NOTA SOBRE EL SIGNIFICADO ECONOMICO DE LA ECUACION DE PARETO *

JORGE E. FERNANDEZ POL **

El análisis de la utilidad descansa en el supuesto fundamental siguiente: un agente económico frente a precios e ingreso total dados ocupará el lugar más elevado posible dentro de su escala de preferencias. Esta hipótesis se traduce analíticamente en el conocido problema de optimización de la Teoría de la Demanda: maximizar el índice de utilidad sujeto a la restricción de presupuesto. Si se supone que la función de utilidad es diferenciable con continuidad dos veces y la existencia de una colección de mercancías que confiere un máximo local condicionado regular, existen las funciones de demanda (definidas como solución del problema de máximo). Debe tenerse presente, sin embargo, que de la *existencia* de las funciones de demanda a su *conocimiento efectivo* hay una distancia enorme. En efecto, imponiendo ciertas condiciones de regularidad a la escala de preferencias del consumidor podremos garantizar la existencia de las funciones de demanda pero, a menos que explicitemos la *forma* de la función de utilidad no podemos conocer la de las funciones de demanda (aún en este caso la resolución explícita en forma sencilla no está asegurada). Se plantea entonces naturalmente la cuestión de inferir, cuando ello es posible, propiedades cualitativas de las funciones de demanda prescindiendo de su conocimiento efectivo [1].

* Nuestro interés por el tema analizado en esta nota, surgió de la discusión efectuada en el seminario de doctorado del Profesor OLIVERA (sobre Teoría del Valor) del apéndice matemático del Manual de PARETO. Ciertamente, el Prof. OLIVERA tenía razón al expresar que la ecuación de SLUTSKY estaba claramente implícita en el análisis de PARETO. Agradezco, asimismo, sus observaciones sobre esta nota.

** Profesor del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. Investigador en el Instituto de Investigaciones Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

1 Resulta interesante notar la analogía formal del problema planteado con el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos. Así, por ejemplo, el Método Directo de LYAPUNOV permite inferir el comportamiento cualitativo de las soluciones de un sistema diferencial *sin conocer* las soluciones explícitas del mismo.

Es en este momento cuando la ecuación de Slutsky viene en ayuda del economista. Como es bien conocido, la Ecuación Fundamental de la Teoría del Valor (así denominó el profesor Hicks a la ecuación de Slutsky) permite conocer importantes propiedades cualitativas de las funciones de demanda suponiendo que el consumidor está en una posición de máximo.

Es sorprendente notar que Pareto reconoció este problema y trató de brindar una respuesta deduciendo una ecuación que intentaba eliminar la necesidad del conocimiento de la forma de las funciones de demanda. En esta nota deseamos analizar el significado económico de la ecuación de Pareto que seguidamente pasamos a deducir.

Trataremos de resumir ahora los puntos principales que se refieren a la deducción de la ecuación mencionada anteriormente, para lo cual se introducirá una notación diferente a la utilizada por Pareto[2]. Llamaremos:

x_i: cantidad de la mercancía i (medida en unidades de cantidad por unidad de tiempo).

p_i: precio contable de la mercancía i.

$I = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \overline{x}_i$: es el ingreso del consumidor.

$u = f(x_1 : \ldots\ldots ; x_n)$: es su función ordinal de utilidad.

λ: es el multiplicador de Lagrange utilizado al maximizar el índice de utilidad f sujeto a la restricción de presupuesto.

De acuerdo a la notación anterior el conjunto de las condiciones de óptimo puede escribirse:

$$(S) \begin{cases} f_1 = \lambda \\ f_i = \lambda \cdot p_i \qquad (i = 2, \ldots\ldots, n) \\ \sum_{i=2}^{n} p_i \cdot x_i + x_1 = \sum_{i=2}^{n} p_i \cdot \overline{x}_i + \overline{x}_1 \end{cases}$$

y, además,

[2] PARETO, Vilfredo, *Manual de Economía Política*, Buenos Aires, 1945. Todo aquél que haya dispuesto de la paciencia y el tiempo indispensables para estudiar el apéndice matemático del Manual habrá comprobado que la notación empleada por PARETO exige una gimnasia mental poco recomendable.

$$(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p_2 & \cdots\cdots & p_n \\ 1 & f_{11} & f_{12} & \cdots\cdots & f_{1n} \\ p_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots\cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots\cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

es definida negativa [3], donde, como es habitual, el subíndice indica el argumento en la diferenciación parcial. Una vez hecho esto (ver ecuaciones (51), (68)), Pareto procede a efectuar el análisis de estática comparada. Para ello, considera, en primer término, el efecto de un cambio del precio de la mercancía j sobre la demanda de la mercancía i poniendo su atención en un *subconjunto propio* de las condiciones de primer orden y no en el sistema completo.

Diferencia entonces las n primeras ecuaciones del sistema (S) con respecto a p_j, obteniendo el siguiente conjunto de ecuaciones lineales [4]:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots\cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots\cdots & f_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots\cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial p_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_j} \\ \vdots \\ p_j \cdot \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_j} + \lambda \\ \vdots \\ p_n \cdot \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_j} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

3 Conviene recordar que ambas condiciones satisfechas conjuntamente garantizan la existencia de un máximo local propio condicionado.

4 Se observa que la matriz que premultiplica al vector de respuesta o de los cambios inducidos (utilizamos aquí la terminología introducida por el profesor OLIVERA) no es otra cosa que la matriz hessiana asociada a la función de utilidad u.

Supone que (f_{ij}) es regular y resuelve el sistema (2) obteniendo (ecuación (71) del Manual):

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \lambda \cdot \frac{H_{ij}}{H} + \frac{H_i}{H} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_j}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots\ldots, n \\ j = 2, \ldots\ldots\ldots, n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

donde $H = |f_{ij}|$, H_{ij} el cofactor de f_{ij} en H y H_i es el determinante que se obtiene de reemplazar en H la i – ésima columna por la colección de precios 1, $p_2, \ldots\ldots, p_n$.

Es recién ahora cuando Pareto diferencia la restricción de presupuesto con el objeto de obtener como "valor residual", por así decirlo, el efecto del cambio del precio de la mercancía j sobre la utilidad marginal del dinero (o más precisamente, la utilidad marginal del ingreso)

$$\sum_{i=2}^{n} p_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_1}{\partial p_j} = -(x_j - \overline{x}_j), \qquad (4)$$

o también,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = -\frac{(x_j - \overline{x}_j) \cdot H}{D} - \lambda \cdot \frac{D_j + 1.1}{D} \cdot j = 2, \ldots, n \qquad (5)$$

Llegado a este punto, pasemos a analizar el significado económico de la ecuación (3). Notemos, en primer lugar, que la misma proporciona el efecto de un cambio del precio de la mercancía j sobre la demanda de la mercancía i. Pero todavía podemos avanzar un paso más, si tenemos en cuenta que, cuando la utilidad marginal del dinero es constante, resulta

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\lambda = \overline{\lambda}} = \overline{\lambda} \cdot \frac{H_{ij}}{H}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n \\ j = 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n \end{pmatrix} \qquad (6)$$

es decir, el primer término del segundo miembro de la ecuación (3) representa el efecto de un cambio del precio de la mercancía j sobre la demanda de la mercancía i *cuando la utilidad marginal del dinero permanece constante*. Denominaremos a la expresión (6) *efecto Marshall*.

Teniendo esto en cuenta, la ecuación (3) puede escribirse:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{H_i}{H} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\lambda = \overline{\lambda}} \cdot \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots\ldots, n \\ j = 2, \ldots\ldots\ldots, n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

En honor a su descubridor, llamaremos a la ecuación (7) *ecuación de Pareto*. Nos dice que cuando varía el precio de la mercancía j se produce un cambio en la demanda de una mercancía cualquiera i, el cual puede descomponerse en dos efectos: el efecto residual y el efecto Marshall.

Nada sabemos con respecto al signo del efecto residual

$$\frac{H_i}{H} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} \tag{8}$$

Sin embargo, pueden enunciarse algunas propiedades referentes al efecto Marshall. A partir de (6), se tiene:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right)_{\lambda = \bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \cdot \frac{H_{ij}}{H} = \bar{\lambda} \cdot \frac{H_{ji}}{H} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \right)_{\lambda = \bar{\lambda}} \tag{9}$$

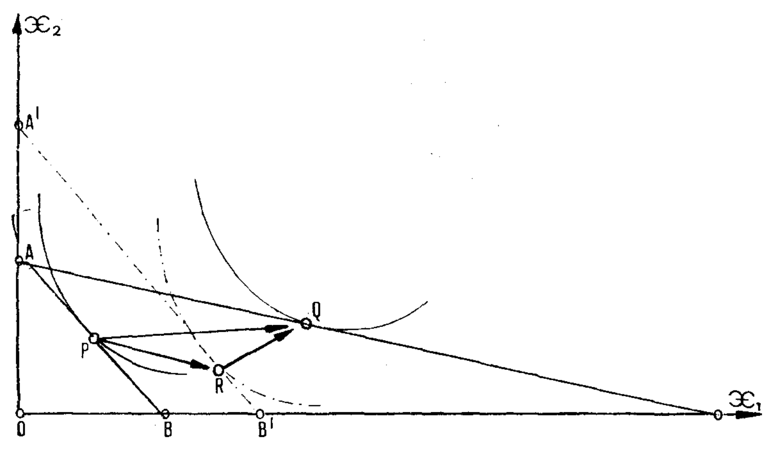
es decir, el efecto Marshall es simétrico. Por otra parte, el efecto Marshall puro (i = j) es negativo cuando la matriz (f_{ij}) es definida negativa (propiedad que se satisface automáticamente si la función de utilidad es separable siendo todas las utilidades marginales decrecientes)

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right)_{\lambda = \bar{\lambda}} < o. \tag{10}$$

Puede verificarse también que

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ij} \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right)_{\lambda = \bar{\lambda}} = \lambda \cdot \qquad j = 2, \ldots\ldots, n. \tag{11}$$

Ilustraremos ahora el significado geométrico de la ecuación de Pareto, advirtiendo desde el principio que se trata sólo de una interpretación heurística que ayuda a la intuición.



Supongamos que a partir de una situación inicial de equilibrio P disminuye el precio de la mercancía 1, [5] permaneciendo constantes el ingreso y el precio de la mercancía 2, ajustándose la utilidad marginal del dinero de tal manera que el agente económico considerado alcance una nueva posición de equilibrio Q. La ecuación de Pareto (7), simplemente, explica que el paso de P a Q puede descomponerse en dos efectos parciales: el tránsito de la situación P a R que *corresponde* al efecto Marshall y el paso de R a Q *equivalente* al efecto residual. Debe observarse que al considerar el efecto Marshall se ha tenido en cuenta que, cuando la utilidad marginal del dinero permanece constante, resulta

$$\frac{\partial u}{\partial I} = u_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} + u_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} = \bar{\lambda} \cdot \qquad (12)$$

La fórmula (12) indica que cuando $\lambda = \bar{\lambda}$ (utilidad marginal del dinero constante) uno de los bienes es inferior. De ahí entonces que en el diagrama el paso de P a R entraña una disminución de la cantidad demandada de la mercancía 2 y un aumento de la mercancía 1 (naturalmente, podría presentarse el caso donde la escala de preferencias del consumidor fuera tal que aumente la cantidad de la mercancía 2 y disminuya la demanda de la mercancía 1).

Efectuaremos seguidamente algunas observaciones finales. En primer término debe notarse que si Pareto hubiese derivado conjuntamente con las n primeras ecuaciones del sistema (S) la restricción de presupuesto, cosa sorprendente, *hubiera obtenido la Ecuación Fundamental de la Teoría del Valor*. El obrar de la manera indicada anteriormente, lo obliga a introducir una hipótesis adicional: la no singularidad de la matriz hessiana de la función de utilidad. Efectivamente, este supuesto *no es necesario* para que la matriz (D) sea definida negativa. Finalmente, conviene notar que, la ecuación de Pareto *no es invariante* frente a una transformación monótona creciente del índice de utilidad f. Esto es fácil de ver si se recuerda que la utilidad marginal del dinero depende del índice particular de utilidad seleccionado.

[5] En la formulación analítica precedente se supuso que la mercancía 1 actuaba como numerario, sin embargo, por razones de claridad expositiva, se ha elegido ahora otro bien como numerario.

NOTA SOBRE EL SIGNIFICADO ECONOMICO DE LA ECUACION DE PARETO

Resumen

El propósito de esta nota es brindar una interpretación económica de la ecuación que Pareto presenta en su *Manual* y puntualizar algunas propiedades cualitativas de los términos en que puede dividirse. En particular, demuentro que el efecto total de un cambio en un precio p_j sobre la demanda de una mercancía cualquiera x_i puede descomponerse en dos partes que denomino *efecto residual* y *efecto Marshall*. Presento asimismo una interpretación geométrica de estos términos y analizo, finalmente, algunas propiedades cualitativas del efecto Marshall.

NOTE ON THE ECONOMIC MEANING OF PARETO'S EQUATION

Summary

The purpose of this note is to provide an economic interpretation of Pareto's equation given in this *Manual* and to point out some qualitative properties of the terms in which we can split it up. Particularly I show that the total effect of a change in a price p_j on the demand of any good x_i can be broken up into two parts called *residual effect* and *Marshall effect.* I give a geometric interpretation of these terms and I analyse, finally, some qualitative properties of the latter effect.