $x \in M$ y para $y \in N$, continua en ambos argumentos y continuamente diferenciable con respecto a x. En virtud de lo expresado anteriormente, supondremos que $t \rightarrow y\ (t)$ satisface la condición

$$[y\ (t_1) - y\ (t_o)]\ y' > [y\ (t_1) - y\ (t_o)] \int j\ (y - \tilde{y})\ d\,t,$$

en todo instante $t \in [t_o,\ t_1]$. Es decir, una función de control que no cumple este requisito no es tratada como "control admisible"[5].

[4] Ver Pontryagin *et al.* (1965) especialmente los capítulos I, II, y IV.

[5] La multiplicación por la diferencia entre el valor deseado y el valor inicial tiene por objeto generalizar la fórmula al caso en que el primero sea inferior al s egundo.

Con esta especificación, el problema del control óptimo se define ahora del modo habitual: Entre todos los controles admisibles que pueden trasladar el sistema desde un punto x_0 a un punto x_1 del espacio de fase, encontrar uno (si existe) que minimice la funcional

$$\int_{t_0}^{t_1} g\ (x\ (t),\ y\ (t))\ d\,t,$$

donde g es una función de clase C^1 sobre $M \times N$. La expresión $x\ (t)$ denota la solución de la ecuación diferencial del sistema, con $x\ (t_0) = x_0$ y control $y\ (t)$; por su parte t_1 designa el momento en que $x\ (t)$ toma el valor x_1.

La condición de admisibilidad estipulada no afecta el denominado principio del máximo, para cuya demostración sólo se requiere habitualmente que los controles admisibles sean funciones continuas a trozos (o, de modo aun más general, medibles y acotadas). Esta condición de regularidad se halla satisfecha con exceso si la función es diferenciable. Cabe recordar, por otra parte, que el principio del máximo sólo enuncia condiciones necesarias de optimalidad, pero que no garantiza la existencia de un proceso óptimo.

REFERENCIAS

Bajt, A. "Investment cycles in European socialist economies: A Review Article". *Journal of Economic Literature* 9, N.° 1 (Marzo, 1971) 53-63.

De Cesare, E. *Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y algunas cuestiones de estabilidad.* Buenos Aires: Facultad de Ciencias Económicas, 1969.

Goodwin, R. M. "A Growth cycle", en Feinstein, C. H (ed.) *Socialism, Capitalism and Economic Growth.* Cambridge: The University Press, 1967.

Olivera, J. H. G. "Cyclical economic growth under collectivism". *Kyklos* 13 (1960) Fasc. 2, 229-255.

Phillips, A. W. "A Simple model of employment, money and prices in a growing cconomy". *Economica* (Noviembre, 1961) 360-369.

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. y Mishchenko, E. F. *The mathematical theory of optimal processes,* Trad. Trigoroff, K. N. New York: Interscience Publishers, 1965.

Samuelson, P. A. *Foundations of economic analysis.* New York: Atheneum, 1965 (2.ª ed.).

GRADUALISMO, INEFICIENCIA E INESTIBILIDAD CICLICA.

Resumen

El artículo considera los efectos posibles de una baja velocidad planeada de ajuste de un instrumento de política económica, cuando éste posee un nivel crítico más allá del cual se halla sujeto a fuerzas retardatrices nacidas del medio ambiente. Se demuestra, para diferentes reglas de ajuste, que la variable considerada puede tender entonces a oscilar con amplitud constante e independiente de las condiciones iniciales, sin alcanzar nunca el valor deseado. Como aplicación se construye un modelo de crecimiento cíclico resultante de políticas gradualistas.

GRADUALISM, INEFFECTIVENESS, AND CYCLICAL INSTABILITY.

Summary

The present article considers the possible effects of a low planned rate of adjustment of a policy instrument, when the latter has a critical level beyond which it is subject to redardatory forces arising out of the environment. It is shown that, under different adjustment rules, the variable in question may then tend to oscillate steadily with amplitude and frequency independent of the initial conditions, without ever attaining the desired value. As a particular application, a model of cyclical growth resulting from gradualist policies is set up.