

Técnicas evolutivas para división justa de tortas discretas

Iván Fernández¹, Javier Marengo², and Tomás Tetzlaff¹

¹ Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
ifernandez@campus.ungs.edu.ar, tetzlaff@campus.ungs.edu.ar

² Escuela de Negocios, Universidad Torcuato Di Tella, Argentina
javier.marengo@utdt.edu

Abstract. Abordamos en este trabajo el corte de tortas discretas (*discrete cake-cutting*) con el objetivo de obtener una asignación libre de envidia (*envy-free*) con el número mínimo de cortes. No se conoce un algoritmo polinomial para este problema. Con el fin de obtener información sobre qué funciones del conjunto de cortes y de las valoraciones de los jugadores pueden conducir a una asignación libre de envidia de manera experimentalmente más rápida, implementamos algoritmos genéticos usando mutación y cruce para las posiciones de los cortes y las asignaciones de porciones a cada agente. Reportamos los resultados de esta implementación sobre instancias generadas aleatoriamente.

Keywords: discrete cake-cutting, envy-free, algoritmos genéticos

Evolutionary techniques for fair divisions of discrete cakes

Abstract. In this work, we address the problem of discrete cake-cutting with the goal of obtaining an envy-free allocation using the minimum number of cuts. No polynomial-time algorithm is known for this problem. To gain insight into which functions of the set of cuts and the players' valuations may lead to an envy-free allocation more efficiently in practice, we implemented genetic algorithms using mutation and crossover on both the cut positions and the assignment of portions to each agent. We report the results of this implementation on randomly generated instances.

Keywords: discrete cake-cutting, envy-free, genetic algorithms

El problema de corte de tortas discretas (*discrete cake-cutting*) consiste en dividir un segmento entre distintos agentes, siendo que cada agente valora de

manera distinta cada porción del segmento. Existen distintos criterios para estudiar la razonabilidad de la división, uno de los cuales consiste en que ningún agente debe valorar su porción estrictamente menos que la porción asignada a otro agente, y este criterio da lugar a asignaciones libres de envidia (*envy-free*).

Formalmente, tenemos una secuencia $N = \{1, \dots, n\}$ de *átomos* y un conjunto $M = \{1, \dots, m\}$ de *agentes*. Poda cada $i \in N$ y cada $k \in M$, tenemos la valoración $v_{ik} \in \mathbb{R}_+$ que hace el agente k del átomo i . El problema consiste en particionar N en m segmentos consecutivos y asignar exactamente un segmento a cada agente de modo tal que si el agente k recibe el segmento $s_k \subseteq N$ y el agente k' recibe el segmento $s_{k'} \subseteq N$, tenemos que $v_k(s_k) \geq v_{k'}(s_{k'})$, donde $v_k(s) = \sum_{i \in s} v_{ik}$, para todo $k, k' \in M$, $k \neq k'$. Es decir, ningún agente valora estrictamente mejor al segmento asignado a otro agente que al segmento que tiene asignado (Barrera et al., 2017; Bilò et al., 2022; Suksompong, 2019).

Determinar si existe una asignación libre de envidia es un problema NP-completo (Goldberg et al., 2020; Suksompong, 2019), aunque se sabe que siempre existe una asignación libre de envidia si las valoraciones son disjuntas (es decir, para cada $i \in N$ existe un único $k \in M$ tal que $v_{ik} > 0$) (Marengo and Tetzlaff, 2014). No obstante, incluso en este último caso no se conocen algoritmos polinomiales para encontrar tal asignación. Motivados por estas observaciones, en este trabajo proponemos un algoritmo genético para resolver este problema. Los individuos se representan como vectores de enteros que codifican las posiciones de los cortes y las asignaciones de porciones a los agentes. La longitud total del cromosoma es $2m - 1$. Se exploraron dos variantes de mutación para las asignaciones: en una variante, se intercambian aleatoriamente las porciones asignadas entre dos agentes; en la otra, se resuelve un problema de asignación (*assignment-problem*) para optimizar la distribución. La evaluación del *fitness* se basa en la violación de la propiedad *envy-free*, donde un valor cero indica una asignación válida. Los operadores de selección incluyen elitismo y torneos, mientras que el cruce utiliza *Order Crossover* (OX) para las asignaciones y un cruce de un punto para las posiciones de los cortes. El algoritmo finaliza al encontrar una solución válida o al alcanzar el límite de generaciones. Mostramos resultados computacionales sobre instancias de gran tamaño con el objetivo de comparar la performance relativa de distintas estrategias de mutación. Los resultados sugieren que este enfoque es prometedor para resolver este problema en la práctica.

References

- Barrera, R., Nyman, K., Ruiz, A., Su, F. E., & Zhang, Y. X. (2017). Discrete envy-free division of necklaces and maps.
- Bilò, V., Caragiannis, I., Flammini, M., Igarashi, A., Monaco, G., Peters, D., Vinci, C., & Zwicker, W. S. (2022). Almost envy-free allocations with connected bundles. *Games and Economic Behavior*, 131, 197–221.

- Goldberg, P., Hollender, A., & Suksompong, W. (2020). Contiguous cake cutting: Hardness results and approximation algorithms. *Journal of Artificial Intelligence Research*, *69*, 109–141.
- Marengo, J., & Tetzlaff, T. (2014). Envy-free division of discrete cakes. *Discrete Applied Mathematics*, *164*, 527–531.
- Suksompong, W. (2019). Fairly allocating contiguous blocks of indivisible items. *Discrete Applied Mathematics*, *260*, 227–236.