# KE-tableaux para lógica intuicionista proposicional

Alejandro Solares-Rojas[1], Paolo Baldi[2], and Ricardo O. Rodriguez[3]

[1] 0000-0001-7269-0096, Instituto de Ciencias de la Computación, UBA-CONICET, asrojas@dc.uba.ar
[2] 0000-0003-2657-753X, Department of Human Studies, University of Salento, paolo.baldi@unisalento.it
[3] 0000-0001-7551-2877, Instituto de Ciencias de la Computación, UBA-CONICET, ricardo@dc.uba.ar

**Resumen.** Los KE-tableaux son generalizados a lógica intuicionista proposicional mediante fórmulas signadas etiquetadas y restricciones entre tales etiquetas, de modo que el sistema resultante imita la construcción de contramodelos en la semántica relacional. Para hacer más eficiente la búsqueda de demostraciones, dotamos al sistema de variables libres y demostramos algunas de las propiedades básicas del mismo: correctitud, completitud y terminación.

**Palabras clave:** lógica intuicionista proposicional, sistema KE, tableaux etiquetados con variables libres, semántica relacional

## KE-tableaux for intuitionistic propositional logic

**Abstract.** KE-tableaux are generalized to intuitionistic propositional logic by means of labeled signed formulas and constraints between labels, so that the resulting system closely mimics countermodel construction in the relational semantics. To improve on proof-search, we further endow the system with free-variables and show some of its basic properties: soundness, completeness and termination.

**Keywords:** intuitionistic propositional logic, KE system, free-variable labeled tableaux, relational semantics

## 1. Motivación

Tableaux para lógica intuicionista proposicional han sido ampliamente estudiados. Sin embargo, la mayoría involucran el reuso de fórmulas implicativas con signo $\mathsf{T}$. Este reuso provoca una alta ineficiencia en la búsqueda de demostraciones. La importancia de desarrollar métodos de demostración eficientes para la lógica intuicionista se debe a la amplia gama de aplicaciones prácticas y teóricas de la misma (véase Fellin y Negri, 2025). Por tanto, el problema del reuso se ha abordado de diferentes maneras. Por ejemplo, (Miglioli et al., 1997) propusieron tableaux que no requieren reuso, a costo de perder la propiedad de subfórmula.

No obstante, esos tableaux se basan en métodos de reescritura que se alejan de tratamientos directos y naturales del significado de los operadores lógicos intuicionistas. En cambio, por ejemplo, (Galmiche y Méry, 2003) propusieron tableaux que limitan el reuso de fórmulas y conservan dicha propiedad. Su propuesta fue diseñada para seguir de cerca la construcción de contramodelos en la semántica relacional de la lógica y, según sabemos, es la más cercana a los tableaux estilo KE aquí introducidos.

En la lógica clásica, se conocen demostraciones en los KE-tableaux que son exponencialmente más cortas que en los tableaux estándar respecto a clases de fórmulas (D'Agostino y Mondadori, 1994). El sello de los sistemas KE es la reducción al mínimo de las ramificaciones, haciendo que todas las ramas de las respectivas derivaciones sean mutuamente excluyentes. Las reglas de ramificación no involucran operadores lógicos e implementan (generalizaciones de) el principio de bivalencia. Aunque estas reglas pueden en principio introducir fórmulas arbitrarias, también pueden restringirse para cumplir la propiedad de subfórmula. El resto de las reglas son operacionales y tienen un formato lineal. La aplicación controlada de las reglas de ramificación de KE es lo que evita las ramificaciones redundantes intrínsecamente presentes en los tableaux estándar. Sin embargo, la búsqueda de demostraciones cortas puede resultar difícil. En este trabajo, introducimos KE-tableaux para la lógica intuicionista que se corresponden estrechamente con la construcción de contramodelos en la semántica relacional y combinan tres herramientas para mejorar la eficiencia general: (1) utilizan el poder expresivo de etiquetas que importan nociones semánticas al lenguaje objeto; (2) generalizan los KE-tableaux clásicos que producen demostraciones más cortas que los estándar; y (3) utilizan variables libres que explotan el significado de la negación para reducir el espacio de búsqueda de demostraciones.

## 2. KE-tableaux

El sistema está formulado en términos de *fórmulas signadas etiquetadas*, 'sefórmulas', que son expresiones de una de las siguientes tres formas: $\mathsf{T}\, A : c_i$, $\mathsf{F}\, A : c_i$, $\mathsf{F}\, A : x_i$, donde $A$ es una fórmula, $\mathsf{T}$ y $\mathsf{F}$ son *signos*, y $c_i$ y $x_i$ son *etiquetas*. Interpretamos una etiqueta como la representación del seguimiento de los estados de información a lo largo de las reducciones de reglas para obtener la fórmula con signo asociada a ella. Formalmente, el *lenguaje de etiquetado* consiste en un conjunto numerable de *constantes* $C = \{c_0, c_1, \dots\}$, un conjunto numerable de *variables libres* tomadas como universalmente cuantificadas $V = \{x_0, x_1, \dots\}$, y un símbolo de relación binaria $\preceq$ que denota un orden parcial sobre $C$. Intuitivamente, las constantes representan estados particulares, mientras que las variables representan estados genéricos, los cuales empero deben satisfacer *restricciones* entre constantes. Denotamos con $L = C \cup V$ la unión de sus conjuntos. Así, usamos $l_i$ para denotar una constante $c_i$ o una variable $x_i$. A su vez, $\preceq$ representa la relación de accesibilidad a nivel de lenguaje objeto, y una *restricción* es una expresión de la forma $c_i \preceq c_j$. De tal manera que el significado intuitivo de $\mathsf{T}\, A : c_i$ (respectivamente, $\mathsf{F}\, A : c_i$) es que $A$ está *forzado* (respectivamente, *no forzado*) en el estado denotado por la constante $c_i$, mientras que $\mathsf{F}\, A : x_i$ intuitivamente significa que, en el estado denotado por $c_i$, $A$ está no forzado *en cada* estado $c_j$ tal que $c_i \preceq c_j$. Nótese que solo las fórmulas con signo $\mathsf{F}$ están asociadas con etiquetas de variable. Esto se debe a que las se-fórmulas de la forma $\mathsf{F}\, A : x_i$ pretenden capturar el significado de la negación dentro de la sintaxis, el cual explotamos para mejorar la eficiencia del sistema. Es decir, si la negación de una fórmula $A$ está forzada en un estado $c_i$, entonces $A$ está no forzada en *todo* estado $c_j$ tal que $c_i \preceq c_j$ (véase Miglioli et al., 1997). Las variables no son necesarias para fórmulas signadas con $\mathsf{T}$ ya que, según la semántica subyacente, si una fórmula está forzada en el estado $c_i$, también está forzada en todos los estados $c_j$ tal que $c_i \preceq c_j$.

Las reglas de nuestro sistema se muestran en la Tabla 1. La única regla que introduce variables es $\mathsf{T}\neg$. Las variables *no* son necesarias para la completitud de nuestro sistema, pero se utilizan para aumentar la eficiencia ya que reducen el espacio de búsqueda al explotar el significado de la negación. Ellas nos permiten descartar pasos de expansión innecesarios al posponer algunas de sus instanciaciones para cerrar una rama hasta que haya suficiente información disponible. Una versión sin variables puede obtenerse realizando modificaciones simples.

## 3. Correctitud, completitud y terminación

Dado que nuestro mecanismo de se-fórmulas simula de manera transparente la semántica relacional subyacente, la correctitud de nuestro sistema es directa. A saber, definimos una función de *realización* que mapea las etiquetas en una rama de una derivación a estados en un modelo de la semántica, respetando la correspondencia entre signos y $\preceq$ del sistema con, respectivamente, las relaciones de satisfacibilidad y orden entre estados. Mostramos así que las reglas del sistema preservan realizibilidad. La completitud del sistema es también directa mediante la simulación de algún sistema axiomático, pero tal simulación no conserva la propiedad de subfórmula. Una demostración de completitud más informativa se obtiene mediante un procedimiento de búsqueda de demostraciones que *termina* para una ligera variante del sistema presentado arriba, el cual además satisface la propiedad de subfórmula. Primero, imponemos que cada regla se pueda aplicar como máximo una vez para cada elección particular de se-fórmulas como premisas. Esta medida garantiza un ancho finito del supuesto contramodelo en la semántica subyacente. Segundo, imponemos la condición semánticamente correcta de que $\mathsf{F} \to_1$ sólo es aplicable cuando $\mathsf{T}\, A : c_h$ no ocurre para ningún $c_h \preceq_{\mathtt{b}} c_i$ en la rama $\mathtt{b}$ donde se aplicará la regla. Entonces, añadimos la siguiente regla, también correcta, que permite reusar constantes previamente introducidas:

$$\frac{\begin{array}{l}\mathsf{F}\, A \to B : c_j \\ \mathsf{T}\, A : c_i \\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{F}\, B : c_j}\ (\mathsf{F} \to_3)$$

$$\frac{\mathsf{F}\,A \vee B : l_i}{\begin{array}{l}\mathsf{F}\,A : l_i\\ \mathsf{F}\,B : l_i\end{array}}\;(\mathsf{F}\vee) \qquad \frac{\mathsf{T}\,A \wedge B : c_i}{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A : c_i\\ \mathsf{T}\,B : c_i\end{array}}\;(\mathsf{T}\wedge) \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A \vee B : c_i\\ \mathsf{F}\,A : l_j\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{T}\,B : c_i}\;(\mathsf{T}\vee_1) \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A \vee B : c_i\\ \mathsf{F}\,B : l_j\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{T}\,A : c_i}\;(\mathsf{T}\vee_2)$$

$$\frac{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A \vee B : c_j\\ \mathsf{F}\,A : x_i\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{T}\,B : c_j}\;(\mathsf{T}\vee_3) \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A \vee B : c_j\\ \mathsf{F}\,B : x_i\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{T}\,A : c_j}\;(\mathsf{T}\vee_4) \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{F}\,A \wedge B : l_j\\ \mathsf{T}\,A : c_i\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{F}\,B : l_j}\;(\mathsf{F}\wedge_1) \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{F}\,A \wedge B : l_j\\ \mathsf{T}\,B : c_i\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{F}\,A : l_j}\;(\mathsf{F}\wedge_2)$$

$$\frac{\begin{array}{l}\mathsf{F}\,A \wedge B : x_i\\ \mathsf{T}\,A : c_j\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{F}\,B : x_j}\;(\mathsf{F}\wedge_3) \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{F}\,A \wedge B : x_i\\ \mathsf{T}\,B : c_j\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{F}\,A : x_j}\;(\mathsf{F}\wedge_4) \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A \to B : c_i\\ \mathsf{T}\,A : c_j\\ \boxed{c_i \preceq c_k \text{ y } c_j \preceq c_k}\end{array}}{\mathsf{T}\,B : c_k}\;(\mathsf{T}\to_1) \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A \to B : c_i\\ \mathsf{F}\,B : l_j\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\mathsf{F}\,A : l_j}\;(\mathsf{T}\to_2)$$

$$\frac{\mathsf{F}\,A \to B : c_i}{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A : c_j\\ \mathsf{F}\,B : c_j\\ c_i \preceq c_j\end{array}}\;\begin{array}{l}c_j \text{ nueva}\\ (\mathsf{F}\to_1)\end{array} \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{F}\,A \to B : x_i\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A : c_k\\ \mathsf{F}\,B : x_i\\ c_j \preceq c_k\end{array}}\;\begin{array}{l}c_k \text{ nueva}\\ (\mathsf{F}\to_2)\end{array} \qquad \frac{\mathsf{T}\,\neg A : c_i}{\mathsf{F}\,A : x_i}\;(\mathsf{T}\neg) \qquad \frac{\mathsf{F}\,\neg A : c_i}{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A : c_j\\ c_i \preceq c_j\end{array}}\;\begin{array}{l}c_j \text{ nueva}\\ (\mathsf{F}\neg_1)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\mathsf{F}\,\neg A : x_i\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A : c_k\\ c_j \preceq c_k\end{array}}\;\begin{array}{l}c_k \text{ nueva}\\ (\mathsf{F}\neg_2)\end{array} \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A : c_i\\ \mathsf{F}\,A : c_j\\ \boxed{c_i \preceq c_j}\end{array}}{\times} \qquad \frac{\begin{array}{l}\mathsf{T}\,A : c_i\\ \mathsf{F}\,A : x_j\\ \boxed{c_i \preceq c_k \text{ y } c_j \preceq c_k}\end{array}}{\times} \qquad \frac{}{\mathsf{T}\,A : c_i \;\big|\; \mathsf{F}\,A : c_i}$$

Con un pequeño abuso de notación, escribimos restricciones de la forma $c_i \preceq c_j$ como condiciones laterales en las premisas, pero en realidad permitimos que estén dentro de la clausura transitiva reflexiva de $\preceq$ (véase Galmiche y Méry, 2003).

**Tabla 1.** Reglas estilo KE con variables libres

La condición sobre $\mathsf{F} \rightarrow_1$ junto con la incorporación de $\mathsf{F} \rightarrow_3$ resultan en la producción de, a lo más, una nueva constante para cada se-fórmula de la forma $\mathsf{F}\, A \rightarrow B : c_i$. Así, un procedimiento de decisión que termina, ya sea con una prueba o con un contramodelo finito, puede definirse. Una prueba se obtiene cuando *todas* las ramas de la derivación están cerradas, mientras que un contramodelo puede extraerse directamente de una rama abierta que ha sido *terminada*. Informalmente, una rama abierta está terminada cuando no hay aplicación alguna de las reglas que proporcione información semántica adicional, de tal manera que el conjunto de se-fórmulas en la rama está 'saturado' y la búsqueda de un contramodelo ha tenido éxito. Por tanto, el procedimiento implica la completitud de nuestro sistema y sienta la bases para la implementación del mismo. En el procedimiento, todas las fórmulas a las que se aplica la regla de ramifición son subfórmulas de fórmulas que ya ocurrían en la rama. Se demuestra entonces también la propiedad de subfórmula, ya que el resto de reglas la cumplen trivialmente.

## 4. Trabajo en progreso

Estamos trabajando en la implementación de nuestro sistema para compararlo con los sistemas más eficientes conocidos, los cuales están basados en generalizaciones de resolvedores SAT (e.g. Fiorentini y Ferrari, 2024). Esto no sólo en eficiencia, sino también en términos de la interactividad entre usuario y demostrador ya que el pre-procesamiento de 'clausificación' generalizado tiende a dificultar esta última. Nuestros primeros avances pueden consultarse en https://github.com/placiana/kems, y el siguiente paso es explorar estrategias que mejoren la ejecución respecto a familias de *benchmarks*. Además, estamos diseñando KE-tableaux para algunas lógicas intuicionistas modales, las cuales tienen aplicaciones en verificación formal y programación funcional.

## Referencias

D'Agostino, M., & Mondadori, M. (1994). The taming of the cut. Classical refutations with analytic cut. *Journal of Logic and Computation*, *4*(3), 285-319. https://doi.org/10.1093/logcom/4.3.285

Fellin, G., & Negri, S. (2025). A terminating intuitionistic calculus. *The Journal of Symbolic Logic*, *90*(1), 278-297. https://doi.org/10.1017/jsl.2023.88

Fiorentini, C., & Ferrari, M. (2024). General Clauses for SAT-Based Proof Search in Intuitionistic Propositional Logic. *Journal of Automated Reasoning*, *68*(3), 13. https://doi.org/10.1007/s10817-024-09703-8

Galmiche, D., & Méry, D. (2003). Semantic Labelled Tableaux for Propositional BI without $\perp$. *Journal of Logic and Computation*, *13*(5), 707-753. https://doi.org/10.1093/logcom/13.5.707

Miglioli, P., Moscato, U., & Ornaghi, M. (1997). Avoiding duplications in tableau systems for intuitionistic logic and Kuroda logic. *Logic Journal of the IGPL*, *5*(1), 145-167. https://doi.org/10.1093/jigpal/5.1.145