

Thinness 2 condicionada a órdenes de co-bipartición

Ayelén Dinkel¹[0009-0005-5753-6468], Flavia
Bonomo-Braberman^{1,2}[0000-0002-9872-7528] y Eric
Brandwein^{1,2}[0009-0003-2559-7173]

¹ Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Departamento de Computación. Buenos Aires, Argentina.

{adinkel,fbonomo,ebrandwein}@dc.uba.ar

² CONICET-Universidad de Buenos Aires. Instituto de Investigación en Ciencias de
la Computación (ICC). Buenos Aires, Argentina.

Resumen En este trabajo nos enfocamos en la caracterización por patrones prohibidos de las clases de grafos definidas por su *thinness*, un parámetro de ancho definido por Mannino, Oriolo, Ricci y Chandran. Concretamente, trabajamos en la caracterización por patrones prohibidos minimales de la clase de grafos co-bipartitos 2-thin condicionados. Para llegar a dicha caracterización definimos, en este trabajo, los conceptos de orden bisagra y representación 2-thin condicionada. El primer concepto define un ordenamiento de los vértices a partir de su orden y partición 2-thin; y el segundo define restricciones en dicho orden. Logramos identificar una propiedad general para grafos con *thinness* a lo sumo 2 con la cual probamos que, dado un orden bisagra asociado a una representación 2-thin, definir dos clases partiendo ese orden en cualquier punto que para la primera clase defina un orden canónico de intervalos y para la segunda clase el reverso de un tal orden, produce otra representación 2-thin cuyo orden bisagra es el mismo. Con dicho resultado probamos que, dado un grafo co-bipartito 2-thin condicionado, existe una representación 2-thin del grafo con orden bisagra condicionado y tal que cada clase es un completo. Además obtuvimos que las aristas incidentes a las dos clases inducen un bigrafo de intervalos.

Palabras clave: Thinness, co-bipartitos, patrones prohibidos

Thinness 2 conditioned to co-bipartition orderings

Resumen In this work, we focus on the characterization by forbidden patterns of the classes of graphs defined by their *thinness*, a graph width parameter defined by Mannino, Oriolo, Ricci, and Chandran. Specifically, we work on a minimal forbidden pattern characterization of the class of conditioned 2-thin co-bipartite graphs. To reach such a characterization, we define the notions of hinge order and conditioned 2-thin

representation. The first concept defines a vertex ordering based on its 2-thin order and partition, while the second introduces restrictions on that order. We identify a general property of graphs with thinness at most 2, showing that given a hinge order associated with a 2-thin representation, splitting that order at any point to define two classes—where the first follows a canonical interval order and the second follows the reverse of such an ordering—yields another 2-thin representation with the same hinge order. Using this result, we prove that for any conditioned 2-thin co-bipartite graph, there exists a 2-thin representation with a conditioned hinge order such that each class forms a clique. Additionally, we obtain that the edges between the two classes induce an interval bigraph.

Keywords: Thinness, co-bipartite, forbidden patterns.

1. Introducción

Gran parte de los problemas de optimización sobre grafos son computacionalmente difíciles. Para estos problemas, resulta natural preguntarse: *¿Para qué subclases de grafos el problema puede resolverse de forma eficiente y para cuáles es intrínsecamente difícil?* Saber que una familia de grafos tiene un *ancho acotado* ha demostrado ser sumamente útil para diseñar algoritmos eficientes, en general utilizando programación dinámica, para problemas como coloreo de grafos o conjunto independiente máximo (Cygan et al., 2015). Más aún, en muchos casos se han logrado resultados algorítmicos de aplicación muy general, conocidos como *metateoremas*. Un metateorema tiene la forma: *“si un problema puede ser expresado en tal lenguaje o con este tipo de restricciones: [tipo correspondiente], entonces puede ser resuelto en tiempo polinomial para grafos de [ancho correspondiente] acotado”*.

En este trabajo estudiamos el parámetro de ancho llamado *thinness*, definido por Mannino, Oriolo, Ricci y Chandran en 2007 en el marco de resolver el problema de asignación de frecuencias (FAP) en redes GSM (Sistema General de Comunicación Móvil), el cual consiste en asignar frecuencias de transmisión a los transmisores de una red inalámbrica, con el fin de minimizar el nivel general de interferencia, ya que es un aspecto importante para aumentar la calidad del servicio (Mannino et al., 2007). Tanto el reconocimiento como la caracterización de clases de grafos definidas por su *thinness* presentan desafíos interesantes. Con respecto al reconocimiento, continúa abierta la complejidad del reconocimiento de grafos k -thin para k fijo y para la variante propia. Desde un punto de vista estructural, uno de los objetivos naturales que surge es el siguiente:

Caracterizar por patrones prohibidos las clases de grafos definidas por su *thinness*.

Para acercarnos a este objetivo comenzamos analizando la clase de los co-bipartitos con *thinness* 2.

1.1. Contexto previo

Como antecedentes, caracterizaciones completas por patrones y por subgrafos inducidos prohibidos se conocen para los grafos de thinness y thinness propia 1 (grafos de intervalos y de intervalos propios, respectivamente) (Lekkerkerker & Boland, 1962; Roberts, 1969). Una caracterización completa por subgrafos inducidos prohibidos se conoce para la thinness de cografos (Bonomo & De Estrada, 2019), para los árboles de thinness propia a lo sumo 2 (Maqueda, 2023), y una caracterización estructural para la thinness de árboles (Brandwein & Sansone, 2022). Caracterizaciones por patrones prohibidos de grafos cuya thinness o variantes de la thinness es a lo sumo 2 (Brito, 2020), se utilizaron como base para los avances en este trabajo.

2. Definiciones y propiedades

Todos los grafos en este trabajo son finitos, no dirigidos y no tienen bucles ni aristas múltiples. Usamos $E(G)$ para aristas y $V(G)$ para vértices.

Un grafo H es un *subgrafo* de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G *inducido* por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tienen ambos extremos en X .

Un *trigrafo* es una 4-upla $(V(T), E(T), N(T), U(T))$ donde $V(T)$ es el conjunto de vértices y cada par no ordenado de vértices pertenece a uno de los tres conjuntos disjuntos $(E(T), N(T), U(T))$ llamados respectivamente aristas, no-aristas y aristas no definidas. Un grafo G es una *realización* de un trigrafo T si $V(G) = V(T)$ y $E(G) = E(T) \cup U'$ donde $U' \subseteq U(T)$. Cuando representamos un trigrafo se dibuja con líneas sólidas las aristas, con líneas punteadas las no aristas y nada para las aristas no definidas.

Como $(E(T), N(T), U(T))$ es una partición de los pares desordenados, es suficiente proporcionar dos de estos conjuntos para definir el trigrafo, y en general definiremos un trigrafo dando solo los conjuntos E y N , en los cuales los pares de vértices se escriben como ' vw '. Por ejemplo el trigrafo de la Fig. 1 se lo describe como $T' = (\{1, 2, 3, 4\}, \{13, 23\}, \{24\})$ donde el primer conjunto corresponde a los vértices $V(T')$, el segundo a los pares de vértices que pertenecen a $E(T')$, y por último los pares de vértices en $N(T')$.

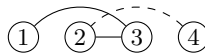


Figura 1: Trigrafo T'

Un trigrafo T' es un *subtrigrafo* de un trigrafo T si $V(T') \subseteq V(T)$, $E(T') \subseteq E(T)$ y $N(T') \subseteq N(T)$.

Un *grafo* (resp. *trigrafo*) *ordenado* es un grafo (resp. trigrafo) que tiene asociado un orden total de sus vértices. Llamamos *patrón* a un trigrafo ordenado.

Un *subgrafo ordenado* H de un grafo ordenado G es un subgrafo H de G , cuyo orden asociado es el orden total asociado a G restringido a $V(H)$. En el caso de los trigrafos, lo llamamos *subpatrón*.

Decimos que un grafo ordenado es una *realización* de un patrón si comparten el mismo conjunto de vértices y el mismo orden lineal, y el grafo es una realización del trigrafo. Cuando, en un grafo ordenado, ningún subgrafo inducido ordenado es la realización de un patrón dado, decimos que el grafo ordenado *evita* el patrón. Si una clase de grafos está definida por la existencia de un orden de los vértices que evita unos patrones dados, se dice que admite una *caracterización por patrones prohibidos*. Y si existe una familia de patrones $\mathcal{F}$ tal que cada grafo de la clase, ordenado, evita todos los patrones $\mathcal{F}$, se la llama $ORD(\mathcal{F})$.

Un conjunto de patrones es *minimal* cuando no existen dos patrones dentro del conjunto tal que uno es subpatrón del otro.

Un *orden canónico de intervalos* es un ordenamiento de los vértices que evita el patrón de la Fig. 2.



Figura 2: Patrón prohibido de la clase de intervalos. (Feuilloley & Habib, 2021)

Definición 1. (Mannino et al., 2007) Un grafo G es k -thin si existe un ordenamiento de los vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ y una partición $V_1, \dots, V_k$ de $V(G)$ en k clases tal que para cada tripla (r, s, t) con $r \leq s \leq t$, si v_r y v_s se encuentran en la misma clase y $v_t v_r \in E(G)$, entonces $v_t v_s \in E(G)$.

La *thinness* de un grafo G es el menor número k para el cual G es un grafo k -thin, y se denota como $thin(G)$. Cuando un ordenamiento y una partición verifican la definición de k -thin decimos que el ordenamiento y la partición son *consistentes*. Usualmente, en la representación k -thin de un grafo, los vértices están ordenados de abajo hacia arriba y las clases están alineadas verticalmente. Se puede ver un ejemplo en la Fig. 3.

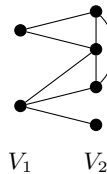


Figura 3: Una representación 2-thin de un grafo.

2.1. Notación

Vamos a trabajar relacionando dos órdenes distintos de vértices: el orden y la partición consistentes dados por la representación 2-thin, descrito en la Definición 1, y el orden dado por la clase $ORD(F)$ de la familia de patrones F . Para relacionar dichas definiciones, definimos el *orden bisagra* de la siguiente forma:

Definición 2. *Dada una representación 2-thin de un grafo, su orden bisagra se forma tomando el orden creciente de la primera clase y luego el orden decreciente de la segunda clase. Llamamos corte bisagra a la separación entre los vértices de la primera clase y los de la segunda clase.*

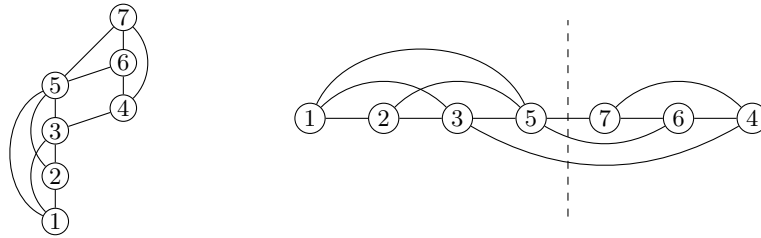


Figura 4: Representación 2-thin de un grafo, con los vértices menores abajo y los mayores arriba, y su orden bisagra. Los vértices $\{1, 2, 3, 5\}$ pertenecen a la primera clase, y los vértices $\{4, 6, 7\}$ pertenecen a la segunda.

Otra definición utilizada para este trabajo es la de *thinness condicionada*.

Definición 3. *Un grafo G es 2-thin condicionado a un patrón P si admite una solución consistente en 2 clases para $V(G)$ tal que G ordenado según el orden bisagra evita el patrón P . Si el patrón puede ser deducido por contexto, diremos directamente que G es 2-thin condicionado, y a un orden bisagra que evita el patrón P lo llamaremos orden bisagra válido.*

3. Patrones prohibidos para thinness 2 condicionada

3.1. Teoremas de referencia

Para abordar este trabajo partimos de un resultado de Bonomo y Brito, que mostraron una caracterización por patrones prohibidos de los grafos 2-thin. Reformulando dicha caracterización con notación que utilizaremos en este trabajo, el resultado nos asegura la siguiente equivalencia:

Teorema 1 (Bonomo-Braberman y Brito, 2023, Teorema 25). *Definiendo los patrones $Z_6 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{13, 24\}, \{23\})$, $Z_7 = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{13, 35\}, \{23, 34\})$, $Z_8 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{13, 46\}, \{23, 45\})$, y $Z_9 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{14, 34, 36\}, \{24, 35\})$. Sea G un grafo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) Para toda representación 2-thin de G , su orden bisagra asociado evita los patrones Z_6, Z_7, Z_8, Z_9 .
- (ii) Todo ordenamiento de los vértices de G que evite los patrones Z_6, Z_7, Z_8, Z_9 es bisagra para alguna representación 2-thin consistente de G .


 Figura 5: Z_6

 Figura 6: Z_7

 Figura 7: Z_8

 Figura 8: Z_9

A partir de esta equivalencia buscamos caracterizar los grafos 2-thin dentro de una clase particular de grafos. Para ello trabajamos con las clases de familias definidas por un patrón prohibido de tres vértices (Feuilloley & Habib, 2021). Elegimos trabajar en base al orden bisagra y no a su orden natural ya que, con el orden bisagra, tenemos caracterizados a los grafos con thinness 2 con solo 4 patrones prohibidos.

4. Análisis de las clases definidas por un patrón prohibido de 3 vértices

En primer lugar, como los patrones Z están definidos con más vértices se debe listar cada subconjunto ordenado de tres vértices, ya que si prohibimos un subpatrón formado por un subconjunto de vértices ordenados queda prohibido el patrón que lo contiene. De esta forma se obtiene una lista de 11 subpatrones, los cuales se pueden observar en la Fig. 9. Ahora podemos comparar estos patrones con las clases de grafos definidas por su patrón prohibido de tres vértices (Feuilloley & Habib, 2021).

Comenzamos descartando las clases en las que la thinness ya fue estudiada anteriormente. En primer lugar, descartamos los patrones que definen a la clase de grafos de intervalos, que son aquel nombrado como INTERVAL y aquel llamado MIRROR-INTERVAL, ya que es sabido que esta clase es exactamente la clase de grafos 1-thin (Mannino et al., 2007). También fueron descartadas todas las subclases de los grafos de intervalos. Luego todas las clases relacionadas con los bosques, dado que ya se estudió la thinness (Brandwein & Sansone, 2022) y los subgrafos inducidos prohibidos de los árboles. Entonces la clase resultante, para comenzar la caracterización por subpatrones prohibidos, fue la clase de los grafos co-bipartitos caracterizada por el patrón prohibido que se observa en la Fig. 10.

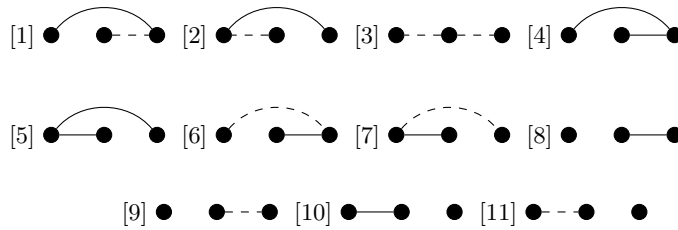


Figura 9: 11 subpatrones



Figura 10: Patrón prohibido de los co-bipartitos

Por definición sabemos que la clase de los grafos co-bipartitos es la clase de los complementos de grafos bipartitos, y que existe una partición de los vértices tal que cada subconjunto forma un completo. En particular al tomar la caracterización de esta clase dada por el patrón prohibido de la Fig. 10 los órdenes que evitan ese patrón son aquellos en los que los vértices de un completo preceden a los del otro completo, para alguna partición en dos completos.

5. Caracterización condicionada a órdenes de co-bipartición

Con la clase a estudiar ya elegida y partiendo de los patrones del Teo. 1, obtuvimos la familia de patrones A que caracterizan a los co-bipartitos con thinness 2 condicionada de la siguiente manera.

Comenzamos con el patrón prohibido para co-bipartitos ($\{1, 2, 3\}, \emptyset, \{12, 23\}$) y lo llamamos A_1 . Al tener este primer patrón prohibido tomamos los patrones de las figuras (Fig. 5 a Fig. 8) y estudiamos sus conjuntos $U(Z_i)$ para $i \in \{6, \dots, 9\}$. Recordemos que dichos conjuntos son los pares de vértices con aristas no definidas, lo que quiere decir que tanto si esa arista está o no está tiene que estar prohibido dicho patrón. Tenemos que seguir prohibiendo esos casos, buscando el conjunto minimal que caracterice nuestra clase.

Definimos los patrones Z'_i para $i \in \{6, \dots, 9\}$ con los mismos vértices, aristas y no aristas que Z_i . Para cada par de vértices de $U(Z_i)$ correspondiente, analizamos si pertenecen al conjunto de aristas o no aristas del Z'_i .

Analizamos Z_6 y $U(Z_6) = \{12, 14, 34\}$. Si alguno de los pares $\{12, 34\}$ pertenece a $N(Z'_6)$, como se muestra en la Fig. 11, el patrón Z'_6 tiene como subpatrón a A_1 . Esto contradice que sea un subpatrón prohibido, y entonces los pares (12) y (34) pertenecen al conjunto $E(Z'_6)$. Luego para el par (14) tenemos que prohibir los 2 casos que se muestran en las Fig. 12 y Fig. 13. De esta forma nos queda definido $A_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 13, 24, 34\}, \{23\})$ como el segundo patrón prohibido de nuestra familia de patrones minimales.

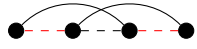


Figura 11: Paso 1

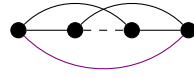


Figura 12: Caso 1



Figura 13: Caso 2

Ahora veamos que Z_7 contiene al subpatrón A_1 , como se observa en la Fig. 14. Al estar prohibido ese subpatrón queda inmediatamente prohibido todo el patrón Z_7 , por lo tanto la familia A construida hasta el momento alcanza.


 Figura 14: $A_1 \subseteq Z_7$

Luego analizamos Z_8 y $U(Z_8) = \{12, 14, 15, 16, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 56\}$. Observamos que los pares $\{12, 14, 24, 34, 35, 36, 56\}$ tienen que pertenecer al conjunto $E(Z'_8)$, ya que si son no aristas tienen como subpatrón a A_1 . El patrón resultante puede observarse en la Fig. 15. Ahora bien, notemos que este patrón contiene como subpatrón al de la Fig. 12, como se muestra en la Fig. 16. Como ya prohibimos el patrón anterior queda también prohibido el que estamos analizando. Por lo tanto podemos asegurar que el patrón Z_8 es un patrón prohibido con la familia de patrones A construida hasta el momento.

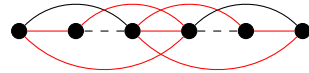
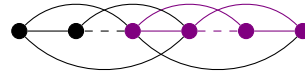
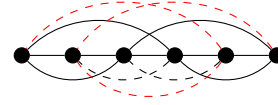
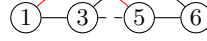


Figura 15: Paso 1


 Figura 16: Subpatrón A_2

Nos queda analizar el patrón Z_9 y $U(Z_9) = \{12, 13, 15, 16, 23, 25, 26, 45, 46, 56\}$. Vemos en la Fig. 17 que si los pares $\{12, 13, 23, 45, 46, 56\}$ pertenecen al conjunto $N(Z'_9)$ forman el subpatrón A_1 . Entonces quedan definidos como aristas. Veamos los pares $\{15, 16, 25, 26\}$. Si comenzamos suponiendo que el par (15) pertenece al conjunto $E(Z'_9)$, se observa que tomando el subconjunto de vértices $\{1, 3, 5, 6\}$ tenemos el subpatrón que se muestra en la Fig. 18. Como forman el patrón prohibido A_2 nos queda que el par (15) pertenece al conjunto $N(Z'_9)$. Con el mismo razonamiento, los pares $\{25, 26\}$ pertenecen a $N(Z'_9)$, sino con los conjuntos de vértices $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4, 6\}$ tendría de subpatrón a A_2 . El par de vértices (16) queda en el conjunto $U(Z'_9)$ y el patrón resultante es el que se muestra en la Fig. 19. De esta forma definimos al último patrón prohibido de la familia de la siguiente manera $A_3 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{12, 13, 14, 23, 34, 36, 45, 46, 56\}, \{15, 24, 25, 26, 35\})$.


 Figura 17: Primer paso Figura 18: Subpatrón A_2 Figura 19: Z'_9

Luego de analizar los patrones de la familia $ORD(\{Z_6, Z_7, Z_8, Z_9\})$ para la clase de grafos co-bipartitos definimos la familia de patrones A , con la cual obtenemos el primer resultado de este estudio.

Teorema 2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para todo grafo co-bipartito G :*

- G es 2-thin condicionado.
- $G \in ORD(\{A_1, A_2, A_3\})$

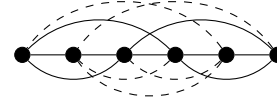
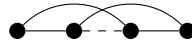

 Figura 20: A_1

 Figura 21: A_2

 Figura 22: A_3

6. Propiedades de los co-bipartitos con thinness 2 condicionada

Ahora nos interesa estudiar qué propiedades cumple la familia de grafos de los co-bipartitos con thinness 2 condicionada. Partimos con la condición de que en el orden bisagra tiene que estar un completo antes que el otro, ya que no puede contener el patrón A_1 . Sea G un grafo co-bipartito, existe una bipartición de sus vértices en dos subconjuntos disjuntos (V_1, V_2) tal que cada uno induce a un completo en el grafo. Queremos conocer qué características cumple el grafo G si tiene thinness 2 condicionada. Suponemos que existe un orden y una partición en dos clases de los vértices tal que estas clases coinciden con la bipartición (V_1, V_2) . De esta forma si los vértices de V_1 forman un completo y los de V_2 otro, al pasar de esta representación al orden bisagra quedan efectivamente primero los vértices de V_1 y luego los de V_2 cumpliendo con no contener al patrón A_1 . Ahora queremos ver que para toda tripla $(r, s, t) \in \mathcal{N}$ con $r < s < t$ y $\{v_r, v_s, v_t\} \in V(G)$, si v_r y v_s se encuentran en la misma clase y $v_t v_r \in E(G)$, entonces $v_t v_s \in E(G)$. Observemos que si v_t pertenece a la misma clase que $\{v_r, v_s\}$, se cumple ya que

estamos suponiendo que cada clase es un completo. Por lo que nos queda probar que se sigue cumpliendo cuando v_t pertenece a la otra clase.

Para conocer la relación de los vértices entre cada clase, veamos que podemos utilizar la siguiente equivalencia: *G es un grafo 2-thin que admite una representación en la que cada clase es un conjunto independiente si y sólo si G es un interval bigraph* (Bonomo-Braberman & Brito, 2023, Teorema 26).

Definición 4. Sea G un grafo. Se dice que G es un interval bigraph (resp. entre completos) si existe una bipartición de sus vértices en conjuntos independientes (resp. completos), B y W , y existe una familia de intervalos $\{I_v\}_{v \in B \cup W}$, tal que, para todos $x \in B$ e $y \in W$, los vértices x e y son adyacentes en G si y sólo si I_x e I_y se intersecan.

En este caso, como no estamos viendo las relaciones dentro de la clase y solo vemos las relaciones entre clases, usaremos la definición de interval bigraph entre completos. Lo que nos queda probar es el siguiente teorema:

Teorema 3. Sea G un grafo. Sean B y W los completos de una bipartición entre completos de G . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) G tiene una representación 2-thin condicionada donde las clases de la partición coinciden con los completos B y W .
- (ii) G es un interval bigraph entre completos con bipartición (B, W) .

Demostración. (i $\Leftrightarrow$ ii) Tenemos que B y W son los completos de la bipartición de G . También sabemos que existe una familia de intervalos I_v , para cada $v \in B \cup W$, tal que, para todos $x \in B$ e $y \in W$, los vértices x e y son adyacentes en G si y solo si I_x e I_y se intersecan.

Para cada $v \in B \cup W$, definimos, $<_\sigma$, el orden dado por el extremo derecho de cada intervalo I_v . Queremos ver que con este orden obtenemos una representación 2-thin.

Sean $\{r, s, t\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $r < s < t$ y v_r, v_s vértices en la misma clase, sin pérdida de generalidad suponemos que pertenecen a B , y sean v_t y v_r vértices adyacentes en G . Queremos ver que v_t y v_s también son adyacentes. Si $v_t \in B$ entonces ya sabemos que todos tienen aristas entre sí porque partimos de que cada clase es un completo. Si $v_t \notin B$ y queremos ver que $v_t v_s$ son adyacentes, basta con probar que sus intervalos se intersecan.

Como $r < s < t$ sabemos que el intervalo de v_t es el que termina último y como $v_t v_r \in E(G)$ el intervalo I_t empieza antes de que termine I_r . Luego si suponemos que $I_s \cap I_t = \emptyset$, el intervalo I_t tiene que comenzar después del índice s , pero como $r < s$ quiere decir que I_t empieza después del índice r . Pero esto contradice que los intervalos I_s e I_t se intersecan. Por lo tanto demostramos que como los intervalos I_s e I_t se intersecan, los vértices $v_t v_s$ son adyacentes.

(i $\Rightarrow$ ii) Sabemos que existe una representación 2-thin condicionada donde las clases de la partición coinciden con los completos B y W . Queremos ver que las aristas que unen a los dos completos inducen un interval bigraph.

Existe un ordenamiento, $< \sigma'$, de los vértices $v_1, \dots, v_n$ y una partición de V en B y W que cumplen con la definición de thinness.

Tomamos el orden $< \sigma'$ y colocamos los vértices sobre la recta según su índice en el orden. Para armar cada intervalo, comenzamos por el último vértice y definimos $I_n = [j - (1/2), n]$ donde n es el índice de v_n en el orden $< \sigma'$ y j es el menor índice tal que v_j es adyacente a v_n . Así el intervalo I_n comienza antes y nos aseguramos que no incluye a v_{j-1} ya que no son adyacentes. Queremos ver que esta familia de intervalos cumple la definición de interval bigraph.

Sean $v_i \in B$ y $v_j \in W$. Veamos que v_i y v_j son adyacentes si y solo si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $i < j$ en $< \sigma'$. Sabemos por como construimos los intervalos que el intervalo I_j termina después que I_i y que empieza en $j' - (1/2)$, con j' el menor índice tal que $v_{j'}$ es adyacente a v_j .

Si v_i es adyacente a v_j queremos ver que los intervalos se intersecan. Por construcción tiene que pasar que $j' < i$, porque si i es menor a j' contradice que j' es el menor índice entre los vecinos de v_j . Por lo tanto el intervalo I_i termina después que empieza el intervalo I_j lo que demuestra que su intersección es no vacía.

Ahora veamos que si los conjuntos tienen intersección no vacía, entonces los vértices son adyacentes. Por construcción sabemos que I_i termina antes de que termine I_j y si los intervalos se intersecan I_j empieza antes de que termine I_i , por ende v_j es adyacente a v_i . $\square$

Con esta equivalencia conocemos entonces la relación entre las dos clases cuando cada una de ellas está formada por un completo. Ahora bien, esa partición fue la más sencilla para pensar dada la clase de grafos con la que estamos trabajando, pero si queremos generalizar esta equivalencia necesitamos estudiar qué pasa cuando las clases no están dadas cada una por un completo. Queremos probar lo siguiente:

Proposición 1. *Dado un grafo co-bipartito con thinness 2 condicionada, existe una representación 2-thin condicionada del grafo tal que cada clase es un completo.*

Para poder demostrar esta proposición combinamos los resultados presentados por Bonomo-Braberman y Brito, 2023, Lemas 8 y 28. Antes veamos las siguientes definiciones:

Sea G un grafo y $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$. El subgrafo bipartito G' de G inducido por la partición es tal que $V(G') = V(G)$ y $E(G') = \{v_1v_2 \in E(G) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$. Denotamos a G' por $G[V_1, V_2]$.

Un *patrón bipartito* es un trigrafo bipartito donde cada una de las clases está ordenada, pero no hay un orden establecido entre vértices de distintas clases. El concepto de *contener* o *evitar* un patrón bipartito (para un grafo G con una bipartición dada y un orden total dentro de cada clase) es análogo al general, pero la partición en clases del patrón debe coincidir con la bipartición de G .

Lema 1. *Sea G un grafo, $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$, y $<$ un orden parcial de $V(G)$ que es total cuando se restringe a cada uno de V_1 y V_2 . Entonces, ese orden se puede extender a un orden total de $V(G)$ consistente con la partición $\{V_1, V_2\}$ si y sólo si $G[V_1, V_2]$ ordenado según $<$ evita los patrones bipartitos R_2 y R_3 (Fig. 23 y Fig. 24).*

Donde $G[V_1, V_2]$ es el subgrafo de G inducido por V_1, V_2 .



Figura 23: R_2

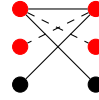


Figura 24: R_3

Notemos que los patrones R_2 y R_3 están contenidos en la familia de patrones Z . Cuando los patrones R los ordenamos según el orden bisagra obtenemos que $Z_6 = R_2$ y $Z_9 = R_3$. Entonces al tener prohibida a esa familia sabemos que si tenemos un orden y partición válidos, R_2 y R_3 ya están prohibidos.

La información que nos brindan estos patrones es cuáles son los vértices que pertenecen a cada clase. Partiendo del lema 2, donde se prueba que dada la representación 2-thin de un grafo evita dichos patrones, podemos probar la siguiente propiedad que generaliza lo que estamos estudiando.

Proposición 2. *Si existe un orden bisagra válido dado de una representación 2-thin consistente entonces cualquier corte bisagra en el que cada clase, en su orden original, tiene un orden canónico de intervalos produce otra representación 2-thin cuyo orden bisagra es el mismo.*

Demostración. Sea un grafo G 2-thin con un orden bisagra válido, es decir uno que evita los patrones Z (Fig. 5 a Fig. 8) y por ende tampoco a los R enunciados en el Lema 1. Suponemos que existe otro corte bisagra tal que cada clase tiene un orden canónico de intervalos. Queremos ver que ese nuevo corte genera otra representación 2-thin del grafo G .

Como tenemos que cada clase tiene un orden parcial, queremos ver qué pasa entre las aristas de una clase y la otra, es decir las aristas entre el corte bisagra. Por el Lema 1 lo que tenemos que asegurar que entre los vértices de cada clase no se forma el patrón R_2 ni R_3 . Al saber que cada clase tiene un orden canónico de intervalos podemos asegurar que ninguno de sus vértices forma esos patrones.

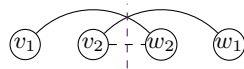


Figura 25: Patrón R_2 entre clases

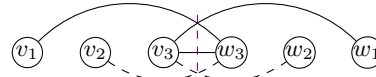


Figura 26: Patrón R_3 entre clases

Sean v_1, v_2 y v_3 vértices de una clase y w_1, w_2 y w_3 vértices de la otra clase.
Caso 1: Supongamos que los vértices v_1, v_2, w_1 y w_2 forman el patrón R_2

Entonces la nueva división de las clases está dada por la línea punteada vertical que se observa en la Fig. 25. Por lo que la división antes estaba a la derecha de la nueva división o a la izquierda. Veamos qué pasa en cada caso:

- (a) Si la división estaba a la derecha de lo que se nota en la Fig. 25, entonces los vértices $\{v_1, v_2, w_2\}$ estaban en una misma clase. Observemos que si no quedan en la misma clase porque la división se encuentra entre otros vértices intermedios llegamos a que al estar v_2 y w_2 en clases distintas, el patrón R_2 ya se encontraba incluido en el orden bisagra anterior. Lo cual contradice nuestra hipótesis de partir de un orden que es total. Entonces, si dichos vértices pertenecen a la misma clase, se obtiene el patrón de la Fig. 2. Pero esto contradice al hecho de que cada clase tiene un orden canónico de intervalos y dicho patrón está prohibido en esa clase. Por lo tanto, la división anterior no puede estar a la derecha de la que muestra la figura.
- (b) Si la división de las clases se encontraba a la izquierda de la línea punteada, vemos que los vértices $\{v_2, w_2, w_1\}$ se encuentran en la misma clase. Si no lo estaban, al igual que en el caso anterior, ya se hubiese tenido el patrón R_2 lo cual es absurdo. Por lo tanto, al estar los tres vértices en la misma clase forman el patrón de la Fig. 2. Lo que contradice que cada clase tiene un orden canónico de intervalos y es el patrón prohibido para la clase de intervalos. Tengamos en cuenta que el orden de la segunda clase es creciente de derecha a izquierda. Lo cual nos dice que la división anterior no puede estar a la izquierda.

Llegamos a que el corte anterior no podía estar ni a la izquierda ni a la derecha de lo que se muestra en la Fig. 25 entonces no contiene al patrón R_2 .

Caso 2: Supongamos que $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$ forman el patrón R_3

Entonces la nueva división de las clases está dada por la línea punteada vertical que se observa en la Fig. 26, lo que quiere decir que antes la división estaba en otro punto. Al igual que antes, analizamos los siguientes casos:

- (a) Si la división estaba a la derecha de donde está ahora, los vértices $\{v_1, v_2, v_3, w_3\}$ formaban parte de la misma clase. Si no quedan en la misma clase porque la división se encuentra entre otros vértices intermedios obtenemos que v_3 y w_3 están en clases distintas y por ende se obtiene el patrón R_3 . Lo que contradice que partimos desde un orden que es total. Entonces los vértices están en una misma clase. Pero si tomamos el subconjunto de vértices $\{v_1, v_2, w_3\}$ obtenemos el patrón de la Fig. 2, lo cual es absurdo porque sabemos que es un subpatrón prohibido. Por lo tanto concluimos que la división anterior no puede estar a la derecha de la que se ve en la Fig. 26.
- (b) Si la división está a la izquierda, el caso es análogo al caso (1b) ya que el subconjunto de vértices $\{v_3, w_2, w_1\}$, si están en la misma clase, forman el patrón de la Fig. 2. Lo cual contradice a que la clase tiene un orden canónico de intervalos.

Por lo tanto esto nos dice que el patrón R_3 tampoco forma parte de los subpatrones del orden bisagra que tenemos. Entonces orden bisagra cumple con ser un orden total y junto a la partición de clases dada por ese corte bisagra, el grafo tiene otra representación 2-thin. $\square$

Al tener probado el caso genérico, la prueba de la Proposition 1 se reduce a probar el siguiente enunciado:

Proposición 3. *Dado un grafo G co-bipartito con thinness 2 condicionada, el corte bisagra que deja un completo en cada clase asegura que cada una de esas clases tiene un orden canónico de intervalos.*

Demostración. Si el corte bisagra deja un completo en cada clase, cualquier ordenamiento de sus vértices es un orden canónico de intervalos. En particular, el orden inducido por los vértices de cada completo en el orden bisagra será entonces un orden canónico de intervalos para cada completo. $\square$

Referencias

- Bonomo, F., & De Estrada, D. (2019). On the thinness and proper thinness of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 261, 78-92.
- Bonomo-Braberman, F., & Brito, G. A. (2023). Intersection models and forbidden pattern characterizations for 2-thin and proper 2-thin graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 339, 53-77.
- Brandwein, E., & Sansone, A. (2022). On the thinness of trees and other graph classes [Tesis de Licenciatura, FCEN, UBA].
- Brito, G. (2020). Sobre la thinness en un grafo [Tesis de Licenciatura, FCEN, UBA].
- Cygan, M., Fomin, F., Kowalik, L., Lokshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., & Saurabh, S. (2015). *Parameterized Algorithms*. Springer.
- Feuilloley, L., & Habib, M. (2021). Graph classes and forbidden patterns on three vertices. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 35(1), 55-90.
- Lekkerkerker, C. G., & Boland, J. C. (1962). Representation of finite graphs by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, 51, 45-64.
- Mannino, C., Oriolo, G., Ricci, F., & Chandran, L. S. (2007). The stable set problem and the thinness of a graph. *Operations Research Letters*, 35, 1-9.
- Maqueda, I. (2023). Caracterización estructural de los árboles de thinness propia 2 [Tesis de Licenciatura, FCEN, UBA].
- Roberts, F. (1969). Indifference graphs. En F. Harary (Ed.), *Proof Techniques in Graph Theory* (pp. 139-146). Academic Press.