LA FIRMA Y SUS DECISIONES OPTIMAS EN EL TIEMPO: INVENTARIOS Y CAPITAL FIJO **

ANA MARÍA MARTIRENA-MANTEL *

I. INTRODUCCION Y ANTECEDENTES

En el trabajo "Un modelo de fluctuaciones económicas" [1] se observó la importancia de la introducción explícita de la inversión en inventarios (conjuntamente con la inversión en capital fijo) en el análisis de las fluctuaciones económicas. Se vió allí la imposibilidad de que una economía permaneciera en su sendero dinámico de equilibrio estacionario sin el ajuste permitido por la acumulación de inventarios (justificados por el motivo transacciones).

Una inquietud natural que surge del mencionado contexto macroeconómico es el estudio de la firma representativa y sus decisiones óptimas dinámicas cuando se enfrenta con las posibilidades alternativas de invertir en inventarios y en la expansión de su capacidad física.

Es en la teoría de las fluctuaciones económicas donde es difícil evaluar los efectos de cambios en la inversión de inventarios sin el conocimiento de los niveles deseados y este conocimiento depende, creemos, de extensiones de la teoría de la firma en la dirección del presente trabajo.

Son dos pues los puntos de contacto con el estudio arriba citado. Por una parte, la firma necesita "resolver" el problema de trabajar con los dos

* Investigadora Jefe en el Centro de Investigaciones Económicas del Instituto Torcuato Di Tella y Profesora Titular en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Católica Argentina.

** Este trabajo fue presentado en la Tercera Reunión Anual de Centros de Investigaciones Económicas de Argentina realizada en Tucumán en julio de 1967. Deseo agradecer los comentarios de los doctores Aldo Arnaudo (Universidad de Córdoba) y Douglas Steed (FIEL) en esa Reunión. El estudio fue iniciado durante mi visita a la Universidad de Chicago como "Research Associate" desde febrero a abril de 1966 con una invitación del profesor H. Uzawa por la cual me siento muy agradecida. También deseo agradecer la crítica valiosa de mis colegas en seminario interno del Centro de Investigaciones Económicas (ITDT), y especialmente a Rolf R. Mantel por sus sugerencias matemáticas en la Sección IV de este trabajo.

1 MARTIRENA MANTEL, Ana María, *A Model of Economic Fluctuations*, Ph. D. Dissertation, Yale University 1966. *Yale Economic Essays*, Spring 1968. Documento de Trabajo nº 29, Instituto Torcuato Di Tella.

tipos de stocks. Y por el otro, se tratará de analizar cómo la unidad microeconómica reacciona óptimamente en épocas de fluctuaciones conocidas y anticipadas en su demanda y ver la forma en que la elección de la combinación óptima de recursos se ve afectada por esas variaciones intertemporales en la demanda.

El trabajo tratará entonces de extender dinámicamente en algunas direcciones la teoría así llamada "tradicional" en el análisis de la firma a diferencia de los enfoques alternativos dados por la ciencia de la dirección de empresas ("management science") o por la teoría del comportamiento de la firma ("behavioral theory of the firm"). [2]

Se entiende por teoría tradicional aquella que ignora la estructura detallada interna de la empresa (sobre la que se centran los dos enfoques mencionados) al suponer que el mercado determina la asignación de recursos dentro de la misma al igual que las decisiones de producción y precios. Aún en el caso "general" de marginalismo dado por programación lineal la firma "resuelve" su problema interno de asignación de recursos por medio de un procedimiento imputacional (el problema dual) que imita la acción de un mercado competitivo.

Importantes estudios se han hecho en los últimos años que tratan de analizar el comportamiento óptimo dinámico a nivel microeconómico extendiendo el marco tradicional mencionado. [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

Muchos de ellos revelan la preocupación de proveer un marco riguroso de análisis capaz de dar base científica a la teoría de la inversión

2 MACHLUP, F., "Theories of the Firm: marginalist, behavioral and managerial", *American Economic Review*, march 1967.

3 ARROW, K.; BECKMAN, M. y KARLIN, S., "Optimal expansion of the capacity of the firm", ch. 7 in Studies in the *Mathematical Theory of Inventory and Production* (Eds. Arrow, Karlin and Scarf), Stanford, 1958.

4 ARROW, K., "Optimal Capital Adjustment", ch. 1 in *Studies in Applied Probability and Management Science* (Eds. Arrow, Karlin and Scarf), Stanford, 1962.

5 JORGENSON, D., "Capital Theory and Investment Behavior", *American Economic Review*, mayo 1963.

6 EISNER, R. y STROTZ, R., "Determinants of Business Investment", Research Study Two in *Impacts of Monetary Policy*, Commission on Money and Credit Prentice Hall, 1963.

7 LUCAS, R., "Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator" *International Economic Review*, febr. 1967.

8 GOULD, J., "The micro-economic approach to the demand for physical capital", Report 6633, University of Chicago, dic. 1966.

9 TREADWAY, A., "Optimal investment under cost of adjustment", University of Chicago, unpublished paper, 1966.

10 GOULD, J., "Adjustment costs in the theory of investment of the firm", Report 6630, University of Chicago, 1966.

en capital fijo y de esta forma proporcionar un fundamento adecuado a Macroeconomía Dinámica y sus aplicaciones econométricas. En especial, un grupo de estos estudios tiene la principal motivación de eliminar las dificultades relacionadas con teorías dinámicas ad-hoc usadas como teorías de la inversión y de este modo crear un vínculo importante entre teoría económica y el análisis empírico. Por ejemplo, a menudo en econometría se suele postular algún mecanismo de ajuste dinámico auxiliar (como el de desfasajes distribuidos en forma geométrica decreciente), independientemente de la teoría que determina el capital deseado u óptimo.[11]

Respondiendo a los defectos teóricos subyacentes en la idea del mecanismo de ajuste del acelerador flexible, es que EISNER y STROTZ comenzaron la serie de estudios que modifican la función criterio de modo que sea finalmente óptimo para la firma acercar de ese modo su stock de capital actual al deseado.[12]

Todos estos estudios se concentraron en un solo tipo de stocks, capital fijo y sus cambios en el tiempo.

La teoría económica por muchos años tuvo muy poco que decir acerca del segundo tipo de stocks que nos preocupa: inventarios. Este descuido se debe al énfasis que la teoría puso tradicionalmente en el estudio de situaciones de equilibrio[13] donde por definición se descarta el mantenimiento de inventarios en anticipación de cambios conocidos en la demanda o en los precios.

A este respecto es también hoy extensa la literatura sobre el control óptimo de inventarios puros, aunque este campo en sí mismo pierde rápidamente interés para el economista al poner su foco de atención en los detalles internos del funcionamiento de la empresa.[14]

Todos estos trabajos brevemente comentados pueden considerarse

11 Esta noción del proceso de ajuste, al suponer que la firma en el corto plazo no se ajusta plenamente al capital óptimo, está íntimamente relacionada con el concepto de estabilidad del primer tipo o asintética, de la clasificación de SAMUELSON, P., *Fundamentos del análisis económico,* Harvard University Press, 1955.

12 Estos estudios revelan el problema de tener que apoyarse en costos de ajuste no lineales que si bien logran el cometido citado y además "resuelven" el problema de la dimensión de la firma en el caso de rendimientos constantes a escala, se apartan de la competencia perfecta al admitir distintos tipos de imperfecciones de mercado.

13 Ver Cap. Primero en ARROW, K.; BECKMAN, M., and KARLIN, S., 1958, *op. cit.*

14 Citamos especialmente los trabajos de inventarios puros de: MODIGLIANI, F. y HOHN, F., "Production Planning over Time and the Nature of Expectations and Planning Horizon", *Econometrica,* 1955; MORIN, F., "Note on an Inventory Problem", *Econometrica,* 1956, donde analiza el modelo de MODIGLIANI y HOHN para el tiempo continuo.

importantes esfuerzos de superar tanto el marco tradicional estático de la teoría de la firma como las simples extensiones dinámicas donde la analogía con la teoría estática es llevada demasiado lejos como veremos en la sección siguiente.

II. EL PROBLEMA ESTATICO Y EL DE "ESTATICA DINAMIZADA"

Como marcos de referencia para nuestro análisis ulterior comencemos recordando las etapas del análisis estático tradicional.[15] El equilibrio estático de la firma en competencia perfecta se puede alcanzar en dos etapas. En la primera, ignorando momentáneamente el ingreso, se suponen dados los precios de los factores de producción $(p_1, \ldots, p_n)$ y el producto $\bar{y}$. Entonces, en equilibrio se usa la cantidad de factores $(x_1, \ldots, x_n)$ de modo de minimizar el costo total de producción $C = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, sujeto a la restricción dada por la función de producción $\bar{y} = f(x_1, \ldots, x_n)$. Usando el método de multiplicadores de LAGRANGE, para que el costo total sea mínimo, se obtienen las condiciones necesarias familiares del equilibrio que deben cumplirse en cada punto: la tasa marginal de sustitución entre dos factores cualesquiera debe ser igual a los precios relativos, o alternativamente la productividad marginal del último peso gastado debe ser igual en cada uso. El resultado de esta etapa es el costo total mínimo para cada nivel de producto.

En la segunda etapa el nivel de producción óptimo, y, se determina de modo de maximizar el ingreso neto, suponiendo conocido y constante el precio del producto q. El nivel de producto óptimo será aquel que iguala el costo marginal al ingreso marginal.

En ambas etapas son también familiares las condiciones suficientes para el óptimo: la forma cuadrática cuyos coeficientes son las derivadas parciales segundas de la función de producción debe ser negativa definida para movimientos a lo largo de una isocuanta.

Así como el problema estático de la firma consiste en la selección de un cierto conjunto de cantidades de factores y producto, el problema dinámico consiste en la selección de un cierto plan de producción entre las posibles alternativas abiertas al agente de decisión.

15 SAMUELSON, P., *Foundations of Economic Analysis*, cap. 4.

J. R. HICKS fue el primero que formuló el problema dinámico en esos términos,[16] al suponer que la firma resuelve un problema de maximización con restricciones de T períodos y determina los valores óptimos de todas las componentes de todos los movimientos sobre el horizonte económico completo.

Este análisis que luego completara MOSAK,[17] dio a los problemas dinámicos de la firma bajo condiciones de certeza perfecta un tratamiento que es extensión inmediata del problema estático: un mismo bien (producto o factor) en períodos distintos de tiempo es un bien distinto. Entonces, suponiendo dadas y constantes las expectativas de precios y tasa de interés futuras, se tendrán tantos bienes como períodos tenga el horizonte económico de planeación de la firma. Esta elegirá la corriente de bienes presente y futura de modo de maximizar el valor presente de su ingreso, descontado, sujeto a la función de transformación "dinamizada". O sea, por analogía exacta con el caso estático, HICKS llega a la conclusión de que el problema de decisión que enfrenta la empresa en cualquier momento es la selección del mejor curso de acción sobre el horizonte total.[18]

Las condiciones necesarias para el equilibrio son análogas a las del caso estático pero en número multiplicadas por el horizonte de planeación. La tasa marginal de sustitución entre dos productos o dos factores planeados para dos períodos cualesquiera debe igualar el cociente de sus precios relativos esperados descontados. Estas tasas marginales de sustitución deben satisfacer las propiedades que surgen de las condiciones suficientes de segundo orden para el óptimo (de la matriz de derivadas de segundo orden alargada para T períodos).

III. EL MODELO: PRESENTACION Y ANALISIS DE LAS CONDICIONES NECESARIAS DEL OPTIMO DINAMICO.

El análisis "dinámico" de la sección anterior trata los distintos factores productivos como bienes distintos, sin distinguir cualitativamente entre ellos. No se considera explícitamente que la inversión en capital fijo repre-

16 HICKS, J. R., *Value and Capital*, part. IV, 2ª ed., 1946.

17 MOSAK, J., *General Equilibrium Theory in International Trade*, Cowles Commision, 1944.

18 En una línea de análisis similar F. MODIGLIANI y K. COHEN, *The Role of Anticipations and Plans in Economic Behavior and their Use in Economic Analysis and Forecasting*, 1961, demuestran que el problema de decisión de la firma no consiste en seleccionar el plan óptimo sobre todo el horizonte, sino solo el *primer movimiento óptimo*.

senta un cambio del stock actual de capital. Tampoco considera el problema de inventarios, o sea la posibilidad de diferencias entre los niveles de producción y de demanda justificados por los motivos transacción, especulación y precaución.

El modelo que a continuación se presenta, trata de integrar las dos clases de inversión en la teoría dinámica de la firma. La herramienta matemática a utilizar es la del cálculo de variaciones,[19] aplicándose además la generalización del marginalismo clásico dada por las condiciones de KUHN-TUCKER.

El modelo reconoce como antecedentes inmediatos tanto el análisis puro de inventarios de MODIGLIANI-HOHN y MORÍN ya citado, como el de VERNON SMYTH[20] (quien trata de responder la pregunta de cual es la cantidad óptima inicial de capital fijo a instalar).

El rasgo esencial de la inversión en inventarios es la interrelación de las decisiones de la firma en el tiempo. Dado el "pattern" arbitrario de demanda (ventas) en el tiempo (constante, linealmente creciente, creciente en forma cóncava o convexa u oscilante), producir para inventarios en un momento dado t, significa la sustitución de la producción en el momento $(t + \tau)$ por la producción del momento t.

A fin de tener una unidad extra de producto disponible en $(t + \tau)$ para satisfacer la demanda en $(t + \tau)$, la firma puede o bien producirla en $(t + \tau)$ o bien producirla en t y acumularla hasta $(t + \tau)$. La elección será función —como veremos a continuación— de los beneficios marginales relativos de ambas alternativas.

Al mismo tiempo, mantener inventarios puede constituir una alternativa a invertir en capital fijo. La firma podrá, a fin de tener disponible una unidad extra de producto en $(t + \tau)$ aumentar el stock de capital en $(t + \tau)$, lo cual implica el aumento de la capacidad productiva para todo el horizonte económico, o aumentarlo en t y mantener inventarios hasta $(t + \tau)$.

El problema se formula del siguiente modo. Se trata de una empresa "representativa" (la construcción teórica marshalliana), que al comienzo de su horizonte de planeación (finito) posee cantidades positivas de dos clases de activos físicos: inventarios, V_0 y capital fijo, K_0.

19 GELFAND, I. and FOMIN, S., *Calculus of Variations*, Prentice Hall, 1963; AKHIEZER, N., *The Calculus of Variations*, Blaisdell, 1962.

20 VERNON, Smyth, *Investment and Production*, Harvard 1961.

La empresa tiene expectativas sobre el sendero de su demanda acumulada, S (t), (ventas), durante todo su horizonte económico (t_0, T), como así también sobre el sendero de todos los precios de sus insumos. Estos son, capital físico, K (t), que compra en el mercado al precio *p* (t) a fin de expandir su capacidad productiva a la tasa de inversión bruta instantánea I (t), y trabajo, L (t), cuyos servicios son pagados al precio w (t).

Los precios de estos insumos, conocidos para todo *t* no implican necesariamente expectativas de tipo estacionario por parte del agente de decisión empresarial. El empresario conoce sus expectativas de p (t), w (t) y S (t) en todo t, para $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Cómo ha formado esas expectativas es problema anterior a la búsqueda de la forma óptima de satisfacer esas demandas dadas. Cualquiera sea la "ley" con la cual ha formado esas expectativas, su problema de óptimo no se altera ya que es independiente y posterior al problema de su formación.

El stock de capital físico K, (t) es perfectamente divisible y no puede ser reducido de modo alguno que no sea a través de su depreciación exponencial a la tasa constante y "radioactiva" d, donde $0 < d < 1$.[21] En otras palabras, debido a la ausencia de un mercado de "segunda mano" de bienes de capital que permitiría desinversión neta positiva, el modelo admite la irreversibilidad en el proceso de expansión de la capacidad productiva de la firma.

La empresa produce un único bien cuya producción acumulada al momento *t* se denota por X (t) y cuya tasa de producción por unidad de tiempo, $\dot{X}$ (t), es una función instantánea y neoclásica, F, de los dos insumos, servicios de capital y de trabajo. Esto es, no existe período de gestación alguno entre la orden de compra del capital y su instalación, ni entre la instalación del capital físico y la obtención del bien final. Este único bien se destina a satisfacer la demanda final $\dot{S}$ (t), o a acumularse en stocks de inventarios, V (t), para cuyo mantenimiento la empresa incurre en un costo marginal (y medio) por unidad de tiempo de a. Este costo incluye el alquiler real o imputado por el espacio ocupado, seguro, etc.

Se supone además que la empresa puede pedir prestado y prestar

21 Esta inversión de reposición igual a una fracción constante del stock de capital es a la que se tiende suponiendo una distribución de reposiciones geométrica en el tiempo. O sea, se reconoce que los gastos que mantienen la capacidad del stock de capital constituyen un fenómeno recurrente.

Ver ARROW, K., "Optimal Capital Policy, the Cost of Capital and Myopic Decision Rules", Report nº 85, Serra House, Stanford University, enero 1965.

tondos líquidos a la tasa r, tasa de interés que no se altera, ni por el volumen de sus préstamos, ni por el transcurso del tiempo.

Comenzando con la primera etapa de búsqueda de la función de costo total para la firma, el problema dinámico se formaliza de la siguiente forma. Se trata de minimizar el costo total C, de producción y de mantenimiento de inventarios

$$C = \int_{o}^{T} [a\ V\ (t) + w\ L\ (t) + p\ I\ (t)]\ e^{-rt}\ dt$$

sujeto a las siguientes restricciones dinámicas:

(1) $\dot{V}\ (t) + \dot{S}\ (t) = F\ [K\ (t),\ L\ (t)]$

(2) $\dot{K}\ (t) + d\ K\ (t) = I\ (t) \geqslant 0$

(3) $V\ (t) \geqslant 0$

(4) $L\ (t) \geqslant 0,\ K\ (t) \geqslant 0$

(5) $V\ (o) = V\ o,\ V\ (T) = V_T,\ K\ (o) = K\ o \text{ y } K\ (T) = K_T$

(1) nos dice que el nivel de producción en t, $\dot{X}$ (t), el cual es la suma de los cambios en el stock de inventarios $\dot{V}$ (t) y de las ventas acumuladas $\dot{S}$ (t), es una función neoclásica de los dos insumos. Entonces es cierto que F_K y F_L son positivas, F_{KK}, F_{LL} negativas y que $H = F_{KK}\ F_{LL} - F_{KL}^{2} \geqslant 0$, o sea la función de producción es estrictamente creciente, cóncava y diferenciable continuamente.

(2) nos dice que la inversión bruta en capital fijo no puede ser negativa. La desinversión neta no puede exceder la depreciación. Si el equipo sobrante en cualquier momento pudiera ser vendido al precio del equipo nuevo, equivalente, entonces la inversión neta negativa sería simplemente la venta del equipo sobrante.

(3) nos dice que los inventarios no pueden ser negativos, es decir no se puede vender en cada instante más que la producción del período más los inventarios acumulados.

(4) la fuerza de trabajo y el stock de capital no pueden ser negativos.

(5) dan las condiciones iniciales históricas y finales (planeadas) para los dos stocks.

Como vemos el problema incluye variables dinámicas y sus derivadas en el tiempo siendo así un problema típico de cálculo de variaciones con puntos finales fijos. Las incógnitas todas funciones de tiempo, son de dos clases. Aquéllas que aparecen sin sus derivadas y por ende pueden variar independientemente en forma instantánea (llamadas también variables de control) como L (t) e I (t), y las que aparecen con sus derivadas y por ende deben variar en forma contínua con t, como K (t) y V (t) (variables de estado).

El problema general consiste entonces en primer lugar, en hallar los extremos $K = K(t)$ y $V = V(t)$ que unen dos puntos conocidos (V_0, K_0) y (V_T, K_T), en principio diferenciables piece-wise continuamente,[22] y en segundo lugar, en encontrar los valores correspondientes de L (t) e I (t), de modo que la funcional

$$C = \int_0^T F\,(t, K, V, \dot{K}, \dot{V}, L, I)\, d\,t$$

alcance un mínimo, sujeta a las restricciones (1) a (5).

Las condiciones necesarias para el óptimo son de dos tipos. Las dos siguientes son similares al problema clásico marginal, donde la tasa de interés no aparece explícitamente,[23]

$$(6) \qquad L_L = w - \mu F_L \geqslant 0$$

$$(7) \qquad L_I = p - \lambda \geqslant 0$$

El resto de las condiciones necesarias son las ecuaciones de Euler (ecuaciones diferenciales de segundo orden):

$$(8) \qquad L_V + r\, L_{\dot{V}} - \frac{d}{dt} L_{\dot{V}} = a + r\,\mu - \dot{\mu} \geqslant 0$$

$$(9) \qquad L_K + r\, L_{\dot{K}} - \frac{d}{dt} L_{\dot{K}} = (r + d)\,\lambda - \dot{\lambda} - \mu\, F_K \geqslant 0$$

Se tiene así un sistema de cuatro relaciones de equilibrio [(6) a (9)], que junto con las restricciones (1) y (2) nos determinan, si el óptimo existe; a) cuatro funciones L, I, K y V (las dos últimas continuas en el tiempo) y b) los dos multiplicadores de Lagrange λ y μ, que se inter-

22 O sea la derivada puede no ser continua porque la función puede admitir codos por ejemplo.

23 La letra L denota la función de LAGRANGE y todos los puntos sobre las variables denotan su derivada con respecto al tiempo.

pretan como es usual como el costo marginal de la inversión o precio imputado de la inversión y el costo marginal de producción o precio imputado del producto, respectivamente.

¿Cómo interpretamos económicamente estas condiciones de equilibrio dinámico? (6) dice la verdad familiar que en equilibrio la tasa de salarios no puede ser menor que el valor de la productividad física marginal del trabajo. Si suponemos que F_L se hace infinito a medida que L tiende a cero, tendremos igualdad estricta. En consecuencia L será siempre positivo si hacemos ese supuesto razonable.

Análogamente, (7) dice que el precio de la inversión no puede ser menor que el precio imputado λ. Si fuera menor, entonces la demanda por los bienes de inversión aumentaría haciendo bajar a λ. (8) nos permite saber cuando es beneficioso mantener inventarios. Escribiendo (8) con tiempo discreto tenemos que

$$(10) \qquad \mu_{t-1} \leqslant (1 + r)\, \mu_t + a$$

0 sea el costo marginal μ de tener una unidad de producto disponible para la venta en $(t + 1)$ no puede exceder el costo marginal de producirlo en t capitalizado hasta $(t + 1)$,[24] más el costo marginal de almacenarlo hasta $(t + 1)$. En general, el costo marginal de producir una unidad de producto en cualquier t, debe igualar el costo marginal de producirlo en cualquier t anterior y mantenerlo en stock hasta t.

En la misma forma, podemos escribir (9) como

$$(11) \qquad \lambda_{t-1} \leqslant (1 + r + d)\, \lambda_t - \mu\, F_K$$

Nos dice que en el óptimo, el costo marginal de tener una unidad neta extra de capacidad productiva disponible para producir en $(t + 1)$ para vender en $(t + 1)$ o más tarde, no puede exceder el costo marginal de haber incrementado la capacidad en t *más* el interés por "la espera" sobre el costo marginal de invertir en t, *más* la depreciación del equipo durante t *menos* la renta sobre el capital físico efectivamente utilizado en t, $\mu\, F_K$ (o ingreso marginal por disponer de una unidad más de capital).

Si en (11) tenemos la desigualdad estricta, esto es si el costo marginal de añadir a la capacidad mañana *es menor* que el costo marginal de aumentarla hoy, más los intereses perdidos en inversiones alternativas, más

24 Es el interés sobre el costo de aumentar la producción en una unidad, alternativa a invertir los fondos líquidos prestándolos a la tasa r.

la depreciación por el uso del equipo, *entonces* convendrá incrementar mañana la capacidad y aprovechar hoy las inversiones alternativas.

Si en cambio tenemos en (11) desigualdad estricta en sentido contrario, significa que es beneficioso incrementar la capacidad hoy. En equilibrio ambos lados de (11) deben ser iguales.

Como vemos, en las condiciones necesarias del equilibrio dinámico tenemos algunas disigualdades. A fin de explorar la determinación del equilibrio se hará uso de las condiciones de KUHN-TUCKER y de supuestos adicionales.

De acuerdo a esas condiciones (que generalizan el análisis marginal estático admitiendo desigualdades)[25] si un punto maximiza una función $F(x_1, \ldots, x_n)$ sujeta a ciertas restricciones $g^j(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, para $j = 1, \ldots, m$, existen números no-negativos λ_j de modo que las siguientes condiciones se cumplen.

1. La solución debe ser factible, o sea debe estar contenida en el conjunto definido por todas las restricciones. Además, si alguna restricción se satisface con desigualdad estricta, i. e., si hay "desempleo de algún factor" el precio imputado correspondiente es cero.

2. Además debe cumplirse:

$$F_{x_i} - \sum_j \lambda_j \, g^j_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0 \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

si es estrictamente menor, entonces $x_i = 0$. O sea, si x_i es estrictamente mayor que cero entonces hay igualdad estricta.

¿Cómo se interpreta esta condición económicamente? El beneficio marginal de la restricción i no puede ser mayor que su costo marginal. Si para alguna x, el beneficio marginal de la actividad correspondiente excede su costo marginal imputado, entonces esa x se expandirá hasta que la igualdad se cumpla. Si es menor, entonces se contraerá hasta la igualdad o hasta el origen (cero) cualquiera se alcance primero.

En equilibrio, se debe tener igualdad o desigualdad estrictas.

En nuestro caso, volvamos a escribir las condiciones de equilibrio:

(1) $\dot{V} + \dot{S} = F(K, L)$

(2) $\dot{K} + d\,K = I \geqslant 0$

(6) $w - \mu F_L \geqslant 0$

25 Si se acepta su uso para un problema dinámico como el que nos ocupa.

(7) $p - \lambda \geqslant 0$

(8) $a + r\,\mu - \dot{\mu} \geqslant 0$

(9) $(r + d)\,\lambda - \mu\,F_K - \dot{\lambda} \geqslant 0$

En (6) tendremos igualdad estricta ya que L será siempre positivo como se discutió anteriormente, no siendo así en el caso de (2) ya que la inversión bruta puede ser cero en algún momento.

En (8) que define el equilibrio de inventarios, hemos supuesto que la firma comienza con stocks positivos, lo cual significa que al menos al principio tendremos igualdad.

En (9) que expresa el equilibrio del stock de capital, también tendremos igualdad estricta, ya que K será siempre positivo. Esto es una consecuencia directa del tipo de depreciación supuesto, ya que el capital se deprecia exponencialmente [26] y además del supuesto de inexistencia del mercado de segunda mano para los bienes de capital.

¿Qué podemos decir sobre (7)? Tratemos antes de resolver el sistema hasta donde podemos. En primer lugar integrando (8) podemos hallar μ conociendo su valor inicial. Conociendo μ y suponiendo que F denota rendimientos constantes a escala (es homogénea de grado uno), de (6) tendremos (ya que w y μ son conocidos) el valor de F_L como función de la relación trabajo-capital.

Al saber así F_L y ser F homogénea de grado unitario, tendremos el valor de la relación trabajo-capital y con esto podremos hallar en seguida el valor de F_K aplicando el teorema de EULER ($K\,F_K + L\,F_L = F$). Conociendo así F_K, integramos (9) para obtener λ.

Volvamos entonces a (7). No existe motivo económico para suponer que la inversión bruta se mantendrá siempre positiva. Pero aún si la suponemos positiva, cabe la pregunta ¿podemos tener siempre igualdad en (7)? Si la tenemos, significaría que $p = \lambda$, siendo p como se recordará el precio de los bienes de inversión o sea una constante dada por el mercado independientemente de la acción de la firma. Por otra parte, λ, el precio imputado de los bienes de inversión, fue determinado por

26 En efecto, aún en el caso de inversión bruta cero, esto es, cuando $\dot{K} + d\,K = 0$ tendremos que el stock de capital en cualquier momento será siempre positivo ya que integrando nuestra ecuación tendremos $K_t = e^{-dt}\,K_0$. Significa que si inicialmente el stock de capital histórico es positivo, entonces el stock actual será siempre positivo en cualquier t.

las condiciones tecnológicas del problema. Esto significa que sería una gran coincidencia que ese valor sea compatible con p de modo de tener igualdad. Y si se produce esa coincidencia podemos intuir que sólo será por poco tiempo, de modo que podemos tentativamente deducir el sendero óptimo de expansión de la capacidad física de la firma como sigue.

Si inicialmente el stock de capital K_0 está por debajo del óptimo, entonces la firma alcanzará el valor óptimo instantáneamente con una derivada infinita, lo cual implica que la inversión bruta es discontinua. Una vez alcanzado el valor óptimo el sendero prosigue con inversión bruta nula, con lo cual se inicia un proceso continuo de desinversión hasta que ese límite inferior o "piso" sea alcanzado. Este proceso de inversión bruta nulo se produce mientras λ sea distinto de p. Vale decir que el "salto" en **I** provoca la disminución instantánea de su rentabilidad por lo cual se hace nula hasta que nuevamente $p = \lambda$.

¿Es esta una conclusión irrealista para la política óptima de expansión del capital fijo? No parece serlo bajo las condiciones del modelo, ya que de no existir restricción alguna de crédito para la firma ni costo de ajuste alguno, ésta podrá adquirir inmediatamente en el mercado todo el capital físico que necesita pidiendo prestado a la tasa de interés constante r.

En el caso de inventarios no tenemos este problema de discontinuidad en su sendero dinámico debido a que éstos poseen un límite superior natural dado por la función de producción, ya que el máximo cambio en el stock de inventarios está dado por la tasa de producción: no se puede añadir a los stocks acumulados más que lo producido en el periodo (instantáneo).[27] En la forma general en que se formuló el problema en esta sección, parece evidente que no podemos decir mucho más acerca de los senderos óptimos de K y V y sus interrelaciones debido a que no existe justificación económica para que (7) se cumpla con igualdad. Tampoco podemos "deshacernos" además, de las desigualdades (2) y (3).

Como Arrow admite en el trabajo citado en la página 59 donde trata sólo el stock capital, no existe una solución general del problema y aún en el caso simple que él trata el algoritmo necesario para hallar la estrategia óptima es complicado.

A fin de poder efectuar alguna conjetura sobre el problema que hemos formulado se tratará a continuación de tomar un caso simplificado y tratar de explorar desde allí el caso general.

[27] Conociendo $\dot{S}$ y F se conoce $\dot{V}$ usando (1), e integrando $\dot{V}$ obtenemos el sendero óptimo de inventarios cuyo comportamiento dependerá del curso de S en el tiempo.

Nos preguntamos más precisamente si convendrá a la firma mantener sus stocks históricos V_0 y K_0 a través de su horizonte económico o si llega un momento en que desaparece el *motivo transacciones* y la firma prosigue con inventarios nulos. En caso de ser conveniente mantener ambos stocks positivos queremos conocer los puntos de cambio ("switching points") en los cuales la firma alterna sus inversiones en K y V si resultan *stocks sustitutos,* o las realiza simultáneamente si resultan *stocks complementarios.*

IV. ESTUDIO DE UN CASO SIMPLIFICADO

Como es usual ante un problema relativamente complicado, a menudo es deseable analizar un problema aproximado al original pero cuya solución es más fácilmente obtenible. De esta forma puede lograrse, esperamos, una información cualitativa sobre el comportamiento de la solución general.

La simplificación que nos ocupa consiste en suponer que la función de producción es homogénea de grado unitario y con coeficientes fijos. En otras palabras usando la nomenclatura de las secciones anteriores y conservando los mismos supuestos tendremos:

$$\text{Min } C = \int_0^T \left\{ a \, [X(t) - S(t)] + \frac{w}{b} \dot{X}(t) + \right.$$

$$\left. + \, p \, [\dot{K}(t) + dK(t)] \right\} e^{-rt} \, dt$$

sujeto a las restricciones que siguen:

(12) $\dot{X}(t) \leqslant cK(t)$

(13) $\dot{K}(t) + dK \geqslant 0$

(14) $X(t) \geqslant S(t)$

(15) $X(o) = Xo, \; K(o) = Ko$

$X(T) = V_T + S_T, \; K(T) = K_T$

O sea se trata de minimizar el costo total descontado de producción y de mantenimiento de inventarios. Esta formulación refleja un supuesto fácilmente aceptable. La firma opera ahora con coeficientes de producción fijos, o sea con una función de producción del tipo de X (t) =

$=$ min $[c\, K\, (t),\, b\, L\, (t)]$ donde c y b denotan los coeficientes producto-capital y producto-trabajo, respectivamente.

Como la firma además opera en el mercado y dado que es mucha coincidencia imaginarla permanentemente en el codo de una isocuanta, es razonable admitir ausencia de desempleo de trabajo lo cual queda reflejado en la igualdad estricta de

$$L\,(t) = \frac{\dot{X}\,(t)}{b}$$

de la función objetiva. La desigualdad de la restricción (12) refleja en cambio posibilidad de desempleo del stock de capital. Las relaciones restantes no requieren explicaciones adicionales.

El problema tecnológicamente simplificado de este modo es aún complejo debido al supuesto implícito en (13), es decir que el capital una vez instalado no puede decrecer sino a través de la depreciación.

Por lo tanto como primer paso nos preguntaremos que pasa cuando la firma, que enfrenta una demanda dada pero que varía en el tiempo, puede vender en el mercado su equipo sobrante logrando un precio igual al del equipo nuevo. Es decir cuál será la política óptima de inventarios y de capital fijo cuando la inversión neta puede hacerse negativa. Nos preguntamos específicamente si en tal caso desaparece o no el motivo transacciones para mantener inventarios y la respuesta es obviamente afirmativa. Vale decir que esto nos lleva a concluir que la existencia de un límite inferior a la inversión *es también* un justificativo para mantener inventarios.

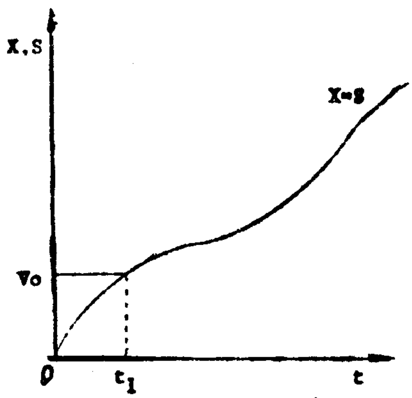

FIGURA Nº 1

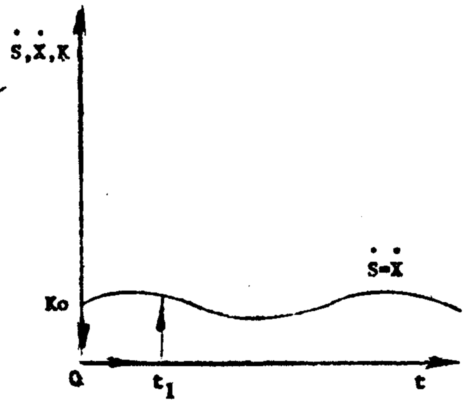

FIGURA Nº 2

Al comienzo de su horizonte de planeación la firma posee stocks iniciales de capital fijo Ko y de inventarios Vo. Hasta el momento t_1 la tasa de producción $\dot{X}$ (t) será cero y la empresa satisface la demanda decumulando sus inventarios iniciales. También venderá en el momento inicial t = o su equipo sobrante para volver a comprar en t_1 todo lo que necesita para producir exactamente lo que puede venderse, i. e., $K(t_1) = \frac{S(t_1)}{c}$. Desde t_1 en adelante usará plenamente su capital e invertirá en forma continua lo suficiente para satisfacer la reposición del capital más el incremento de demanda pero no acumulará inventarios.[28]

El coeficiente capital-trabajo se mantiene siempre fijo ya que en cuanto el capital tiende a ser inutilizado se vende en el acto en el mercado. En el óptimo entonces se tendrá siempre $\dot{X} = c\,K$. En cambio cuando existe el límite inferior de la inversión, el capital que quedaría inutilizado es usado para acumular inventarios.

O sea tenemos en este caso que el costo total será un mínimo cuando el sendero de la producción acumulada en el tiempo es igual al máximo del inventario inicial V_0 y la demanda acumulada en cada t, S (t).

Vemos entonces *que los stocks capital e inventarios resultan sustitutos en el óptimo* en su misión de satisfacer la demanda dada: cuando los inventarios son positivos no se aumenta la capacidad y cuando el stock de capital se aumenta no se produce para inventarios.

Pasemos ahora a analizar el problema cuando existe el límite inferior a la inversión bruta y tratemos de abordar la búsqueda simultánea de las dos políticas óptimas, (de inventarios y capital).

Siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior tendremos en este caso las siguientes condiciones necesarias para el mínimo que nos determinan junto con las restricciones (12) a (15) las variables K (t), V (t), μ (t), λ (t) y $\dot{X}$ (t).

$$(16) \qquad \dot{\mu} \leqslant r + a + r\frac{v}{b}$$

28 En otras palabras, la inversión en equipo será suficiente para satisfacer el cambio en la tasa de ventas y la reposición, $I(t) = \frac{1}{c}[\ddot{S}(t) + d\,\dot{S}(t)]$ para todo $t > t_1$.

(17) $\dot{\lambda} = (r + d)\,\lambda + c\,\mu - (r + d)\,p$

En (17) tenemos siempre igualdad estricta ya que, debido al supuesto sobre la reposición del equipo de la firma, el stock de capital será siempre positivo.[29]

La interpretación económica de los multiplicadores μ y λ cambia ligeramente cuando hay coeficientes fijos de producción ya que μ (que controla la utilización de la capacidad productiva) se interpreta ahora como el precio imputado del producto en exceso del salario. En otras palabras, μ es el valor imputado de la capacidad productiva por unidad de producto. Por otro lado el precio imputado de la inversión es $(p - \lambda)$, esto es, la inferencia entre el precio de mercado de los bienes de inversión p, y la variable dual λ. Para un óptimo, λ debe ser no-negativo y sólo cuando $\lambda = 0$, la inversión en capital fijo será positiva.

A fin de estudiar el comportamiento del sistema completo con las desigualdades, dibujemos primero las trayectorias correspondientes a las variables duales μ y λ,[30] y analicemos las distintas regiones en términos de las correspondientes variables originales económicas.[31]

El punto Z del Gráfico Nº 3, que denota el cruce de las soluciones estacionarias ocurre en el plano negativo y por lo tanto no tiene interés económico. No obstante, representa el origen de las direcciones características (trayectorias rectas) y de la familia de trayectorias curvilíneas que si poseen sentido económico como veremos.

La forma de las trayectorias es independiente del sendero de ventas, pero el sistema se mueve siguiendo a S (t). Cuando se produce el punto de cambio ("switch") de una trayectoria a otra es función también de la forma en que varía S (t).

Notemos en primer lugar que la empresa operará dentro de la zona D. Si estuviera en la zona A, el valor imputado por los bienes de inversión

29 Ver nota al pie de pág. 26.
30 Ver HUREWICZ, W., *Lectures on Ordinary Differential Equations*, The M. I. T. Press, 1964, pág. 75.
31 Las raíces características reales, distintas y positivas son $p_1 = r + d$ y $p_2 = r$, las que describen por lo tanto *un nodo*.

Las direcciones características correspondientes son $\binom{\lambda}{u}_1 = \binom{1}{0}$ y $\binom{\lambda}{u}_2 = \binom{1}{d/c}$

Las soluciones estacionarias son $\mu = -\left(\dfrac{w}{b} + \dfrac{a}{r}\right)$ y $\lambda = \dfrac{-c}{r+d}\,\mu + p$. Con estos elementos podemos dibujar las trayectorias de la figura nº 3.

$(p - \lambda)$ sería negativo dado que la variable dual λ excede el precio de mercado de esos bienes, p. Notemos que λ no puede ir hacia abajo desde la zona A, ya que las trayectorias van hacia arriba y hacia la derecha. Además las flechas del sistema "relaxed", esto es, cuando los inventarios son nulos de modo que podamos tener una desigualdad estricta en (16), van hacia la izquierda pero nunca hacia abajo.

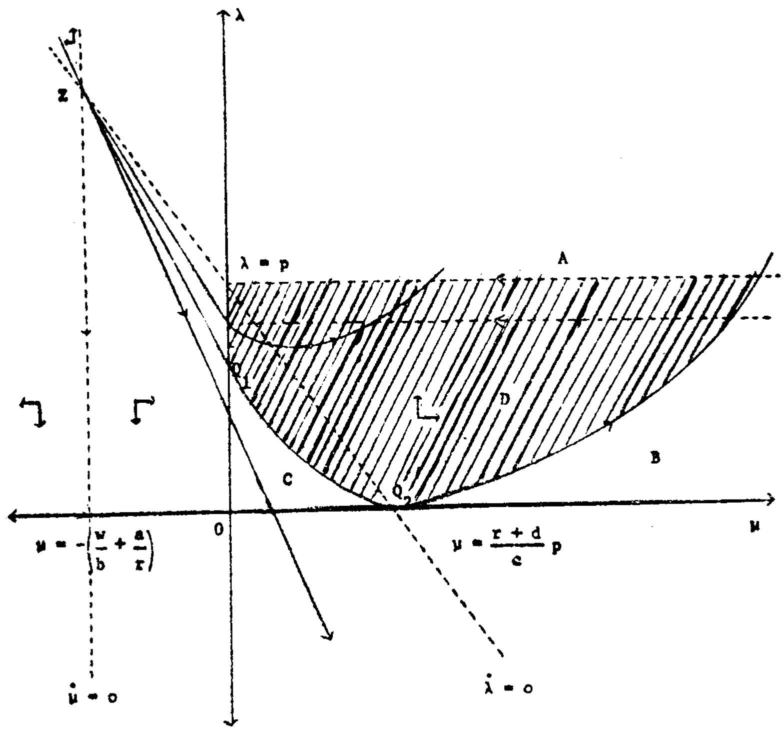

FIGURA Nº 3

¿Qué pasa si estamos en la zona B? La trayectoria que pasa Q_2 en el eje horizontal es la última para la cual el valor imputado por los bienes de inversión es menor o igual que su precio de mercado, esto es, para la cual λ es no-negativa. La trayectoria siguiente entra en zona B pero implica una λ negativa. O sea, si λ fue una vez positiva, el sistema nunca entrará en la zona B.

En cambio la firma puede entrar en la zona C pero lo hará durante un intervalo muy pequeño ya que las direcciones la llevan hacia abajo y derecha con lo cual entra a la parte negativa del plano.

O sea, si estudiamos lo que sucede durante el horizonte económico de planeación de la firma, vemos que la zona rayada D es la relevante.

Supongamos que la empresa está durante un tiempo en el punto Q_2, donde $\lambda = 0$ y $\mu = \dfrac{r + d}{c}\,p$. Significa que la inversión bruta podrá ser positiva en ese intervalo ya que el valor imputado de los bienes de inversión iguala el precio de mercado de los bienes de inversión. Por otra parte, como en Q_2 tenemos una desigualdad estricta en (16), la variable correspondiente del "primal", el stock de inventarios, será nulo. Significa por lo tanto que será beneficioso para la firma invertir sólo lo necesario para satisfacer la demanda presente. Los stocks capital e inventarios resultan entonces sustitutos durante el intervalo que la firma permanece en Q_2.

Si la firma previera que la demanda no decrecerá en el tiempo, entonces permanecerá para siempre en Q_2 invirtiendo y produciendo únicamente para satisfacer la demanda presente. El motivo transacciones para mantener inventarios desaparecería y tendríamos el resultado tradicional: los inventarios son nulos y el aumento en el stock capital sólo excede la reposición en el aumento de la demanda presente.

Supongamos en cambio que se prevé una declinación en la demanda estando en Q_2, declinación que ocurrirá efectivamente alrededor de Q_1. Nos preguntamos cual será la forma óptima de reaccionar por parte de la firma. Previendo esa declinación le convendrá invertir en block en forma discontinua de modo de llegar al pico próximo de demanda con un stock de capital más bajo que si siguiera el sendero de ventas. Esta conducta está representada en la siguiente figura Nº 4 donde el eje horizontal denota el tiempo, gráfico que reproduce el punto Q_2 de la figura Nº 3 como punto de partida.

Vemos que durante este intervalo después de invertir una cantidad que aumenta el stock de capital en forma discontinua indicada por las pendientes diferentes de las dos curvas que se encuentran en Q_2, la firma produce en exceso de la demanda presente acumulando inventarios y utilizando plenamente su capacidad productiva.

Si la empresa en cambio no acumulara inventarios en este intervalo y produjera solo para satisfacer la demanda presente invirtiendo en forma continua para ese fin, alcanzaría el próximo pico de demanda con un stock de capital mucho mayor.

En la figura Nº 4 esta segunda alternativa se representa por la línea de puntos que indica la curva de capacidad acumulada, $\int cK$. Dado que

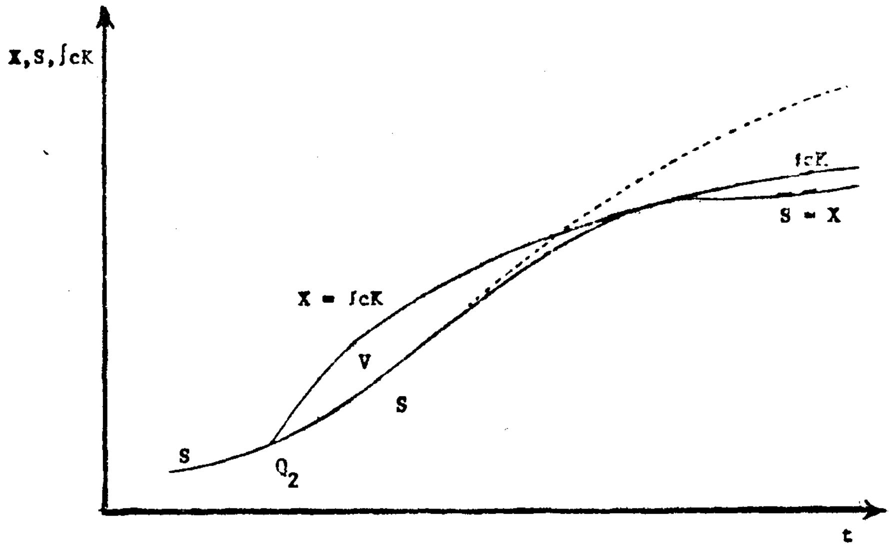

FIGURA Nº 4

intersecta la curva previa de capacidad acumulada desde abajo, debe tener una pendiente más alta en el punto de intersección denotando así un nivel de capacidad mayor. Estos senderos corresponden a la trayectoria en el cuadrante (λ, μ) que pasa por Q_2 en la frontera entre las zonas B y D en la figura Nº 3. De este modo se alcanza la recta $\lambda = r$ coincidiendo con la última parte del pico de demanda donde los inventarios se agotan.

Cuando los inventarios se hacen cero, el sistema (16) – (17) se "relaja" ya que no es más necesario tener igualdad en (16) debido a la propiedad de "slackness" complementaria del sistema dual.[32]

32 Esto es, si una restricción es satisfecha con una desigualdad en la solución del problema dual, la variable correspondiente en la solución del primal será cero. Y si una restricción se satisface con igualdad estricta en la solución del problema dual la variable original correspondiente tendrá usualmente un valor positivo en la solución del primal. Ver DORFMAN, SAMUELSON y SOLOW, *Linear Programming and Economic Analysis*, Mc Graw Hill, 1958, pág. 44.

Excluyendo el caso poco probable en que el sendero de ventas coincide con el sendero decreciente de la capacidad, esto es, en el cual la demanda decrece a la tasa de depreciación del stock de capital, el valor imputado, por el uso de la capacidad, μ, debe hacerse cero instantáneamente de modo de permitir capacidad excedente. Esto puede ser considerado como un salto de la trayectoria máxima hacia el eje vertical, siguiendo la flecha de la figura Nº 3. Este salto en μ es posible dado que su tasa de cambio en el tiempo, $\dot{\mu}$, no tiene ningún límite inferior. La única restricción sobre el valor imputado por el uso de la capacidad es su no-negatividad. Esto no puede suceder con λ ya que $\dot{\lambda}$ no puede variar arbitrariamente dado que el stock de capital no puede hacerse cero en este modelo. La ecuación (17) no puede ser "relajada".

Tenemos entonces que la empresa llega al eje vertical λ con capacidad excedente. Proseguirá a lo largo del eje vertical con inventarios e inversión bruta nulos hasta el final del intervalo de declinación de la demanda.

La firma está ahora en Q_1 (ver la figura principal Nº 3 y la figura Nº 5). Antes que finalice el período de declinación de la demanda, la firma

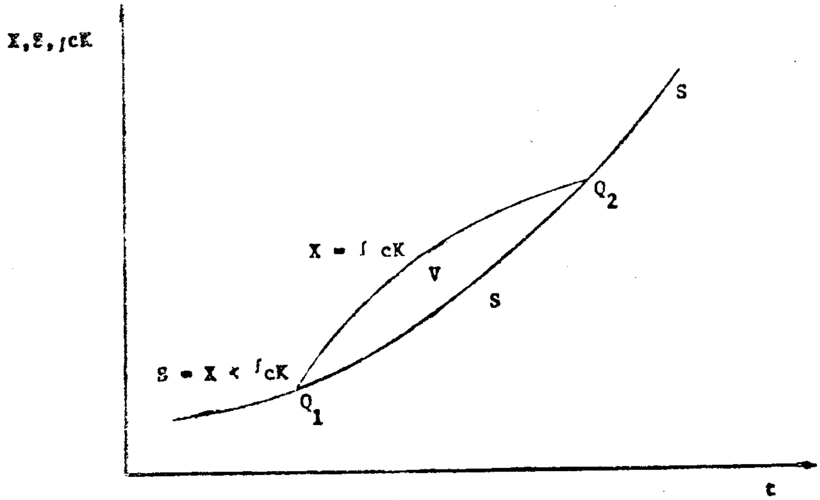

FIGURA Nº 5

llevará al máximo el uso de su capacidad productiva, produciendo para inventarios en exceso de la demanda presente y con inversión bruta nula en su equipo de capital. La existencia de capacidad excedente un instante antes de alcanzar el punto Q_1 puede verse en la figura Nº 5 en la diferencia de las pendientes de las dos curvas que se encuentran en ese punto. Es entonces óptimo demorar el momento de inversión bruta positiva hasta que los inventarios se agoten y esto ocurre en Q_2.

De este modo llegamos a Q_2 y se inicia un nuevo ciclo, siempre y cuando la demanda sea tal que convenga seguir la frontera de la zona D. Q_2 es entonces el único intervalo de tiempo durante el cual la inversión bruta puede ser positiva. En cambio a lo largo del punto Q_1 la firma lleva el uso de su capacidad productiva (en exceso hasta ese momento) al máximo.

Hasta ahora hemos seguido la trayectoria máxima. Ahora podemos preguntarnos qué sucede dentro del área rayada D de la figura Nº 3. Esto nos lleva a considerar tres casos especiales:

1. Cuando el pico de ventas es de corta duración. Entonces la firma podrá entrar en Q_2 con inventarios positivos. Si los inventarios son positivos la ecuación (16) no puede ser relajada, el sistema dual no posee un punto de cambio y la firma debe seguir su trayectoria sin quedarse en Q_2. Por consiguiente debe seguir la trayectoria máxima sin serle permitido invertir en un intervalo positivo. No obstante, la firma puede aprovechar su paso por Q_2 invirtiendo en capital fijo *en ese instante,* de modo que la capacidad aumenta en forma discontinua, anticipándose de este modo la declinación de la demanda, como en el caso general. Este es el único caso en que la firma *invertirá en capital fijo mientras los inventarios son positivos,* esto es, ambos stocks resultan complementarios en su papel indirecto de satisfacer la demanda final.

Podemos ver esto en la figura Nº 6 que consiste en una superposición de las figuras números 4 y 5. El ciclo en las ventas es tan corto que las dos puntas Q_2 coinciden sin tener tiempo de anular los inventarios. Otra vez es ésta la forma óptima de alcanzar el pico de demanda.

2. Cuando el pico de demanda es más corto que en el primer caso, de modo que la capacidad productiva de la firma al llegar al eje vertical, alcanza a satisfacer la demanda. En tal caso la firma no seguirá la trayectoria máxima y dejará el eje vertical produciendo a capacidad plena antes de llegar a Q_1, siguiendo la trayectoria menor que pasa arriba de Q_2 (figura Nº 3). En este caso la firma no entra en Q_1 ni en Q_2 con lo cual no amplía su capacidad productiva en este ciclo.

3. Cuando el período de declinación de ventas es corto, en cuyo caso los inventarios pueden hacerse cero mucho antes que en el caso de

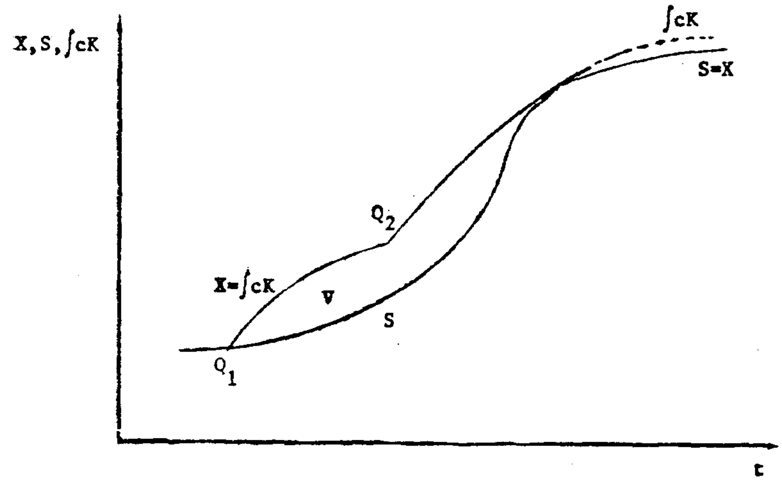

FIGURA Nº 6

seguir la trayectoria máxima. La firma no llegará entonces al eje vertical ni a Q_1 intersectando la trayectoria Q_1 Q_2 en un punto debajo de Q_1. No habrá período de capacidad excesiva dado que se acumulan inventarios en seguida con la producción a nivel de capacidad plena. El sistema seguirá también una trayectoria menor, dado que puede saltar hacia la izquierda mucho antes que el valor imputado por los bienes de inversión $(p - \lambda)$, se hace cero de modo que λ es menor que el precio de mercado p.

V. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se ha tratado de extender el análisis tradicional de la firma estudiando su comportamiento óptimo dinámico cuando enfrenta las alternativas de invertir en dos tipos de stocks: inventarios y capital fijo.

El objetivo de la firma en este análisis fue la búsqueda de la forma óptima de satisfacer una norma ("pattern") de ventas dado y variable en el tiempo dentro de su horizonte económico finito de planeación (t_0, T).

Suponiendo que la función de producción de la firma es homogénea de grado unitario y con coeficientes variables, analizamos las condiciones necesarias para el óptimo. Estas nos permitieron saber, por un lado cuando es beneficioso para la firma invertir en inventarios adelantando de ese modo su producción para satisfacer el incremento operado en la demanda de instantes posteriores. Y por el otro lado, también se conocieron las condiciones bajo las cuales es beneficioso en el margen adelantar o posponer en el tiempo el incremento de la capacidad productiva para igual fin. En esta sección, se vió, que el sendero de inventarios es continuo lo mismo que su derivada, (aún en el caso en que inicialmente se está fuera del óptimo) ya que la inversión en este tipo de stock posee un máximo natural dado por la función de producción. No sucede así con el sendero de capital fijo ya que la inversión en este stock no posee en competencia perfecta límite superior alguno justificable económicamente. Esta sección no pudo decirnos mucho acerca de la interrelación de los dos stocks en el tiempo; esto es, acerca del grado de su complementariedad o sustitución en su función indirecta de satisfacer la demanda dada.

Cuando la función de producción posee coeficientes tecnológicos constantes y la inversión neta puede ser negativa (vendiendo el equipo sobrante en un mercado perfecto de segunda mano), se llegó a la conclusión de que desaparece el motivo transacciones para mantener inventarios. Ambos stocks resultan sustitutos en el óptimo en su misión indirecta de satisfacer la demanda.

En cambio en el caso más relevante en que el cambio positivo en el stock de capital posee un límite inferior determinado por la depreciación, esa conclusión de sustitución en los stocks se mantiene la mayor parte del tiempo. Solo en casos más esporádicos, dependiendo del curso de la demanda en el tiempo y de los precios relativos de inversión y mantenimiento de inventarios, se tendrá entre ambos stocks una relación de complementariedad.

Con estas conclusiones es posible conjeturar qué sucede, cuando los coeficientes técnicos son variables en forma neoclásica en ausencia de un mercado de segunda mano para los bienes de capital. Es probable que en este caso el empleo fluctúe en mayor grado, ya que el stock de capital se torna más flexible. En consecuencia, los niveles de capacidad y de inventarios serían menores, ya que las fluctuaciones de demanda podrían ser suavizadas con fluctuaciones en el empleo. Dado que en este caso toda la capacidad no usada tiene un costo de oportunidad igual a cero, el empleo fluctuará no solo debido a cambios en la demanda sino *también debido a un efecto substitución causado por el costo de oportunidad nulo del equipo no vendible.*

Las rectas de isocosto poseen un codo al nivel de la capacidad existente.

DAS UNTERNEHMEN UND SEINE ZEITLICHEN ENTSCHEIDUNGEN: WARENBESTANDE UND DAUERANLAGEN

Zusammenfassung

Es wird hier versucht, die traditionelle Analyse des Unternehmens auszuweiten, durch eine Untersuchung seines optimal-dynamischen Verhaltens in Fällen von Alternativ-Anlagen in zwei Arten von Veständen: Warenbestand und Daueranlagen.

Das Ziel des Unternehmens in dieser Untersuchung war die Suche nach der optimalen Art und Weise, ein gegebenes Absatb-Modell zu befriedigen, das zeitlich innerhalb seines wirtschaftlichen Planungs-Horizonts veränderlich ist.

Wenn die Erzeugertätigkeit beständige technologische Koeffizienten aufweist. und die Anlage negativ sein kann (durch Veräusserung von überschüssigen Maschinen in einem ideal-perfekten Gebrauchtwaren-Markt) kam man zu der Schlussfolgerung, dass dann das Geschäftsmotiv zur Erhaltung von Warenbeständen verschwindet. Beide Arten von Anlagen ergaben sich optimalerweise als gegenseitig ersetzbar in ihrer mittelbaren Aufgabe, die Nachfrage zu befriedigen.

Andererseits aber, in dem häufiger zutreffenden Fall in dem positive Umwandlung ein unteres Limit hat, das durch die Entwertung bestimmt wird, bleibt jene Schlussfolgerung der Anlage-Ersetzbarkeit meist bestehen. Nur in ganz vereinzelten Fällen, abhängig vom zeitlichen Ablauf der Nachfrage und von den relativen Kosten von Daueranlagen und Erhaltung von Warenbeständen, wird sich zwischen beiden Arten von Anlagen eine Komplementär-Beziehung ergeben.

LA FIRME ET SES DECISIONS DANS LE TEMPS: INVENTAIRES ET CAPITAL FIXE

Résumé

On a essayé d'etendre l'analyse traditionnelle de la firme en étudiant son comportement optimum dynamique quand elle affronte les alternatives d'invertir sur deux types de stocks: inventaires et capital fixe.

Le but de la firme dans cette analyse a été la recherche de la forme optimum de satisfaire une norme ("pattern") de ventes donnée et variable dans le temps à l'intérieur de son horizon économique fini de planeation.

Quand la fonction de production possède des coéfficients technologiques constants et l'inversion nette peut'elle être négative (en vendant l'équipement excédent dans un marché parfait de seconde main), on a abouti à la conclusion que le motif transactions pour maintenir inventaires, disparaît. Les deux stocks résultent substituts dans l'optimum selon leur mission indirecte de satisfaire la demande.

Mais dans le cas le plus remarquable, à savoir quand l'échange positif dans le stock de capital possède une limite inférieure determinée par la dépréciation cette conclusion de substitution dans les stocks se maintient pendant la majeure partie du temps. Seulement dans des cas plus sporadiques, en dependant du cours

de la demande dans le temps et des prix relatifs d'inversion et conservation d'inventaires, on aura entre les deux stocks un rapport de caractère complementaire.

THE FIRM AND ITS OPTIMAL DECISIONS OVER TIME: INVENTORIES AND FIXED CAPITAL

Summary

The paper tries to extend the traditional analysis of the firm by studying its optimal dynamic behavior when facing the alternatives to invest in two types of stocks, inventories and fixed capital.

The objective of the firm in this analysis was the search of the optimal way of satisfying a given pattern of demand which changes over time within the finite planning horizon.

When the production function has fixed technological coefficients and net investment can be negative (by selling any excess equipment in a perfect second hand market) the conclusion was that the transactions motive for holding inventories disappears; both stocks turned out to be substitutes.

In the more relevant case in which investment in fixed capital has a lower limit determined by depreciation, the conclusion about substituton is maintained most of the time. Only in special cases, depending on the course of demand over time and on prices, a relation of complementarity will exist.

LA FIRMA E LE DECISIONI NEL TEMPO: INVENTARI E CAPITALE FISSO

Riassunto

Si ha trattato di estendere l'analisi tradizionale della firma osservando il suo comportamento ottimo dinamico quando affronta le alternative d'investire in due tipi di stocks: inventari e capitale fisso.

L'obiettivo della firma in queste analisi è stato la ricerca della forma ottima di sodisfare una norma ("pattern") di vendite data e variabile nel tempo all'interno del suo orizzonte economico finito di pianeazione.

Quando la funzione di produzione possiede coefficienti tecnologici costanti e l'investimento netto può essere negativo (vendendo l'equipaggiamento soverchio in un mercato perfetto di seconda mano), si arrivò alla conclusione che scompare il motivo transazioni per conservare inventari. Ambidue stocks risultano sostituti nel ottimo in sua missione indiretta di sodisfare la domanda.

Però nel caso più rilevante in cui il cambio positivo nel stock di capitale possiede un limite inferiore determinato dal deprezzamento, quella conclusione di sostituzione nei stocks rimane la maggiore parte del tempo. Soltanto in casi più sporadichi, dipendendo del corso della domanda nel tempo e dei prezzi relativi d'investimento e mantenimento d'inventari, si avrà fra ambidue stocks una rilazione di complementarietà.