

Árboles de thinness propia 2

Flavia Bonomo-Braberman^{1,2}[0000-0002-9872-7528], Ignacio Maqueda^{1,2}[0009-0001-3631-8526] and Nina Pardal³[0000-0002-5150-6947]

¹ Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Departamento de Computación, Buenos Aires, Argentina.

{fbonomo, imaqueda}@dc.uba.ar

² CONICET-Universidad de Buenos Aires, Instituto de Investigación en Ciencias de la Computación (ICC), Buenos Aires, Argentina

³ University of Huddersfield, Queensgate, Huddersfield, United Kingdom.
n.pardal@hud.ac.uk

Resumen La thinness propia de un grafo es un invariante que generaliza a los grafos de intervalos propios. Todo grafo tiene un valor numérico de thinness propia y los grafos con thinness propia 1 coinciden con los grafos de intervalos propios.

En este trabajo nos enfocamos en el cálculo de la thinness propia para los árboles. Caracterizamos los árboles de thinness propia 2, tanto estructuralmente como por sus subgrafos inducidos minimales prohibidos.

También mostramos por qué los resultados obtenidos para árboles de thinness propia 2 no pueden ser generalizados a árboles de thinness propia 3.

Palabras clave: árboles, thinness propia, caracterizaciones

Trees with proper thinness 2

Abstract. The proper thinness of a graph is an invariant that generalizes the concept of a proper interval graph. Every graph has a numerical value of proper thinness and the graphs with proper thinness 1 are exactly the proper interval graphs.

In this work we focus on the calculation of proper thinness for trees. We characterize trees of proper thinness 2, both structurally and by their minimal forbidden induced subgraphs.

We also show why the results obtained for trees of proper thinness 2 cannot be generalized to trees of proper thinness 3.

Keywords: trees, proper thinness, characterizations

1. Introducción

Gran parte de los problemas de optimización definidos sobre grafos son computacionalmente difíciles. Para estos problemas, resulta natural preguntarse: *¿Para qué subclases de grafos el problema puede resolverse de forma eficiente y para cuáles es intrínsecamente difícil?*

Desde los años '80 varios parámetros de ancho en un grafo fueron definidos con el objeto de abarcar clases de grafos dentro de las cuales problemas NP-completos en general resultarían polinomiales. Algunos ejemplos son: treewidth ([Robertson and Seymour, 1986]), clique-width ([Golombic and Rotics, 2000]) y ([Courcelle and Olariu, 2000]) o bandwidth ([Papadimitriou, 1976]) y ([Garey et al., 1978]). Uno de los parámetros más recientes es la **thinness** ([Mannino et al., 2007]). En este trabajo nos enfocaremos en una de sus variantes, la **thinness propia**:

Definición 1 ([Bonomo and De Estrada, 2019]) *Un grafo $G = (V, E)$ es k -thin si existe un ordenamiento de los vértices v_1, v_2, \dots, v_n y una partición V^1, \dots, V^k de V en k clases tal que para cada tripla (r, s, t) con $r < s < t$ se cumple que:*

- Si v_r, v_s pertenecen a la misma clase y $v_t v_r \in E$, entonces $v_t v_s \in E$

y k -thin propio si existen un ordenamiento y una partición tales que, además,

- Si v_s, v_t pertenecen a la misma clase y $v_t v_r \in E$, entonces $v_r v_s \in E$

La thinness (propia) de un grafo G es el menor número k para el cual el grafo cumple la definición de k -thin (propio). Se denota como $\text{thin}(G)$ (resp. $\text{pthin}(G)$). Cuando un ordenamiento y una partición verifican la definición de k -thin (propio) decimos que el ordenamiento y la partición son (*fuertemente*) *consistentes*. Se puede ver un ejemplo en la Figura 1:

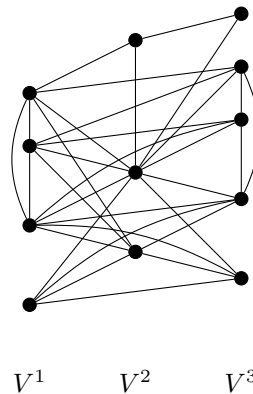


Figura 1: Una representación 3-thin propia de un grafo. Los vértices están ordenados de abajo hacia arriba y las clases corresponden a las líneas verticales.

La complejidad de calcular la *thinness* propia en general y para la clase de los árboles es aún una pregunta abierta. Y el problema de la caracterización por subgrafos inducidos prohibidos para *thinness* propia permanece abierto. En este trabajo, abordaremos el estudio de ambos problemas para la clase de los árboles. Para cualquier grafo, es válida la desigualdad $\text{thin}(G) \leq \text{pthin}(G)$. Como sabemos ([Bonomo and De Estrada, 2019]) que la clase de los árboles no tiene *thinness* acotada, entonces esta clase tampoco tiene *thinness* propia acotada.

Un *grafo de intervalos* es el grafo intersección de intervalos en una recta. La *thinness* es la generalización de los grafos de intervalos. A su vez, la *thinness* propia es la generalización de los grafos de intervalos propios, los cuales son grafos de intervalos que admiten un modelo de intersección en el cual ningún intervalo está propiamente contenido en otro. Es decir, los grafos de intervalos propios y los 1-thin propios son la misma clase.

Teorema 1 ([Roberts, 1969]) *Un grafo $G = (V, E)$ es un grafo de intervalos propios si existe un ordenamiento de los vértices v_1, v_2, \dots, v_n tal que para cada tripla (r, s, t) con $r < s < t$, si $v_t v_r \in E$, entonces $v_t v_s \in E$ y $v_r v_s \in E$.*

2. Árboles de *thinness* propia 2

2.1. Caracterización estructural

El grafo *claw* o $K_{1,3}$ es el único subgrafo inducido prohibido minimal para la clase de los grafos de intervalos propios ([Roberts, 1969]). Por lo tanto, los árboles de intervalos propios son solo los caminos, y los bosques de intervalos propios resultan ser la unión disjunta de caminos.

En este trabajo intentamos tomar un camino simple C en T y observar la *thinness* de las componentes conexas de $T - C$. Para el caso de los árboles de *thinness* propia 2, demostramos que siempre existe un camino simple C tal que se puede tomar una partición (que es fuertemente consistente con algún ordenamiento) en dos clases: una con los vértices de C y otra con los vértices de $T - C$.

Teorema 2 *Un árbol T tiene $\text{pthin}(T) = 2$ si y sólo si valen simultáneamente:*

1. *Existe algún vértice en T con grado mayor o igual a 3.*
2. *Si v es un vértice de T con grado mayor o igual a 5, entonces a lo sumo 4 de sus vecinos tienen grado mayor a 1.*
3. *Existe un camino simple C_0 en T tal que:*
 - a) *Todos los vértices de T con grado mayor o igual a 4 están en C_0 .*
 - b) *Si algún vértice v de grado 3 no está en C_0 , entonces:*
 - 1) *v es adyacente a un vértice w de C_0 .*
 - 2) *El grado de w es menor o igual a 3.*

Corolario 1 Sea $T = (V, E)$ un árbol tal que $pthin(T) = 2$. Entonces, existe un camino simple $C_0 = v_1, \dots, v_k$ en T tal que existe un ordenamiento que es fuertemente consistente con la partición en clases $S = \{V^0, V^1\}$, siendo $V^0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $V^1 = V - V^0$.

Corolario 2 Sea $T = (V, E)$ un árbol tal que $pthin(T) = 2$. Entonces, existe un camino simple C_0 tal que todas las componentes conexas de $T - C_0$ tienen thinness propia igual a 1.

2.2. Caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales

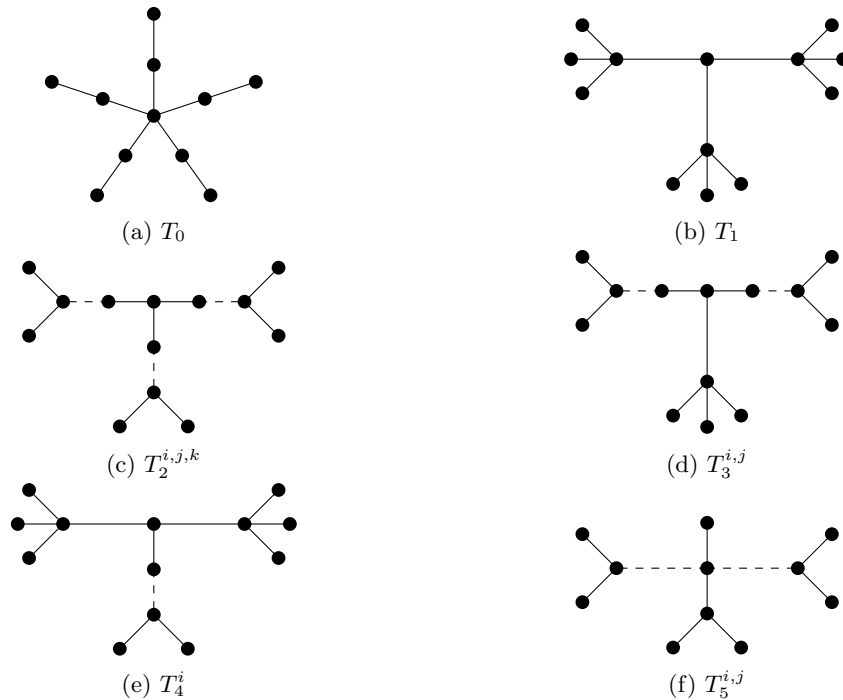


Figura 2: Subgrafos inducidos minimales prohibidos de árboles de thinness propia 2. Las líneas punteadas representan aristas posiblemente subdivididas.

Teorema 3 Sea T un árbol. Entonces, $pthin(T) = 2$ si y sólo si T no contiene ninguno de los árboles de la Figura 2 como un subgrafo inducido y T tiene al menos un vértice de grado mayor o igual a 3.

Proposición 1 Los grafos en la Figura 2 son minimales.

3. Árboles de thinness propia mayor a 2

Para el caso de los árboles con thinness propia 3, encontramos un contraejemplo que muestra que no necesariamente existe un camino simple C_0 en T tal que todas las componentes conexas de $T - C_0$ tienen thinness propia menor a 3:

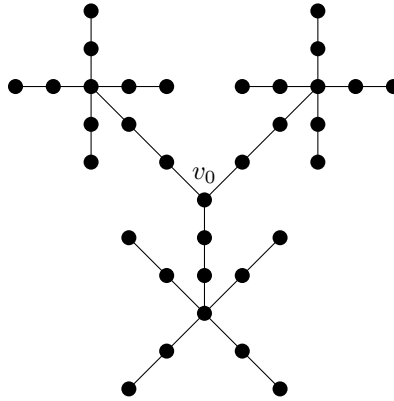


Figura 3: Árbol T_A : Está formado por tres copias de T_0 unidas por el vértice v_0 .

Queda pendiente como trabajo futuro investigar si el comportamiento de los árboles de thinness propia mayor a 3 es similar al de los árboles de thinness propia 2 o al de los de thinness propia 3.

Referencias

- Bonomo and De Estrada, 2019. Bonomo, F. and De Estrada, D. (2019). On the thinness and proper thinness of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 261:78–92.
- Courcelle and Olariu, 2000. Courcelle, B. and Olariu, S. (2000). Upper bounds to the clique width of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 101(1–3):77–114.
- Garey et al., 1978. Garey, M., Graham, R., Johnson, D., and Knuth, D. (1978). Complexity results for bandwidth minimization. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34:477–495.
- Golumbic and Rotics, 2000. Golumbic, M. and Rotics, U. (2000). On the clique-width of some perfect graph classes. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 11(3):423–443.
- Mannino et al., 2007. Mannino, C., Oriolo, G., Ricci, F., and Chandran, S. (2007). The stable set problem and the thinness of a graph. *Operations Research Letters*, 35:1–9.
- Papadimitriou, 1976. Papadimitriou, C. (1976). The NP-completeness of the bandwidth minimization problem. *Computing*, 16:263–270.
- Roberts, 1969. Roberts, F. (1969). Indifference graphs. In Harary, F., editor, *Proof Techniques in Graph Theory*, pages 139–146. Academic Press.
- Robertson and Seymour, 1986. Robertson, N. and Seymour, P. (1986). Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width. *Journal of Algorithms*, 7(3):309–322.