EL APRENDIZAJE POR LA EXPERIENCIA Y LA ESTRATEGIA OPTIMA DE PRODUCCION PARA LA EMPRESA *

CARLOS ALFREDO RODRIGUEZ * *

En 1962, Keneth J. Arrow sugiere una explicación endógena al contravertido fenómeno del cambio tecnológico y que él denomina "Learning by Doing". Según esta hipótesis, parte al menos de los incrementos en la eficiencia del proceso productivo son atribuíbles a un proceso de aprendizaje cuya fuente es la experiencia en la realización de actividades productivas. Posteriormente David Levhari y Eytán Sheshinski adoptan la hipótesis de Arrow y la aplican a sendos modelos de crecimiento.[1] Los tres autores mencionados enfocan el problema desde el punto de vista macroeconómico y obtienen interesantes conclusiones referidas a la divergencia entre la productividad privada y social del capital, soluciones impositivas y tasas de acumulación óptimas.

Analizaremos en este trabajo algunas de las implicaciones del fenómeno de "Learning by Doing" para la unidad microeconómica de producción. Nuestro objetivo será obtener la estrategia óptima de producción para una empresa maximizadora de beneficios cuando ésta se enfrenta a un proceso de mejoramiento en la eficiencia derivado del ejercicio de su propia actividad productiva.

Si el proceso productivo puede ser representado por una función de producción, definiremos el nivel de eficiencia del mismo

* El autor agradece los comentarios y sugerencias del Doctor Rolf R. MANTEL.

** Asistente de investigación. Centro de Investigaciones Económicas, Instituto Torcuato Di Tella.

1 ARROW, K. J. "The Economic Implications of Learning by Doing", en: *The Review of Economic Studies*, Vol. 29, 1962.
LEVHARI. D., "Extensions of Arrow's Learning by Doing", en: *The Review of Economic Studies,* Vol. 33, 1966.
SHESHINSKI, E., "Optimal Accumulation with Learning by Doing", en: Essays on the Theory of Optimal Economic Growth, Editor: Karl Shell, M.I.T. Press, 1967.
SHESHINSKI, E., "Tests of the Learning by Doing Hipothesis". en: *Review of Economics and Statistics,* Vol. 49, Nov. 1967.

como un número positivo que multiplica a la función, de forma tal que cuanto mayor sea ese número, mayor será la cantidad de producto que puede obtenerse para idéntico uso de insumos. El supuesto básico será que el nivel de eficencia es una función creciente de la experiencia de la empresa. En nuestro caso mediremos la experiencia por el volumen de producción acumulado a través del tiempo con lo cual el nivel de eficiencia será una función creciente de la producción acumulada. En otros términos, nuestros supuestos son:

$$X(t) = A(t)\,F[K(t), L(t)]$$

$$A(t) = G[\int_0^t X(\tau)\,d\tau]$$ donde:

$X(t)$: Producción
$K(t)$: Servicios del Capital
$L(t)$: Servicios del Trabajo
$A(t)$: Nivel de eficiencia.

Añadiremos un supuesto más: el nivel de eficencia está acotado inferior y superiormente. Esto significa que cuando la empresa se instala puede comenzar a operar con un nivel de eficiencia dado, que asumiremos igual a uno. A partir de ese momento irá adquiriendo experiencia a medida que produce y con ello, aumentando su eficiencia; pero ese proceso tendrá un límite a partir del cual la eficiencia no crecerá más, independientemente de que se continúe acumulando o no experiencia. A ese nivel máximo de eficiencia lo denominaremos A_m. Esta hipótesis de aprendizaje difiere en parte con la adoptada por los autores antes mencionados en el sentido de que para ellos el aprendizaje por la experiencia puede ser una fuente de generación ilimitada de cambio tecnológico en tanto que en nuestro caso, al poner un tope al nivel alcanzable de eficiencia, estamos limitando las posibilidades del proceso de aprendizaje. Creemos que esta hipótesis se adapta mejor que la de un aprendizaje ilimitado, al menos al nivel de la empresa, pues de lo contrario se presentaría el caso en el cual los costos tenderían a ser nulos por el solo hecho de que la empresa alcanzara un volumen considerable de producción en el pasado, lo cual es bastante difícil que se verifique en el mundo real.

Si bien con ello limitaremos la generalidad de los resultados, deberemos establecer una función particular de "aprendizaje" de la siguiente forma:

$$A\ (t) = A_m - (A_m - 1)\ \exp\left[-a \int_0^t X\ (\tau)\ d\ (\tau)\right]$$

Esta función tiene la característica de que toma un valor 1 para un valor nulo de experiencia y A_m para un monto infinito de la misma, tomando valores entre 1 y A_m para los restantes valores positivos de experiencia.

Supondremos que la empresa se comporta como maximizadora de beneficios y por lo tanto debemos establecer las características de sus funciones de demanda y costos. La curva de demanda a la que se enfrenta la empresa puede representarse en la forma $P = P\ (X)$ con $P' < 0$; el ingreso total será $I\ (X) = X \cdot P\ (X)$ con $I' > 0$ y $I'' < 0$,[2] ambos supuestos usuales en economía.[3]

Podemos obtener la función de costos de la empresa sobre la base de las funciones de producción y de oferta de factores. Es un problema de mínimo con restricciones que puede resolverse utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$\text{Min.}\left\{ W\ (L)\ L + r\ (K)\ K - \lambda\ [A^\circ\ F\ (K\ ,\ L) - X^\circ] \right\}$$

Las condiciones necesarias para un mínimo son:

$$L \cdot W' + W - \lambda A^\circ F_L = 0$$
$$K r' + r - \lambda A^\circ F_K = 0$$
$$F\ (K,\ L) = \frac{X^\circ}{A^\circ}$$

Eliminando λ tenemos:

$\dfrac{LW' + W}{Kr' + r} = \dfrac{F'_L}{F'_K}$ y $F\ (K\ ,\ L) = \dfrac{X^\circ}{A^\circ}$, o sea dos ecuaciones en dos incógnitas, K y L . Suponiendo que el sistema puede ser resuelto y que se cumplen las condiciones suficientes para un mínimo, se obtienen los valores de las incógnitas en función de $\dfrac{X^\circ}{A^\circ}$, o sea:

$$L^\circ = L\ \left(\frac{X^\circ}{A^\circ}\right) \quad y \quad K^\circ = K\ \left(\frac{X^\circ}{A^\circ}\right)$$

por lo tanto, para cada valor de X/A, la empresa demandará factores conforme a las siguientes relaciones:

2 Se supone que I' e I'' son funciones continuas en X.

3 Puede suponerse, sin que resulte afectada ninguna de nuestras conclusiones, que I' es positivo hasta un cierto valor de X a partir del cual se vuelve negativo.

$$L = L\left(\frac{X}{A}\right) \quad y \quad K = K\left(\frac{X}{A}\right)$$

La función de costo total será entonces: [4]

$$(1) \quad C = W\left[L\left(\frac{X}{A}\right)\right] L\left(\frac{X}{A}\right) + r\left[K\left(\frac{X}{A}\right)\right] K\left(\frac{X}{A}\right) = C\left(\frac{X}{A}\right)$$

Si se presentan las condiciones que son de esperar para las variables económicas que estamos tratando, la función de costos presentará las siguientes características:

$$\frac{\delta C}{\delta\left(\frac{X}{A}\right)} = C' > 0 \quad ; \quad \frac{\delta^2 C}{\delta\left(\frac{X}{A}\right)^2} = C'' > 0$$ [5]

Tenemos ya todas las variables necesarias para resolver nuestro objetivo, que puede enunciarse de la siguiente forma:

> Determinar el volumen de producción en cada momento del tiempo de forma tal que se maximice el valor actual de la corriente de beneficios a obtener entre el momento cero e infinito, cuando el nivel de eficiencia del proceso productivo depende del monto acumulado de producción.

El problema puede plantearse como sigue:

$$\text{máx.} \int_0^{\infty} \left\{ I\left[X(t)\right] - C\left[\frac{X(t)}{A(t)}\right]\right\} e^{-\delta t}\, dt$$

$$\text{s.a}: \qquad \dot{A} = \alpha\, X(t)\left[A_m - A(t)\right]$$

$$X(t) \gtreqless 0 \quad , \quad \text{dadas las condiciones iniciales} \begin{cases} A(0) = 1 \\ X(0) = \text{a determinar} \end{cases}$$

El valor actual de la futura corriente de beneficios (representado por la integral a maximizar) es calculado sobre la base de una tasa $\delta > 0$ de descuento, que representa la tasa de preferencia en el tiempo de la empresa. La ecuación diferencial que aparece como restricción es la derivada respecto al tiempo de la función de aprendizaje planteada anteriormente, o sea:

[4] A fin de simplificar la formulación matemática hemos supuesto que no existen costos fijos. El modelo puede ser extendido de forma tal que abarque ese caso.

[5] Ambas derivadas se suponen continuas en X y A.

$$\dot{A} = \frac{d}{dt} \left\{ A_m - (A_m - 1) \exp. \left[- a \int_0^t X(\tau)\, d\tau \right] \right\}$$

$$= a\, X(t) \left[A_m - A(t) \right]$$

La restricción de no negatividad indica que el volumen de producción no puede tomar valores negativos.

Para resolver este problema —hallar la trayectoria en el tiempo de la variable X que maximiza la integral sujeta a las restricciones— formamos el Hamiltoniano del sistema: [6]

$$H\ (X, A, \lambda, t) = e^{-\delta t} \left\{ \left[I\ (X) - C\ (\frac{X}{A}) \right] + \lambda \left[a\, X(A_m - A) - \dot{A} \right] \right\}$$

Derivando el Hamiltoniano respecto de sus variables obtenemos las condiciones necesarias que debe cumplir dicha trayectoria: [7]

$$(2) \qquad e^{-\delta t}\ \frac{\delta H}{\delta X} = I' - C_X + \lambda\, a\ (A_m - A) \leqq 0 \qquad [8]$$

$(= \text{si } X > 0)$

$$(3) \qquad e^{\delta t}\ \frac{\delta H}{\delta A} = \dot{\lambda} - \lambda\ (a\ X + \delta) - C_A = 0$$

$$(4) \qquad e^{\delta t}\ \frac{\delta H}{\delta \lambda} = a\ X\ (A_m - A) - \dot{A} = 0$$

y la condición de transversalidad $\lim_{t \to \infty} e^{-\delta t} \lambda_t = 0$

A fin de poder utilizar la condición (2) como igualdad para, junto con (3) y (4), obtener el plan óptimo, debemos demostrar

[6] Por brevedad suprimimos el símbolo (t) en las variables, pero se supone que las mismas son funciones del tiempo.

[7] Una presentación formal del método utilizado a continuación puede verse en: DORFMAN, R.. An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", en: *The American Economic Review,* Vol. 59, Diciembre 1969.

[8] Es: $C_X = \frac{C'}{A} > 0;\ C_A = -C' . \frac{X}{A^2} < 0;\ C_{XX} = \frac{C''}{A^2} > 0$

$$C_{XA} = -C'' \frac{X}{A^3} - \frac{C'}{A^2} < 0$$

que de tomar éste algún valor positivo en algún momento del tiempo, deberá ser positivo siempre. Esto anula la posibilidad de que $X^*(t)$[9] sea nulo en algún intervalo de tiempo con lo cual la condición (2) podría valer como desigualdad. Dicha demostración es posible y se realiza en el Apéndice. Por lo tanto sabemos que si ha de existir un plan óptimo distinto de $X^*(t) = 0$, el mismo debe ser obtenido de la resolución del sistema (2), (3) y (4) considerando a (2) como igualdad.

Suponiendo que el sistema puede ser resuelto, tenemos que la ecuación (2) determina el volumen de producción que cumple con las condiciones necesarias para cada par de valores de A y de λ, representando esta última el precio de la eficiencia asignada por el programa. Obtenido de allí el valor de X, las ecuaciones (3) y (4) determinan el comportamiento dinámico del sistema. En otras palabras, para cada $\lambda(0)$ (pues $A(0) = 1$) el sistema (2), (3) y (4) determina un programa de producción $X[\lambda(0), t]$ que cumple con las condiciones necesarias. En particular puede verse, dadas las características de las curvas de costos e ingresos marginales, que cuanto mayor sea el valor de $\lambda(0)$ que se establezca, mayor deberá ser el volumen de producción en el momento cero, o sea:

$$\frac{\delta X[\lambda(0), 0]}{\delta \lambda(0)} > 0$$

La interpretación económica de lo anterior es la siguiente: cuanto más interés tenga el empresario en incrementar la eficiencia, más alto será el precio que le asigne originariamente. A consecuencia de eso, la valuación de la contribución marginal de X a la producción de eficiencia ($\lambda\alpha$ $(A_m - A)$ será mayor y también deberá serlo el valor de X para que la ecuación (2) se cumpla. Al ser mayor el volumen de producción, también será mayor la creación de eficiencia, cumpliéndose así los deseos del empresario. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que también será mayor la diferencia entre las curvas de costo e ingreso marginal y por lo tanto mayor la cantidad de beneficios que se deja de ganar en ese momento.

Hasta ahora hemos hallado las funciones $X[\lambda(0), t]$ que cumplen con las condiciones necesarias para cada valor de $\lambda(0)$ que se establezca. Lo que debe buscarse ahora es el valor de $\lambda(0)$

[9] Utilizamos el asterisco para designar la trayectoria óptima.

tal que la trayectoria represente un máximo absoluto para el valor actual de los beneficios. A ese valor óptimo de λ (0) lo denominaremos λ^* (0) y a la trayectoria óptima por él determinada $X[\lambda^*(0), t] = X^*(t)$, la cual será la solución de nuestro problema. Dicha trayectoria deberá cumplir con la condición:[10]

$$(5) \qquad \int_0^\infty B[X^*(t)]\, e^{-\delta t} dt > \int_0^\infty B\,[X^*(t) + f(t)]\, e^{-\delta t} dt$$

para cualquier f(t) distinto de cero al menos para algún t. Nuestro siguiente paso consiste en averiguar cuál es la trayectoria entre las $X[\lambda(0), t]$ que cumple con la condición (5). Supondremos que el óptimo existe, por lo tanto, si podemos eliminar todas las $X[\lambda(0), t]$ menos una por no ser óptimas en el sentido indicado por (5), esa será la solución buscada.

Para tal fin procederemos a realizar una transformación del sistema (2), (3) y (4) que nos permita construir un diagrama de fases y así visualizar las principales características de las posibles trayectorias. La transformación consiste en eliminar λ del sistema, lo cual nos lleva, como se verá, a un sistema de dos ecuaciones diferenciales, $\dot{X}(X,A,t)$ y $\dot{A}(X,A,t)$, con las cuales es posible construir el diagrama de fases.

Derivando la ecuación (2) respecto al tiempo tenemos:

$$(6) \qquad \dot{\lambda} = X\,(C_{XX} - I'')\,\frac{\dot{X}}{\dot{A}} + X\,C_{XA} + \frac{a\,X^2}{\dot{A}}\,(C_X - I')$$

(utilizando (4)

[10] Es: $B\,[X(t)] = I\,[X(t)] - C\left[\dfrac{X(t)}{A(t)}\right]$

con $A(t) = A_m - (A_m - 1)\exp\left[-a\int_0^t X(\tau)\,d\tau\right]$

Reemplazando (2) en (3) y usando (4) es:

$$(7) \qquad \dot{\lambda} = \frac{X}{\dot{A}} (C_X - I') \; (\delta + \alpha X) + C_A$$

Igualando (6) y (7) tenemos:

$$(C_{XX} - I'') \dot{X} - \delta (C_X - I') - (C_A - X C_{XA}) \frac{\dot{A}}{X} = 0$$

Realizando las operaciones puede verse que $C_A - X C_{XA} = \frac{X^2}{A} C_{XX}$,

por lo tanto queda:

$$(8) \qquad \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\delta}{X} \left(\frac{C_X - I'}{C_{XX} - I''}\right) + \frac{C_{XX}}{C_{XX} - I''} \cdot \frac{\dot{A}}{A} \text{ junto con:}$$

$$(9) \qquad \frac{\dot{A}}{A} = \alpha X \cdot \frac{(A_m - A)}{A}$$

Ambas ecuaciones determinan las trayectorias de X que cumplen con las condiciones necesarias para par de valores iniciales $X(0)$ y $A(0)$. Nuevamente aquí también es $A(0) = 1$ por lo que dependerán exclusivamente del valor $X(0)$. A cada una de dichas trayectorias la denominaremos $X[X(0), t]$. Respecto de las trayectorias $X[\lambda(0), t]$ obtenidas anteriormente puede verse, utilizando la ecuación (2) que: $X[X(0), t] \equiv X[\lambda(0), t]$ siempre que sea:

$$\lambda(0) = \frac{C_X [X(0), 1] - I' [X(0)]}{\alpha (A_m - 1)}$$

A fin de construir el diagrama de fases que permita visualizar las distintas relaciones entre X y A para cada trayectoria, procederemos a obtener las curvas de soluciones estacionarias para cada una de las funciones (8) y (9). Respecto de la curva $\frac{\dot{X}}{X} = 0$ supondremos en este caso que $C_{XX} = 0$ ó constante, ya que de lo contrario deberíamos interpretar las derivadas de tercer orden de la función de costos, las cuales difícilmente tengan algún sentido económico. Por supuesto, también puede suponerse que dichas derivadas son lo suficientemente pequeñas como para no afectar las características principales de la solución que se obtenga sin considerarlas, incluyendo la posibilidad de que sus signos sean los necesarios para conservarlas.

Igualando a cero la ecuación (8) con $C_{XX} = 0$ y derivando respecto de A es:

$$- I'' \frac{dX}{dA} + C_{XA} = 0$$

$$\therefore \left. \frac{dX}{dA} \right|_{\frac{\dot{X}}{X} = 0} = \frac{C_{XA}}{I''} > 0$$ [11]

En particular, para funciones lineales de costos e ingresos marginales sería:

$$C\left(\frac{X}{A}\right) = a \cdot \frac{X}{A} \; ; C_X = \frac{a}{A} \; ; C_{XA} = - \frac{a}{A^2} \; ; C_{XX} = 0$$

$$I(X) = bX - cX^2 \; ; I' = b - 2cX \; ; I'' = -2c$$

Luego:

$$\left. \frac{dX}{dA} \right|_{\frac{\dot{X}}{X} = 0} = \frac{a}{2cA^2} > 0$$

$$\left. \frac{d^2X}{dA^2} \right|_{\frac{\dot{X}}{X} = 0} = \frac{a}{cA^3} < 0$$

Si el segundo término de (8) es nulo, para $t = 0$ el valor de $X(0)$ que verifica $\frac{\dot{X}}{X} = 0$ es $X^0(0)$ tal que $C_X [X^0(0), 1] = I' [X^0(0)]$.[12]

Asimismo, para $t = \infty$ es $A = A_m$ y por lo tanto el valor de X que varifica $\frac{\dot{X}}{X} = 0$ es $X^0(\infty)$ tal que $C_X[X^0(\infty), A_m] = I' [X^0(\infty)]$.

11 El suponer C_{xx} constante, no altera las características esenciales de esta curva. Realizando las operaciones, sería:

$$\left. \frac{dX}{dA} \right|_{\frac{\dot{X}}{X} = 0} = \frac{\alpha X^2 C_{XX} - \delta [A C_{XA} + C_X - I']}{\delta A (C_{XX} - I'') + 2 \alpha X C_{XX}}$$

Por la ecuación (8) se ve que para $\frac{\dot{X}}{X} = 0$ es $C_x - I' < 0$, por lo tanto,

$$\left. \frac{dX}{dA} \right|_{\frac{\dot{X}}{X} = 0} > 0$$

12 Si es $C_{XX} \neq 0$ el valor $X^0(0)$ será el que cumple con:

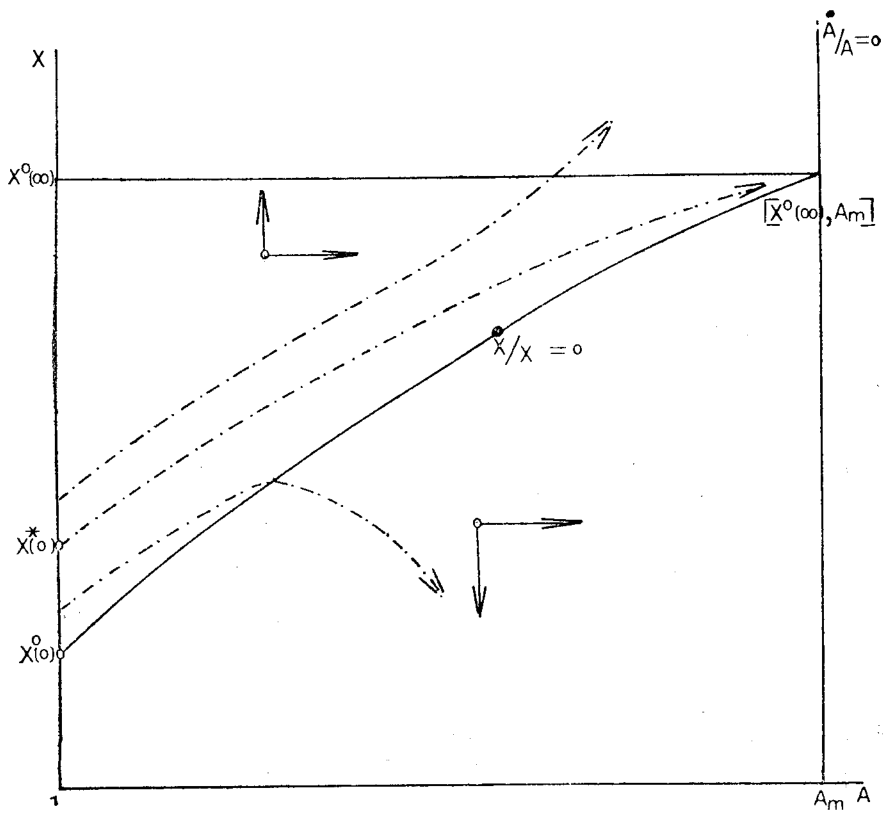
$$C_X [X^0(0)\, 1] = I' [X^0(0)] - \frac{[X^0(0)]^2}{\delta} C_{XX} [X^0(0), 1] \, \alpha \, (A_m - 1)$$

Obsérvese que ese valor $X^0(\infty)$ es invariante respecto de los supuestos hechos acerca de C_{XX} pues para $t = \infty$ es $\frac{\dot{A}}{A} = 0$ y el segundo término de (8) se anula de cualquier forma.

Tenemos entonces para la curva $\frac{\dot{X}}{X} = 0$ todos los datos necesarios para ubicarla en el plano (X, A), o sea la primera y segunda derivada y dos puntos: $[X^0(0), 1]$ y $[X^0(\infty), A_m]$

La curva $\frac{\dot{A}}{A}$ será igual a cero sólo para $A = A_m$ (siempre que se cumpla $X(t) > 0$). Ambas curvas se detallan en el Gráfico 1.

GRAFICO I



La dirección de las flechas (que indican la dirección de las trayectorias de las variables en cada zona) se obtiene derivando las curvas $\frac{\dot{X}}{X}$ y $\frac{\dot{A}}{A}$ respecto de sus argumentos.

Puede verse en el gráfico que existe una solución estacionaria para X y A., representada por el punto $[X^0(\infty), A_m]$

Volviendo a las trayectorias $X[X(0), t]$, sólo una de ellas convergirá hacia el punto $[X^0(\infty), A_m]$. A esa trayectoria la denominaremos $X[X^*(0), t]$. El valor de $X^*(0)$ puede obtenerse haciendo $t = \infty$, con lo cual tenemos $X[X^*(0), \infty] = X^0(\infty)$, de donde puede despejarse $X^*(0)$. De las características dinámicas del sistema se ve que debe ser $X^0(0) < X^*(0) < X^0(\infty)$ pues de otra manera la trapectoria $X[X^*(0), t]$ nunca podría convergir hacia el punto $[X^0(\infty), A_m]$. Puede verse que, tomando como base $X[X^*(0), t]$, las restantes trayectorias quedan divididas en dos grupos:

I) $X[X(0), t]$ tal que $X(0) > X^*(0)$. En éstas X tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito.

II) $X[X(0), t]$ tal que $X(0) < X^*(0)$. En este grupo X decrece continuamente, llegando a cero en algún momento t finito.

La forma aproximada de ambos grupos de trayectorias en el plano (X , t) se indica en el Gráfico 2.

Si demostramos que tanto las trayectorias del grupo I como las del II no pueden ser óptimas en el sentido indicado por (5), la única trayectoria restante, $X[X^*(0), t]$, deberá ser la óptima (dado el supuesto de que el óptimo existe).

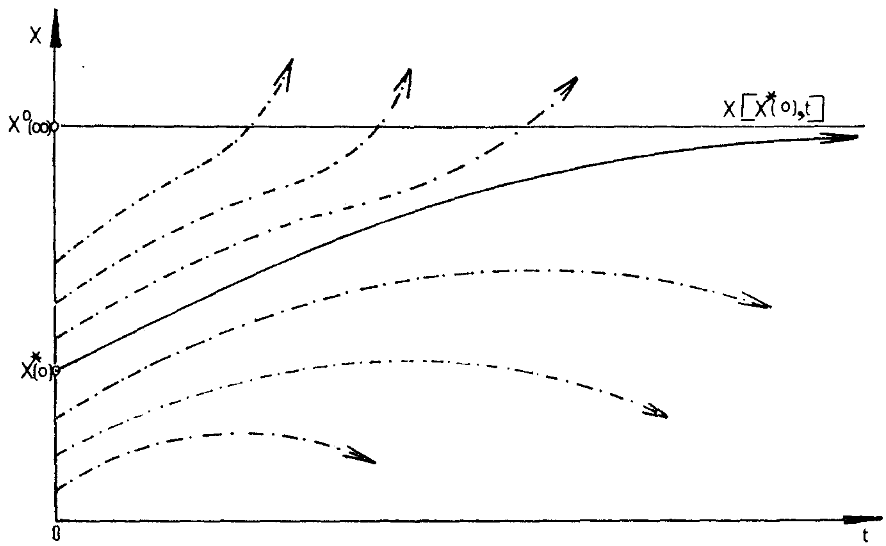
No optimalidad de las trayectorias del grupo I

Para cualquiera de ellas debe ser $\int_0^\infty B[X(t)]\, e^{-\delta t} dt > 0$ pues si fuera $\leqslant 0$ directamente convendría no producir dado que

$$\int_0^\infty B[0] e^{-\delta t} dt = 0$$

Analizando las curvas de costos e ingresos totales de la empresa, supondremos que para $A = A_m$ existe un valor $X = \overline{X}$ tal que cualquier incremento en el volumen de producción a partir del mismo arroja beneficios negativos. Algunos ejemplos gráficos podrían ser: [13]

GRAFICO II



[13] Formalmente, el supuesto anterior implica:

$$\frac{\delta^2 B(X)}{\delta X^2} = I'' - C_{xx} = B''(X) \leqq -\epsilon, \text{ para un cierto } \epsilon \text{ constante}$$

y positivo. Ello puede verificarse integrando ambos miembros dos veces consecutivas a fin de llevar la restricción al nivel del beneficio total:

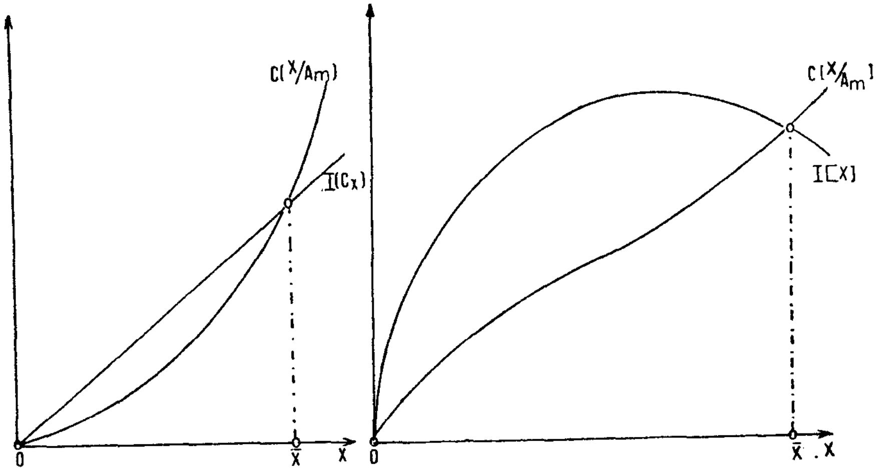
$$\int_0^x B''(X)\, dX = B'(X) - B'(0) \leqq -\epsilon X$$

$$\int_0^x [B'(X) - B'(0)]\, dX = B(X) - B(0) - X B'(0) \leqq -\frac{\epsilon X^2}{2}$$

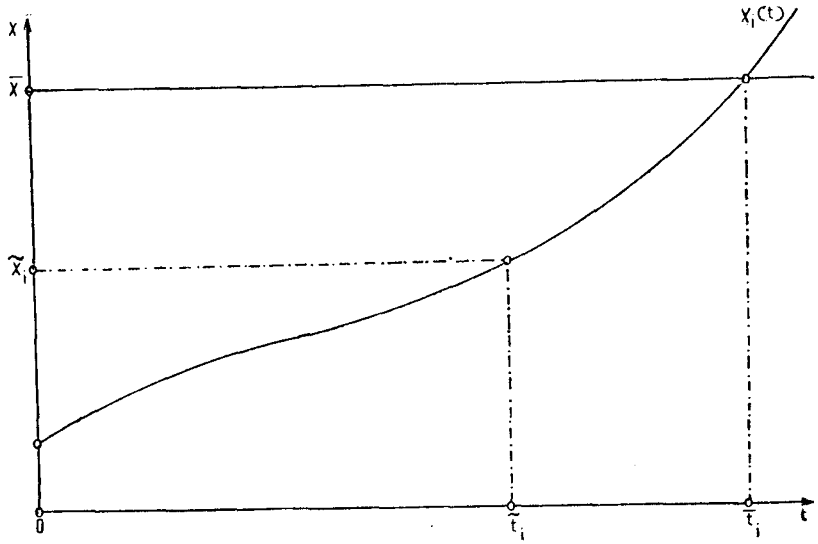
$$\text{y: } B(X) \leqq B(0) + X B'(0) - \frac{\epsilon X^2}{2}$$

Como ϵ está dado, a partir de cierto $\overline{X}$ el lado izquierdo de la inecuación será cero y por lo tanto $B(\overline{X}) \leqq 0$ y $B[\overline{X} + \Delta X] < 0$.

Asimismo, para $A < A_m$ (o sea $t < \infty$) ese nivel crítico de producción será menor, pues la curva de costos se desplaza hacia arriba. Ahora bien, cualquier trayectoria X_i (t) del grupo I alcanzará el punto $\overline{X}$ en un momento finito $\overline{t_i}$ y ya en ese momento tendrá beneficios negativos pues como $\overline{t_i} < \infty$ será $A_i\,\overline{(t_i)} < A_m$.



Denominaremos $\widetilde{X}_i < \overline{X}$ y $\widetilde{t}_i$ al volumen de producción e instante del tiempo en que cualquier trayectoria X_i (t) del grupo I comenzará a arrojar beneficios negativos. Gráficamente sería:



Supongamos ahora que se cumpla $\int_0^{\infty} B\,[X_i\,(t)\,]\,e^{-\delta t}\,dt > 0$. Eso es igual a: $\int_0^{\tilde{t}_1} B\,[X_i\,(t)\,]\,e^{-\delta t}\,dt + \int_{\tilde{t}_1}^{\infty} B\,[X_i\,(t)\,]\,e^{-\delta t}\,dt > 0$. Podemos ahora imaginarnos un plan de producción

$$X_i^o(t) = X_i\,(t) + f_i\,(t) \text{ con } \begin{cases} f_i(t) = 0 \text{ para } t < \tilde{t}_i \\ f_i(t) = -X_i(t) \text{ para } t \geqq \tilde{t}_i \end{cases}$$

El valor actual del beneficio de dicho plan sería:

$$\int_0^{\infty} B\,[X_i^o(t)\,]\,e^{-\delta t}dt = \int_0^{\tilde{t}_i} B\,[X_i(t)\,]\,e^{-\delta t}\,dt + \int_{\tilde{t}_i}^{\infty} B\,[0]\,e^{-\delta t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\tilde{t}_i} B[X_i(t)\,]e^{-\delta t}\,dt$$

Restando ambas corrientes de beneficios es:

$$\int_0^{\infty} B\,[X_i^o(t)\,]\,e^{-\delta t}dt - \int_0^{\infty} B\,[X_i\,(t)\,]\,e^{-\delta t}dt = -\int_{\tilde{t}_i}^{\infty} B\,[X_i\,(t)\,]\,e^{-\delta t}\,dt > 0$$

pues por definición, el plan $X_i(t)$ arroja beneficios negativos a partir de $\tilde{t}_i$.

Lo anterior nos dice que el plan $X_i(t)$ no puede ser óptimo pues no cumple con la condición suficiente (5).

El método anterior nos permite eliminar todas las trayectorias del grupo I que tengan como condición inicial $X_i(0) \leqslant \tilde{X}_i$. Las restantes trayectorias del grupo I con $X_i(0) > \tilde{X}_i$ son evidentemente subóptimas pues arrojan beneficios negativos en todo momento y por lo tanto son superadas por la trayectoria $X^o\,(t) = 0$.

No optimalidad de las trayectorias del grupo II

Ninguna de las trayectorias de este grupo puede ser óptima pues como X llega a decrecer continuamente, a partir de un cierto t finito llegan a violar la restricción de no negatividad impuesta por el programa a la variable X .

Características de la solución óptima

Habiendo eliminado todas las trayectorias de los grupos I y II y dado el supuesto de que el óptimo existe, la única trayectoria restante, $X[X^*(0), t] = X^*(t)$ será la trayectoria óptima. La misma debe cumplir, entre otras, con las siguientes condiciones:

1) $X^*(t) > 0$ para todo t, a menos que sean $X^*(t) = 0$ para todo t .

2) Denominando $\bar{X}(t)$ a la estrategia de producción que resultaría si el empresario maximizara los beneficios instantáneos y no el valor actual descontado de la corriente futura,[14] es:

2. a) $X^*(t) > \bar{X}(t)$ Para $t < \infty$ si $X^*(t) > 0$

2. b) $\lim_{t \to \infty} X^*(t) \geqq \lim_{t \to \infty} \bar{X}(t)$

3) $$\int_0^\infty B[X^*(t)]\, e^{-\delta t} dt \geqq \int_0^\infty B[\bar{X}(t)]\, e^{-\delta t} dt \qquad (> \text{ si } X^*(t) > 0)$$

La demostración de 1) se halla en el Apéndice. En cuanto a 3), ésta surge de que $X^*(t)$ es la trayectoria óptima, por lo cual el valor actual de sus beneficios es mayor que el de cualquier otra estrategia, incluyendo $\bar{X}(t)$.

Para demostrar 2), debemos tener en cuenta lo siguiente: si en $t = 0$ las curvas de costo e ingreso marginales no se cortan para ningún valor positivo de X, la estrategia $\bar{X}(t)$ será nula para todo t, pues la empresa nunca empezará a producir. Si $X^*(t)$ no es nula, 2. a) es evidentemente cierta y en 2. b) vale la desigualdad. En el caso que sea $\bar{X}(0) > 0$ la demostración es la siguiente:

[14] La misma surge de la condición $I'[\bar{X}(t)] = C_x[\bar{X}(t), A(t)]$ para cada t con
$A(t) = A_m - (A_m - 1) \exp \left[-\alpha \int_0^t X(\tau)\, d\tau \right]$

El suponer $X^*(t) \leqq X(t)$ para algún t implica la validez de alguno de los siguientes casos:

1) $X^*(0) < X(0)$
2) $X^*(0) > X(0)$ pero $X^*(t)$ corta (o es tangente) a $X(t)$ en algún momento
3) $X^*(0) = X(0)$

Dividiremos la demostración en dos pasos. En el primero demostraremos que los tres casos anteriormente mencionados implican que a partir de cierto momento es $\lambda^*(t) < 0$. En el segundo paso demostraremos que para la trayectoria óptima no puede ser $\lambda^*(t) < 0$ para ningún $t < \infty$, con lo cual se verificará que debe ser $X^*(t) > X(t)$ para todo t menor que infinito.

Paso I

Caso 1): Si es $X^*(0) < X(0)$ ello implica para t: 0 que:

$I'[X(0)] - C_X[X(0), 1] = 0$ [Por definición de $X(t)$]

$X^*(0) < X(0)$

$I'[X^*(0)] - C_X[X^*(0), 1] > 0$ (Pues $I'' - C_{XX} < 0$)

Por lo tanto debe ser $\lambda^*(0) < 0$ para que $X^*(t)$ cumpla con la ecuación (2). Pero si $\lambda^*(0)$ es menor que cero, seguirá siéndolo para todo t dada la naturaleza de la ecuación (3).

Caso 2): Si es $X^*(0) > X(0)$ pero $X^*(t)$ corta (o es tangente) a $X(t)$ en algún momento t_1, en t_1 se verificará lo siguiente:

$\int_0^{t_1} X^*(t)\,dt > \int_0^{t_1} X(t)\,dt$ (pues hasta ese momento ha sido $X^*(t) > X(t)$)

luego: $A^*(t_1) > A(t_1)$

además: $I'[X(t_1)] - C_X[X(t_1), A(t_1)] = 0$ $\left(\text{Por def. de } X(t)\right)$

$X^*(t_1) = X(t_1)$

luego: $I'[X^*(t_1)] - C_X[X^*(t_1), A^*(t_1)] > 0$ (pues $C_{AX} < 0$)

Por lo tanto debe ser $\lambda^*(t_1) < 0$ para que se cumpla la ecuación (2) y seguirá siéndolo para todo $t > t_1$ según la ecuación (3).

Caso 3): Si es $X^*(0) = X(0)$, para $t = 0$ debe ser:

$$I'[X(0)] - C_X[X(0), 1] = 0$$
$$X^*(0) = X(0)$$
$$I'[X^*(0)] - C_X[X^*(0), 1] = 0$$

y por lo tanto debe ser $\lambda^*(0) = 0$. Pero si $\lambda^*(0) = 0$ será $\dot{\lambda}^*(0) < 0$ por la ecuación (3) y $\lambda^*(t)$ será negativa a partir del momento siguiente a $t = 0$. Con esto hemos demostrado que si en algún momento se verifica $X^*(t) \leqq X(t)$, debe ser $\lambda^*(t) < 0$ a partir de ese momento.

Paso II

Utilizando la ecuación (2) tenemos: $\lambda = \dfrac{C_X - I'}{a(A_m - A)}$

para $\lambda = 0$ es: $\dfrac{C_X - I'}{a(A_m - A)} = 0$. Por lo tanto, los valores de X y A que verifican $\lambda = 0$ son los que cumplen con $C_X = I'$.

Asimismo, para $\dfrac{\dot{X}}{X} = 0$ tenemos, según la ecuación (8) :

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dfrac{\delta}{X}(C_X - I') + C_{XX}\dfrac{\dot{A}}{A}}{C_{XX} - I''} = 0$$

o sea que los valores de X y A que cumplen con $\dfrac{\dot{X}}{X} = 0$ son los que verifican:

$$C_X - I' = -\frac{X}{\delta} C_{XX} \frac{\dot{A}}{A} < 0 \quad [\text{para } t < \infty]$$

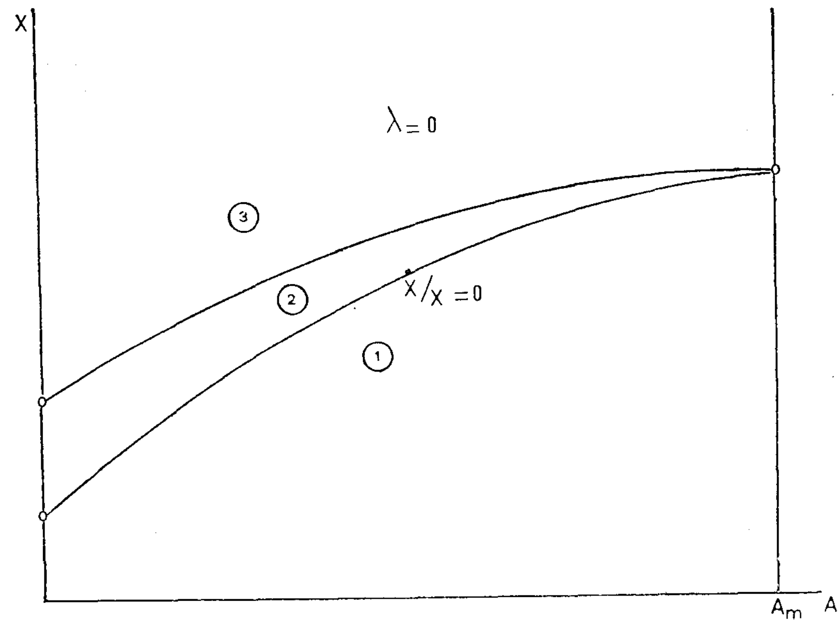
ó $C_X < I'$

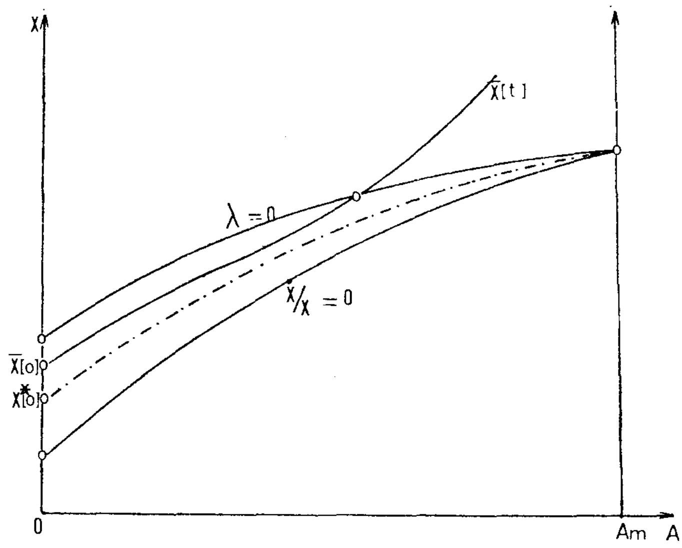
De esto se deduce que si representamos en el plano (X, A) las curvas $\dfrac{\dot{X}}{X} = 0$ y $\lambda = 0$, la curva $\lambda = 0$, será superior a $\dfrac{\dot{X}}{X} = 0$ para todo $t < \infty$ (a menos que sea $C_{XX} = 0$, en cuyo caso ambas curvas coinciden).

Puede verse que el plano (X, A) queda dividido en tres zonas:

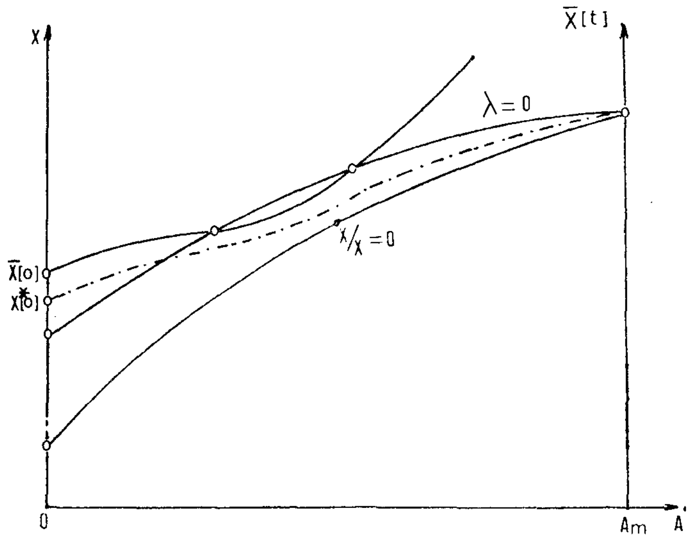
Zona 1: $\lambda < 0$ Zona 2: $\lambda < 0$ Zona 3: $\lambda > 0$

$\dot{X} < 0$ $\dot{X} > 0$ $\dot{X} > 0$





Lo que queremos demostrar es que los valores de X y A para la trayectoria óptima no pueden pasar por la zona 2 donde es $\lambda < 0$. Si así fuera y recordando el diagrama de fases (Gráfico 1), debería existir otra trayectoria (obtenida a partir de las condiciones necesarias) $\overline{X}(t)$ con $\overline{X}(0) = X^*(0) + \epsilon$, $(\epsilon > 0)$ tal que pasaría de la zona $\lambda < 0$ a la zona $\lambda > 0$ por lo menos una vez, lo cual es imposible dada la naturaleza de la ecuación (3).

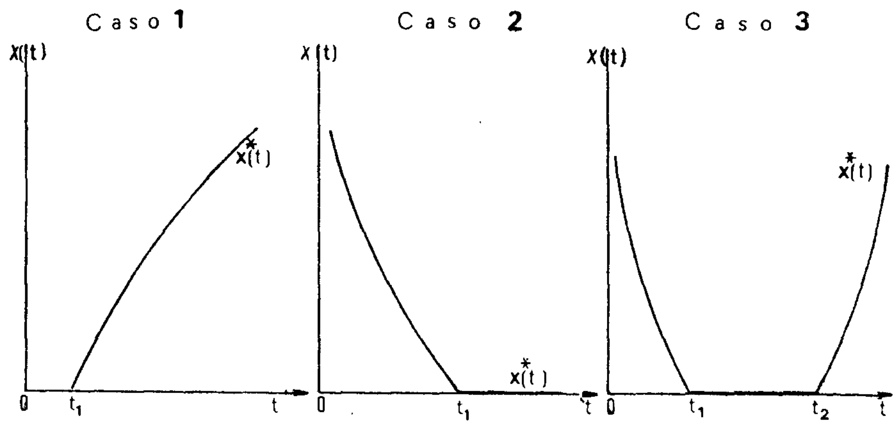


Se concluye entonces que la curva $X^*(t)$ debe tomar valores tales que sea $\lambda^*(t) > 0$ para todo $t < \infty$ y por lo tanto, dado lo demostrado en el paso I, debe ser $X^*(t) > X(t)$ para todo $t < \infty$.

Para $t = \infty$ es fácil de ver que la condición 2.b) se cumple con igualdad ya que ambas trayectorias convergen hacia el valor $X^0(\infty)$ tal que $I'[X^0(\infty)] = C_X[X^0(\infty), A_m]$.

APENDICE

Lo que queremos demostrar aquí es que si $X^*(t)$ es el programa óptimo, debe ser $X^*(t) > 0$ para todo t, a menos que sea $X^*(t) = 0$ para todo t. En términos gráficos eso equivale a decir que el programa óptimo no puede tomar la forma de ninguno de los tres casos que se ilustran a continuación:



Para resolver esto utilizaremos la condición suficiente para que el programa $X^*(t)$ sea óptimo: $\int_0^\infty B[X^*(c)]\, e^{-\delta t} dt > \int_0^\infty B[X^*(t) + f(t)]\, e^{-\delta t} dt$, para $f(t)$ distinta de cero al menos para algún t, o sea que no exista otro programa que arroje más beneficios que éste.

Caso 1)

Como supondremos que $X^*(t)$ es mayor que cero en algún momento, debe ser:

$$\int_0^\infty B[X^*(t)]\, e^{-\delta t} dt = \int_0^{t_1} B(0)\, e^{-\delta t} dt + \int_{t_1}^\infty B[X^*(t)]\, e^{-\delta t} dt =$$

$$= \int_{t_1}^\infty [X^*(t)]\, e^{-\delta t} > 0 ,$$

pues de lo contrario sería preferible el programa $X^0(t) = 0$ y no se cumpliría la condición suficiente.

Imaginemos ahora un nuevo programa $X^0(t) = X^*(t + t_1)$ que corresponde a la misma estrategia de producción positiva que $X^*(t)$ salvo que comenzada t_1 unidades de tiempo antes. Se ve inmediatamente que este nuevo programa determina un beneficio mayor que el primero, pues mientras que en ambos la corriente de beneficios es la misma, en el segundo ésta es descontada por menos tiempo, obteniéndose un valor actual mayor. Tenemos por lo tanto que:

$\int_0^\infty B\,[X^O\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt > \int_0^\infty B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt$, con lo cual no se cumple la condición suficiente para que el programa $X^*(t)$ sea óptimo.

Caso 2)

Debe ser:

$$\int_0^\infty B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt = \int_0^{t_1} B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt + \int_{t_1}^\infty B\ (0)\ e^{-\delta t}\, dt =$$

$$\int_0^{t_1} B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt > 0$$

De esto puede deducirse que entre 0 y t_1 debe haber existido por lo menos un momento de tiempo $t^o < t_1$ en el cual $B\ (t^o) > 0$. Denominando X^O y A^O a los valores que tomaron $X^*(t)$ y $A^*(t)$ en t^o, es:

$$I\ (X^o) > C\ (\frac{X^o}{A^o}).$$

Construyamos ahora un nuevo programa $\overline{X}\ (t)$ tal que

$$\overline{X}\ (t) \begin{cases} = X^*\ (t) \text{ para } t < t_1 \\ = X^o\ (t) \text{ para } t \geqq t_1 \end{cases}$$

El valor actual de los beneficios del nuevo programa es:

$$\int_0^\infty B\,[\overline{X}\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt = \int_0^{t_1} B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt + \int_{t_1}^\infty B\,[X^o]\ e^{-\delta t}\, dt$$

Ahora bien, si en t^o fue $B\ (t^o) > 0$, con más razón lo sera para $t > t_1 > t^o$ pues A será mayor que A^o al haber sido el volumen de producción positivo. Por lo tanto tenemos:

$$\int_{t_1}^\infty B\,[X^o]\ e^{-\delta t}\, dt > 0$$

y :

$$\int_0^\infty B\,[\overline{X}\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt - \int_0^\infty B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^\infty B\,[X^o]\ e^{-\delta t}\, dt > 0\ ,$$

no pudiendo ser $X^*\ (t)$ un programa óptimo.

Caso 3)

Es: $$\int_0^\infty B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt = \int_0^{t_1} B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} B\,(0)\,e^{-\delta t}\,dt + \int_{t_2}^\infty B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt =$$

$$= \int_0^{t_1} B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt + \int_{t_2}^\infty B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt > 0$$

Tenemos aquí tres posibilidades:

3 - 1) $\int_{t_2}^\infty B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt < 0$, luego debe ser

$$\int_0^{t_1} B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt > 0\ .$$

Construimos un nuevo programa $\overline{X}(t)$ tal que [15]

$$\begin{cases} = X^*(t) & \text{para } t < t_1 \\ = X^o & \text{para } t \geqq t_1 \end{cases}$$

Los beneficios de $\overline{X}(t)$ son:

$$\int_0^\infty B\,[\overline{X}(t)]\,e^{-\delta t}\,dt = \int_0^{t_1} B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt +$$

$$+ \int_{t_1}^\infty B\,[X^o]\,e^{-\delta t}\,dt$$

Restando los beneficios de ambos programas es:

$$\int_0^\infty B\,[\overline{X}(t)]\,e^{-\delta t}\,dt - \int_0^\infty B\,[X^*(t)]\,e^{-\delta t}\,dt = \int_{t_1}^\infty B\,[X^o]\,e^{-\delta t}\,dt -$$

[15] X^o se determina de igual forma que en el caso 2.

$$- \int_{t_2}^{\infty} B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\,dt > 0\ .$$

por lo cual X^* (t) no puede ser óptimo.

3 - 2) $\int_{t_2}^{\infty} B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\,dt > 0$. En este caso conviene proceder como en el caso 1) , adelantando la segunda parte de producción positiva del programa en $t_2 - t_1$, obteniéndose así la misma cantidad de beneficios descontada por menos tiempo. Esto indica que X^* (t) no puede ser óptimo.

3 - 3) $\int_{t_2}^{\infty} B\,[X^*\ (t)]\ ^{-\delta t}\,dt = 0$. Por lo tanto, debe ser

$$\int_{0}^{t_1} B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\,dt > 0\ .$$

Procediendo como en el caso 2) , vemos que existe otro programa $\overline{X}$ (t)

tal que $\begin{cases} = X^*\ (t) & \text{para } t < t_1 \\ = X^{\circ} & \text{para } t \geqq t_1 \end{cases}$ [16] y que cumple con:

$$\int_{0}^{\infty} B\,[\overline{X}\ (t)]\ e^{-\delta t}\,dt - \int_{0}^{\infty} B\,[X^*\ (t)]\ e^{-\delta t}\,dt > 0\ ,$$ por lo cual X^* (t)

no es óptimo.

EL APRENDIZAJE POR LA EXPERIENCIA Y LA ESTRATEGIA OPTIMA DE PRODUCCION PARA LA EMPRESA

Resumen

Se analizan en el trabajo algunas de las implicaciones del fenómeno denominado "Learning by Doing" para la unidad microeconómica de producción. Utilizando métodos de teoría del control óptimo se obtiene la estrategia óptima de producción para la empresa que desea maximizar el valor actual de la futura corriente de beneficios cuando el nivel de eficiencia del proceso productivo depende del monto acumulado de

[16] X° se determina de igual forma que en el caso 2.

producción realizado por la empresa desde el principio de sus actividades. En particular se verifica que, en la medida que existan posibilidades de aprendizaje, el volumen de producción de la estrategia óptima será mayor en cada momento que el correspondiente al de maximización estática de beneficios.

LEARNING BY DOING AND THE OPTIMUN STRATEGY OF PRODUCTION

Summary

Some microeconomic implications of the "Learning by Doing" hypothesis are analyzed in this paper. Assuming the entrepreneur maximizes the present value of the future stream of benefits and that the efficiency of the production process depends on the cumulated amount of production from the beginning of the firm's productive activities, the optimal production strategy for the firm is obtained by using tools of the optimal control theory. It is shown that, there being learning possibilities, the level of production attained at each moment when following the optimal strategy is greater than the one derived from the static benefits maximization strategy.