COMUNICACIONES

SOBRE LA OBTENCION DE LA ECUACION DE LA RECTA DE REGRESION MINIMOCUADRATICA ORTOGONAL***

L. M. BOGGIA * y O. M. SORARRAIN **

Es bien conocido el método de ajuste de LEGENDRE (mínimo cuadrático) tomando las distancias entre los puntos a ajustar y la recta de ajuste, paralelamente a uno de los ejes coordenados. Sin embargo pocas veces se usa el criterio de la regresión mínimo cuadrática ortogonal que considera no distancias "paralelas" a ejes sino "distancias más cortas" (distancias ortogonales) entre los puntos a ajustar y la recta. CRAMER en su "Métodos matemáticos de estadística" cita dicho método como el de ajuste más perfecto o estricto, pero hace una deducción de la fórmula que se basa en:

a) introducir la noción de momento de inercia de la distribución;

b) admitir que tal momento se hará mínimo para cada recta que pase por el baricentro;

c) hallar la ecuación de la familia de elipses homotéticas con centro común en el baricentro de los datos y determinadas por el lugar geométrico de los segmentos de longitud inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de dichos momentos;

d) hallar la dirección del eje mayor (que corresponde al menor

* Profesor e Investigador de la Facultad de Ciencias Exactas y Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de La Plata.

** Profesor e Investigador de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata.

*** Se muestra cómo obtener la ecuación de la recta de regresión mínimo cuadrática ortogonal sin usar la noción de elipse de inercia de la distribución.

momento de inercia) y escribir su ecuación como recta de regresión mínimo cuadrática ortogonal.

Evidentemente dicha ecuación es mucho más fácil de determinar (sobre todo para los no muy avezados en matemática) por el clásico método de hacer mínima la suma de distancias al cuadrado mediante la igualación a cero de las derivadas parciales de la sumatoria respectiva y que nosotros realizamos a continuación.

Efectivamente si se parte de la ecuación de la recta en su forma normal

$$\varrho = x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega \tag{1}$$

en la que ϱ es su "distancia" al origen y ω es el ángulo que forma la normal a la recta con el semieje de las x, y se recuerda que en tal caso la distancia entre un punto cualquiera (x_i, y_i) y dicha recta queda expresada por

$$d_i = x_i \cos \omega + y_i \operatorname{sen} \omega - \varrho \tag{2}$$

es ésta precisamente la distancia a la que debe aplicársele el criterio de LEGENDRE de los mínimos cuadrados

$$S = \Sigma\, d_i^2 = \text{mínimo} \tag{3}$$

Para ello deben cumplirse las dos siguientes igualdades

$$\frac{\delta S}{\delta \omega} = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta \varrho} = 0 \tag{4}$$

Efectuando las derivadas se obtiene que:

$$\cos 2\omega \sum_{I}^{N} x_i y_i + \operatorname{sen} \omega \cos \omega \sum_{I}^{N} \left(y_i^2 - x_i^2 \right) +$$

$$+ \varrho \left(\operatorname{sen} \omega \sum_{I}^{N} x_i - \cos \omega \sum_{I}^{N} y_i \right) = 0 \tag{4' · a}$$

$$\cos \omega \sum_{I}^{N} x_i + \operatorname{sen} \omega \sum_{I}^{N} y_i - N \varrho = 0 \tag{4' · b}$$

Si ahora llamamos

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x_i}{N}$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma y_i}{N}$$

$$P = \Sigma x_i y_i \qquad (5)$$

$$D = \Sigma (y_i^2 - x_i^2)$$

Reemplazando (5) en las 4') y eliminando ϱ entre las mismas se obtiene

$$\cos 2 \omega (P - N \overline{X} \overline{Y}) + \operatorname{sen} \omega \cos \omega (D + N \overline{X}^2 - N \overline{Y}^2) = 0$$

y por lo tanto

$$\operatorname{tg} 2 \omega = \frac{2 (N \overline{X} \overline{Y} - P)}{D + N \overline{X}^2 - N \overline{Y}^2}$$

es decir que

$$\omega = \frac{1}{2} \text{ arc. tg. } \frac{2 (N \overline{X} \overline{Y} - P)}{D + N (\overline{X}^2 - \overline{Y}^2)} \qquad (6)$$

también resulta fácil obtener el valor de ϱ mediante la (4'.b) que mediante la introducción de (5) se convierte en

$$\varrho = \overline{X} \cos \omega + \overline{Y} \operatorname{sen} \omega \qquad (7)$$

La dificultad que se presenta por la uniformidad de la función arco tangente queda eliminada por la simple observación de la tendencia de los datos (equivalente a una estimación del signo del coeficiente de correlación), efectivamente si el coeficiente de correlación es negativo ω posee como valor, su "valor principal", mientras que si el coeficiente de correlación es positivo, al valor principal que se determina mediante la (6) debe sumársele $\pi/2$.

Una vez conocidos los parámetros ω y ϱ el problema está teóricamente resuelto, sin embargo desde el punto de vista práctico, conviene poner la ecuación de la recta en su forma explícita.

$$y = a\,x + b \tag{8}$$

para ello se reemplazan (6) y (7) en la (1) y se despeja y, obteniéndose

$$y = -(\mathrm{cotg}\,\omega)\,x + \overline{X}\,\mathrm{cotg}\,\omega + \overline{Y} \tag{9}$$

o también

$$y - \overline{Y} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\omega}\,(x - \overline{X}) \tag{10}$$

fórmula que con poco esfuerzo se puede demostrar que es la misma que cita CRAMER en su trabajo.