

Discretización Temporal vs Cuantificación de Estados: Homogeneidad de la Actividad y Discontinuidades

Mariana Bergonzi¹, Rodrigo Castro², and Ernesto Kofman¹

¹ CIFASIS - CONICET, FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Argentina,
bergonzi@cifasis-conicet.gov.ar

² ICC - CONICET, Departamento de Computación - UBA, Argentina

Abstract. En este trabajo definimos el concepto de homogeneidad de la actividad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Este indicador mide la semejanza en el cambio en el tiempo que experimentan las distintas variables del sistema en estudio. Mostramos además, que esta medida permite establecer criterios que señalan la conveniencia de usar esquemas de integración numérica clásicos basados en la discretización temporal o métodos basados en la cuantificación de las variables de estado. Además, extendemos nuestro análisis a sistemas con presencia de discontinuidades, evaluando de qué manera afectan las mismas en cada esquema de integración numérica. Finalmente, aplicamos los conceptos desarrollados a dos casos de estudio: un sistema de advección - difusión - reacción (correspondiente a un caso de modelo continuo) y una red neuronal (correspondiente a un caso de modelo híbrido). Comparamos los resultados teóricos con los obtenidos tras realizar simulaciones con diferentes métodos de integración numérica.

Keywords: ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos de integración numérica, métodos de QSS, actividad

Time Discretization vs. State Quantification: Activity Homogeneity and Discontinuities

Abstract. In this work, we define the concept of activity homogeneity for the solutions of Ordinary Differential Equations (ODEs). This indicator quantifies the similarity in the rate of change of the different variables in the system over time. We also show that this measure provides useful criteria for determining whether it is more convenient to use classic numerical integration methods based on time discretization or state quantification based methods. In addition, we extend the analysis to discontinuous systems and the effects of the presence of events in each type of numerical integration scheme. Finally, we apply the developed concepts to two case studies: an advection - diffusion - reaction system (corresponding to a continuous model) and a neural network (corresponding to a hybrid model). We compare the theoretical results with

those obtained from simulations of both systems using different numerical integration methods.

Keywords: ordinary differential equations, numeric integration methods, QSS methods, activity

1 Introducción

Los métodos clásicos de simulación de sistemas continuos representados por EDOs se basan en la discretización temporal (Cellier & Kofman, 2006; Hairer & Wanner, 1996; Hairer et al., 1993). Una alternativa a estos algoritmos la brindan los métodos de cuantificación de estados (QSS, por *Quantized State Systems* (Cellier & Kofman, 2006; Kofman & Junco, 2001; Migoni et al., 2013)) que sólo realizan pasos individuales sobre las variables de estado a medida que estas experimentan cambios significativos. Los métodos de QSS, por lo tanto, suelen ser convenientes cuando los cambios se concentran en pocas variables de estado, es decir, cuando la *actividad* (Castro & Kofman, 2015) del sistema es *heterogénea*.

En este trabajo definimos formalmente el concepto de *homogeneidad de la actividad* de un sistema brindando una medida que permite dirimir sobre la potencial conveniencia de usar un enfoque clásico o uno basado en QSS. Este concepto es ilustrado con un ejemplo de simulación en el que variando un parámetro cambia la medida de homogeneidad y con ella la conveniencia de usar uno u otro esquema numérico.

2 Antecedentes

2.1 Métodos de QSS

Consideremos un sistema continuo de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ es el vector de estados y $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ es una trayectoria conocida. El método de QSS de primer orden (QSS1) (Kofman & Junco, 2001) resuelve dicho sistema mediante la siguiente aproximación:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t)), \quad (2)$$

donde $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^N$ es el *vector de estados cuantificados* y $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ es una aproximación seccionalmente constante de $\mathbf{u}(t)$. Cada componente $q_i(t)$ sigue una trayectoria seccionalmente constante que sólo cambia cuando su diferencia con el estado correspondiente $x_i(t)$ alcanza un valor ΔQ_i llamado *quantum*. Formalmente, las trayectorias están relacionadas según:

$$q_i(t) = \begin{cases} q_i(t_k) & \text{si } |x_i(t) - q_i(t_k)| < \Delta Q_i \\ x_i(t) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $t_k < t \leq t_{k+1}$, donde t_{k+1} es el primer tiempo después de t_k en el cual $|x_i(t) - q_i(t_k)| = \Delta Q_i$.

Dado que las trayectorias de $q_i(t)$ y de $v_j(t)$ son seccionalmente constantes, en virtud de la Ec. (2), las derivadas $\dot{x}_i(t)$ también lo son y, por lo tanto, los estados $x_i(t)$ siguen trayectorias seccionalmente lineales. Debido a esta forma particular de las trayectorias, la obtención de la solución exacta de la Ec. (2) resulta sencilla y puede traducirse fácilmente en un algoritmo de simulación a eventos discretos (Kofman & Junco, 2001).

La idea de QSS1 fue también extendida a métodos de orden mayor (QSS2 (Cellier & Kofman, 2006) y QSS3 (Kofman, 2006)) que comparten la definición de la Ec.(2), pero donde los estados cuantificados siguen trayectorias seccionalmente lineales y parabólicas respectivamente. Hay también métodos linealmente implícitos (LIQSS1, LIQSS2 y LIQSS3) que funcionan eficientemente en ciertas clases de sistemas stiff (Migoni et al., 2013).

2.2 Actividad de orden n

El número de pasos mínimos que necesita un método de QSS para obtener una trayectoria puede estimarse con el concepto de *actividad* (Castro & Kofman, 2015). Dada una señal $x_i(t)$, la actividad de orden n en el intervalo $[t_0, t_f]$ se define según:

$$A_{x_i(t_0, t_f)}^{(n)} \triangleq \int_{t_0}^{t_f} a_i^{(n)}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_f} \left| \frac{d^n x_i(\tau)}{d\tau^n} \right|^{1/n} d\tau \quad (3)$$

Asumiendo que $x_i(t)$ es de orden n y $q_i(t)$ de orden $n-1$, suponiendo que ambas trayectorias no se separan entre sí más que ΔQ_i y que cada segmento de $q_i(t)$ comienza igual que $x_i(t)$ hasta la derivada $n-1$ (como lo hacen los métodos QSS1-3), se puede estimar el número mínimo de segmentos de $q_i(t)$ según:

$$k_{x_i(t_0, t_f)}^{(n)}(\Delta Q_i) \approx \frac{A_{x_i(t_0, t_f)}^{(n)}}{(\Delta Q_i)^{1/n}} \quad (4)$$

3 Resultado Principal

El concepto de actividad permite estimar el mínimo número de pasos que necesita un método de QSS. En esta sección se desarrollan los conceptos de *actividad global* y de *homogeneidad*, que permiten extender la estimación a los métodos clásicos (de tiempo discreto) y comparar con los de QSS.

3.1 Actividad instantánea, local y global

Dado el sistema de la Ec.(1), denominaremos *actividad instantánea local de orden n* de la variable $x_i(t)$ al integrando $a_i^{(n)}(t)$ de la Ec. (3) y llamaremos *actividad local de orden n* en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$ a su integral $A_{i(t_0, t_f)}^{(n)}$.

Definiremos además la *actividad instantánea global* de orden n del sistema de la Ec.(1) $a_G(t)^{(n)}$ y la *actividad global* $A_{G(t_0,t_f)}^{(n)}$ en el intervalo $[t_0, t_f]$ según:

$$A_{G(t_0,t_f)}^{(n)} \triangleq \int_{t_0}^{t_f} a_G(\tau)^{(n)} d\tau \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \max_i a_i(t)^{(n)} d\tau \quad (5)$$

3.2 Relación entre la actividad y el número de pasos

La relación entre actividad y número de pasos en QSS puede deducirse a partir del siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en https://fceia.unr.edu.ar/~kofman/files/Dem_Teo_Cheb.pdf:

Theorem 1. *Dada una señal $x_i(t)$ expresada por un polinomio de orden n , existe un polinomio $q_i(t)$ de grado $n-1$ que verifica la condición $|q_i(t) - x_i(t)| \leq \Delta Q_i$ en el intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ si y sólo si*

$$\Delta t \leq \frac{2^{\frac{2n-1}{n}} \Delta Q_i^{\frac{1}{n}}}{a_i^{(n)}(t_0)} \quad (6)$$

Donde $a_i^{(n)}(t_0)$ es la actividad instantánea local de orden n de la señal $x_i(t)$ en $t = t_0$.

De esta manera, en un método tipo QSS de orden n , el número de segmentos de $q_i(t)$ necesarios para aproximar a $x_i(t)$ sin desviarse más que ΔQ_i se puede estimar a partir de la Ec.(6) como

$$k_{x_i[t_0,t_f]}^{(n)} \approx \frac{A_{x_i[t_0,t_f]}^{(n)}}{2^{\frac{2n-1}{n}} \cdot (\Delta Q_i)^{\frac{1}{n}}} \quad (7)$$

y el número de pasos totales en una simulación será mayor a:

$$k_{\text{QSS}[t_0,t_f]}^{(n)} \approx \sum_{i=1}^N k_{x_i[t_0,t_f]}^{(n)} \approx \sum_{i=1}^N \frac{A_{x_i[t_0,t_f]}^{(n)}}{2^{\frac{2n-1}{n}} \cdot (\Delta Q_i)^{\frac{1}{n}}} \quad (8)$$

Aplicando este razonamiento para un método clásico de paso variable que compara una fórmula de orden $n-1$ con una de orden n (tal que la diferencia en cada variable sea menor que la tolerancia ΔQ), resulta

$$k_{\text{DT}[t_0,t_f]}^{(n)} \approx \frac{A_{G[t_0,t_f]}^{(n)}}{2^{\frac{2n-1}{n}} \cdot (\Delta Q)^{\frac{1}{n}}} \quad (9)$$

3.3 Factor de Homogeneidad

Definimos el factor de homogeneidad de la actividad según:

$$H_{\mathbf{x}[t_0,t_f]}^{(n)} \triangleq \frac{\sum_{i=1}^N A_{x_i[t_0,t_f]}^{(n)}}{N \cdot A_{G[t_0,t_f]}^{(n)}} \quad (10)$$

Este factor resulta siempre $1/n \leq H \leq 1$. La condición $H \approx 1$ implica que la actividad instantánea es similar en todas las variables (actividad homogénea). Por otro lado, $H \approx 1/n$ implica que la actividad instantánea de todas las variables excepto de una es cercana a cero (actividad heterogénea).

Suponiendo que $\Delta Q_i = \Delta Q$ y dividiendo las Ecs.(8) y (9), resulta $H_{\mathbf{x}[t_0, t_f]}^{(n)} = k_{\text{QSS}[t_0, t_f]}^{(n)} / N k_{\text{DT}[t_0, t_f]}^{(n)}$. Cada paso de un método clásico actualiza las N variables de estado mientras que cada paso de un método tipo QSS actualiza $r_i \leq N$ variables (la variable que cambia más las derivadas que se ven afectadas por dicho cambio, lo cual depende de qué tan ralo sea el sistema). Por lo tanto, llamando r al numero medio de variables que afecta cada una de ellas, la condición $H \cdot r < 1$ indicará que sería conveniente actualizar individualmente las variables de estado (QSS) mientras que $H \cdot r > 1$ indicará lo contrario.

El análisis anterior muestra que cuando la solución es homogénea $H \approx 1$ siempre convendrá usar métodos clásicos. Por otro lado, cuando la solución sea heterogénea, convendrá usar QSS siempre y cuando el factor r sea chico (es decir, que el sistema sea ralo).

4 Ejemplo ilustrativo

Consideraremos la discretización con el método de líneas de una ecuación de Advección-Difusión-Reacción:

$$\dot{u}_i(t) = -A \cdot \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{\Delta x} + D \cdot \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i + u_{i-1}(t)}{\Delta x^2} + R \cdot (u_i(t)^2 - u_i(t)^3)$$

con $i = 1, \dots, N$; $N = 10$; $\Delta x = 1$; $A = 1$ y con dos escenarios, uno dominado por la reacción (Esc.1: $D = 0.1$ y $R = 1000$) y otro por la difusión (Esc.2: $D = 2$ y $R = 0.1$). Las Figs. 1a y 1b ilustran las trayectorias en ambos escenarios.

Las actividades instantáneas locales y globales correspondientes de orden 2, calculadas según las Ecs. (3) y (5), se muestran en las Figs. 1c y 1d. Puede verse que en el primer caso la actividad global es siempre similar a una actividad local mientras las restantes son cercanas a cero, mientras que en el segundo caso las actividades locales son parejas. En consecuencia, el factor de homogeneidad calculado según la Ec.(10) es $H_1 = 0.1091$ (cercano a $1/N$) y $H_2 = 0.561$ (más próximo a 1). Teniendo en cuenta que un cambio en en estado provoca cambios en $r = 3$ derivadas, los productos $H_1 \cdot r = 0.3279$ y $H_2 \cdot r = 1.6827$ indican que conviene usar métodos tipo QSS en el primer escenario (Esc.1) y métodos clásicos en el segundo (Esc.2).

Esto fue corroborado simulando ambos escenarios con los métodos de LIQSS2 y una versión de paso variable de la regla trapezoidal para distintos valores de tolerancia. El número teórico mínimo de pasos y actualizaciones según las Ecs. (8) y (9) y los valores observados luego de simular ambos escenarios se reportan en la Tabla 1.

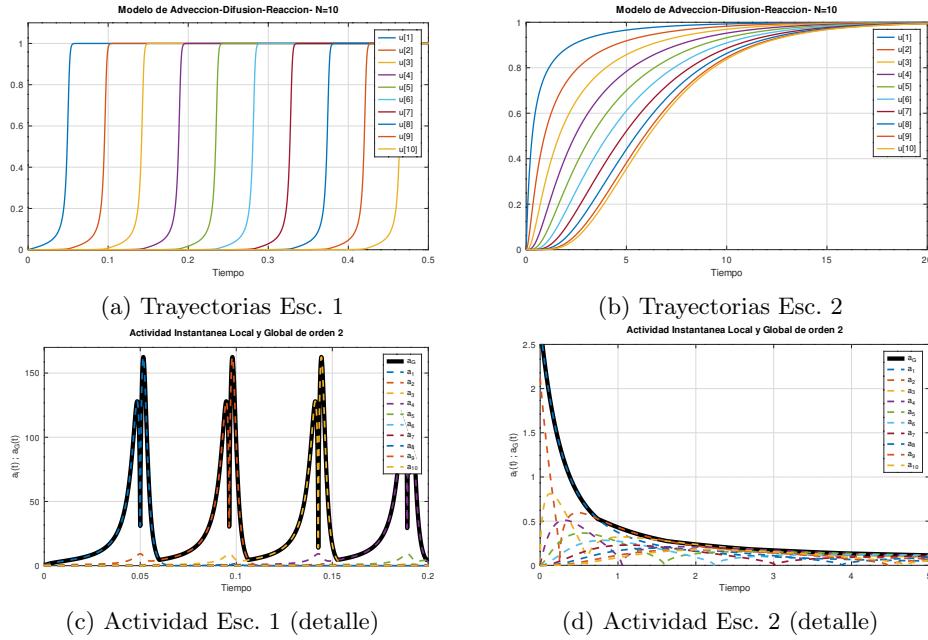


Fig. 1: Trayectorias y actividades de cada escenario

En esta tabla, podemos observar que aunque los los valores teóricos del número de pasos mínimo requerido siempre son menores que los pasos efectivamente necesarios en la simulación, en todos los casos son valores que se encuentran en el mismo orden de magnitud. Esto ocurre, ya que ninguno de los dos métodos de integración numérica utilizados están optimizados para realizar las aproximaciones según el Teorema 1. Podemos observar como en el Escenario 1, a pesar de que las cantidades de pasos requeridos por ambos métodos es similar, debido a la heterogeneidad de la actividad del sistema (la tasa de cambio de las variables en el tiempo no es similar sumado a que un cambio en una variable sólo afecta a dos variables y no a todas), resulta más conveniente la simulación con LIQSS2 como se comprueba en la cantidad total de actualizaciones necesarias en cada caso. Por otro lado, al ser el Escenario 2 más homogéneo (la tasa de cambio de todas las variables es más similar a lo largo del tiempo), tanto la cantidad de pasos, como la cantidad de actualizaciones de la regla trapezoidal resultan valores menores que los obtenidos en el caso de LIQSS2.

5 Sistemas con discontinuidades

Para considerar las discontinuidades, debemos modificar las definiciones de *actividad instantánea local* y *actividad instantánea*. En el caso de la *actividad instantánea local*, en todos los instantes de tiempo en el que no ocurra ningún evento que afecte la señal, seguirá estando definida por el integrando $a_i^{(n)}(t)$ de

Abs. Tol.	LIQSS2				Regla Trapezoidal				
	Pasos		Actualizaciones		Pasos		Actualizaciones		
	Mínimo Teórico	Real	Mínimo Teórico	Real	Mínimo Teórico	Real	Mínimo Teórico	Real	
Esc. 1	1E-2	68	157	204	471	62	225	620	2250
	1E-3	215	354	645	1062	196	628	1960	6280
	1E-4	678	945	2034	2835	620	1870	6200	18700
Esc. 2	1E-2	56	408	168	1224	10	37	100	370
	1E-3	177	619	531	1857	32	102	320	1020
	1E-4	560	1084	1680	3252	100	305	1000	3050

Table 1: Nro. mínimo teórico y real de pasos y actualizaciones requerido por diferentes métodos numéricos

la Ec. (3), pero en los instantes de tiempo en los que ocurra un evento, la *actividad instantánea local* $a_i^{(n)}(t)$ se establece en cero. Suponiendo que durante un período de simulación (t_0, t_f) ocurren k eventos en los instantes t_1, t_2, \dots, t_k que afectan a la variable $x_i(t)$, la actividad local $A_{i(t_0, t_f)}^{(n)}$ de esta señal en el intervalo (t_0, t_f) debe calcularse integrando sobre cada subintervalo $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{k-1}, t_k), (t_k, t_f)$, donde la señal permanece continua, y luego sumando dichos resultados, como lo indica la Ec. (11).

$$A_{i(t_0, t_f)}^{(n)} \triangleq \sum_{j=1}^{k+1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} a_i(\tau)^{(n)} d\tau \quad (11)$$

donde $t_{k+1} = t_f$.

Mientras que tanto la *actividad instantánea global* $a_G(t)^{(n)}$, como la actividad global $A_{G(t_0, t_f)}^{(n)}$, seguirán definidas según las Ec. (5) .

De esta manera, para calcular la totalidad de pasos requeridos por un algoritmo para completar una simulación en un intervalo (t_0, t_f) , debemos sumar tanto los pasos necesarios para aproximar las señales continuas, como los pasos debido a la ocurrencia de eventos.

Suponiendo que ocurren d discontinuidades en el intervalo (t_0, t_f) y considerando las Ecs.(8) y (9), indicaremos a continuación el número mínimo de pasos requeridos por un método de integración numérica para simular un sistema durante el intervalo indicado y la cantidad mínima de actualizaciones requeridas (considerando que ante la ocurrencia de un evento los métodos de cuantificación de estados sólo actualizarán las r_d variables afectadas por el evento, mientras que un método tradicional de discretización temporal, actualiza las N variables presentes en el sistema):

– Cuantificación de estados:

Mínimo número de pasos:

$$k_{QSS(t_0, t_f)}^{(n)}(\Delta Q) + d \quad (12)$$

Mínimo número de actualizaciones:

$$u_{QSS(t_0, t_f)}^{(n)}(\Delta Q) + d \cdot r_d \quad (13)$$

– **Discretización temporal:**

Mínimo número de pasos:

$$k_{DT(t_0, t_f)}^{(n)}(\Delta Q) + d \quad (14)$$

Mínimo número de actualizaciones:

$$u_{DT(t_0, t_f)}^{(n)}(\Delta Q) + d \cdot N \quad (15)$$

Para analizar cuál de estas opciones tiene menor costo computacional, debemos considerar ahora la siguiente relación:

$$\frac{u_{QSS(t_0, t_f)}^{(n)}(\Delta Q) + d \cdot r_d}{u_{DT(t_0, t_f)}^{(n)}(\Delta Q) + d \cdot N} \quad (16)$$

De donde puede concluirse en primer lugar que si $u_{QSS} < u_{DT}$ (es decir $H \cdot r_i < 1$), la presencia de discontinuidades no va a afectar la conveniencia del uso de un esquema de cuantificación de estados, sino que cuanto menor sea r_d , más ventajosa va a ser esta opción.

Luego, si $u_{QSS} > u_{DT}$, podemos tener distintas situaciones. Si el número de eventos es chico ($d \rightarrow 0$) en comparación al número de pasos necesarios para aproximar la parte continua de las señales, el cociente de la Ec. (16) va a tender a $u_{QSS}/u_{DT} = H \cdot r_i$ y podría tenerse en cuenta el análisis de la homogeneidad del sistema sin discontinuidades de la sección anterior. En caso contrario, si el número de discontinuidades es grande ($d \rightarrow \infty$), el cociente de la Ec. (16) va a tender a $\frac{d \cdot r_d}{d \cdot N}$, que siempre es menor a 1.

Por otro lado, cuando la ocurrencia de un evento afecta sólo a un pequeño número de variables ($r_d < N$), aumenta la heterogeneidad en la actividad del sistema, situación en la cuál es más conveniente el uso de métodos basados en la cuantificación de estados. Por el contrario, cuanto más se acerque el número de variables afectadas al número total de variables ($r_d \rightarrow N$), es probable que los métodos clásicos (discretización temporal) sigan siendo la opción más conveniente de utilizar.

5.1 Ejemplo de aplicación con discontinuidades

Para ejemplificar un sistema que combina dinámicas continuas con eventos discretos presentamos el caso de una red neuronal. Para representar el comportamiento de cada neurona utilizamos el modelo de integración y disparo con fugas (LIF) como los utilizados en Schmidt et al., 2018 y Bergonzi et al., 2023, donde las sinapsis son representadas por saltos instantáneos y un decaimiento exponencial. Las variables de estado presentes en el modelo son el potencial de

membrana $V(t)$ y la corriente sináptica $I_s(t)$, cuya dinámica está descrita por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dI_s}{dt} &= -\frac{I_s(t)}{\tau_s} + I_e \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{V(t) - E_L}{\tau_m} + \frac{I_s(t)}{C_m}\end{aligned}\quad (17)$$

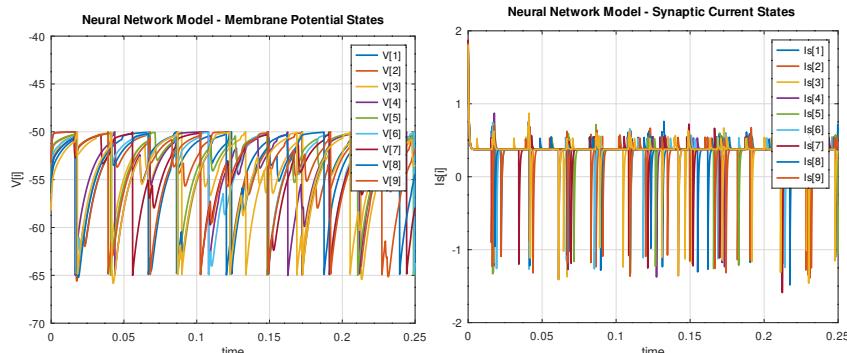
donde τ_s es la constante de tiempo de corriente postsináptica, E_L es el potencial de fuga, τ_m es la constante de tiempo de la membrana y C_m es la capacitancia de la membrana. I_e representa una corriente externa inyectada directamente en la neurona, que se considerará en este trabajo como única entrada constante de cada neurona.

Modelamos $N_e = 1,000$ neuronas interconectadas, de las cuales 800 son del tipo excitatorio y las restantes 200 inhibitorias. Cada neurona recibe impulsos de entrada de $m = 10$ conexiones sinápticas seleccionadas de manera aleatoria, de las cuales 80% son desde neuronas excitatorias y 20% inhibitorias. Cada vez que una neurona alcanza el umbral de disparo θ , se genera un pico de actividad (spike) y el potencial de membrana $V(t)$ se restablece al potencial de reposo V_r . En las neuronas que reciben estas spikes, se actualiza la corriente sináptica como:

$$I_s(t^+) \leftarrow I_s(t) + \Delta I \triangleq I_s(t) + J \quad (18)$$

donde J es la intensidad sináptica excitatoria correspondiente a la neurona que emitió el spike.

Las figuras 2a y 2b muestran la evolución de las variables de estado de un grupo de neuronas pertenecientes a la red, simulada durante un período de 0.25 segundos utilizando el software QSS Solver, considerando una corriente externa de entrada $I_e = 751\text{nA}$ para todas las neuronas.



(a) Evolución del potencial de membrana para un grupo de neuronas (b) Evolución de la corriente sináptica para un grupo de neuronas

Para analizar cómo impacta la presencia de discontinuidades en la simulación de un sistema, proponemos 3 escenarios con diferente densidades de eventos, lo que logramos variando el valor de la corriente de entrada I_e , ya que cuanto mayor sea la misma, más grande será la frecuencia de disparos de cada neurona.

Para cada valor de $I_e \in \{751\text{nA}; 800\text{nA}; 1000\text{nA}\}$, realizamos simulaciones utilizando LIQSS2 and CVODE₂, variando además la tolerancia ($\Delta Q \in \{1E-1, 1E-2, 1E-3\}$). Consideramos los mismos parámetros que los propuestos en Bergonzi et al., 2023 para las Ecs. (17)-(18). En cada caso además, calculamos las actividades locales y globales como también los factores de homogeneidad. Para finalmente estimar el número de pasos teórico mínimo que requerirá cada tipo de método para completar las simulaciones. Estos resultados se presentan en las columnas de la izquierda de la tabla 2. Mientras que en las columnas de la derecha se muestran el número de discontinuidades obtenidas en la solución de referencia y en las simulaciones con diferentes tolerancias.

I_e [nA]	Tol. Abs.	Segmentos de polinomios				Discontinuidades		
		LIQSS2		CVODE ₂		Solución de referencia	LIQSS2	CVODE ₂
		Nro. Mín. Teórico	Resultado de simulación	Nro. Mín. Teórico	Resultado de simulación			
751	1E-1	1.15E+5	1.60E+5	5.47E+3	9.57E+3	4741	4956	4543
	1E-2	3.55E+5	4.51E+5	7.04E+3	1.08E+4		4500	4864
	1E-3	1.11E+6	1.41E+6	1.20E+4	1.28E+4		4705	4753
800	1E-1	2.10E+5	2.09E+5	8.98E+3	1.52E+4	7707	7545	7548
	1E-2	6.49E+5	7.63E+5	1.17E+4	1.69E+4		7742	7710
	1E-3	2.03E+6	2.32E+6	2.05E+4	2.08E+4		7750	7725
1000	1E-1	3.05E+5	3.05E+5	1.60E+4	2.85E+4	14531	14318	14292
	1E-2	9.33E+5	1.15E+6	1.92E+4	3.00E+4		14479	14493
	1E-3	2.92E+6	3.49E+6	2.92E+4	3.55E+4		14530	14521

Table 2: Número de pasos mínimo teórico y simulados de distintos métodos numéricos

En este modelo, el comportamiento de cada neurona está representado por 2 variables de estado, por lo que el sistema está compuesto por 2000 variables de estado y el rango para el valor de H será $[\frac{1}{2000}; 1]$. En los tres escenarios analizados los valores de H están más cerca del límite inferior, lo que es consistente con el comportamiento heterogéneo de las neuronas del sistema.

En la Tabla 3 mostramos la comparación del resultado teórico de $H \cdot r_i$, $\frac{u_{QSS}+d \cdot r_d}{u_{DT}+d \cdot N}$ y el resultado de simulación $\frac{\text{sim updates}_{QSS}+d_{QSS} \cdot r_d}{\text{sim updates}_{DT}+d_{DT} \cdot N}$.

A partir de la Tabla 2, podemos observar que los resultados teóricos estimados para el número mínimo de pasos requeridos para completar la simulación de la red neuronal son consistentes con los pasos que efectivamente realizaron los distintos métodos. La misma conclusión surge al comparar los resultados de las últimas dos columnas de la Tabla 3 que muestran la relación entre las actualizaciones requeridas por cada método calculada teóricamente y obtenida

Escenario	ΔQ	Resultados Teóricos		Resultados de Simulación	
		$H^{(2)} \cdot r_i$	$\frac{u_{QSS} + d \cdot r_d}{u_{DT} + d \cdot N}$	sim updates _{QSS} + sim $d_{QSS}r_d$	sim updates _{DT} + sim $d_{DT}N$
$I_e = 751$	$1E - 1$		0.025	0.020	
	$1E - 2$	0.152	0.053	0.044	
	$1E - 3$		0.094	0.112	
$I_e = 800$	$1E - 1$		0.027	0.016	
	$1E - 2$	0.158	0.058	0.048	
	$1E - 3$		0.101	0.114	
$I_e = 1000$	$1E - 1$		0.023	0.013	
	$1E - 2$	0.198	0.052	0.041	
	$1E - 3$		0.102	0.101	

Table 3: Relación de los costos computacionales de un método basado en cuantificación de estados y uno de discretización temporal obtenidos teóricamente y por simulación

efectivamente tras las simulaciones. Este cociente resulta menor que el resultado teórico de $H \cdot r_i$, cuyo valor ya era menor a 1 debido a que $r_d < N$. Esta idea se alinea con la mayor conveniencia de usar de un esquema de cuantificación de estados, como también el hecho de que la cantidad de actualizaciones requeridas por un método de tipo QSS es menor que la requerida por un método de discretización temporal.

6 Conclusiones y Trabajo Futuro

Definimos formalmente el concepto de homogeneidad de la actividad de las soluciones de una EDO, factor que permite establecer la conveniencia de usar métodos de integración clásicos o de tipo QSS. Mostramos además su uso en un ejemplo ilustrativo corroborando los resultados teóricos obtenidos. Extendimos el análisis teórico considerando modelos que combinan dinámicas continuas y discretas por la presencia de eventos, lo que luego comparamos con resultados de simulación obtenidos en un ejemplo de aplicación.

A futuro resta extender el concepto para considerar la *actividad relativa* que permita acotar por debajo el número de pasos cuando se realiza control sobre el error relativo.

References

Bergonzi, M., Fernández, J., Castro, R., Muzy, A., & Kofman, E. (2023). Quantization-based simulation of spiking neurons: Theoretical properties and performance analysis. *Journal of Simulation*, 1–24.

Castro, R., & Kofman, E. (2015). Activity of order n in continuous systems. *Simulation*, 91(4), 337–348.

Cellier, F., & Kofman, E. (2006). *Continuous System Simulation*. Springer.

Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). *Solving ordinary differential equations. i: Nonstiff problems*. Springer.

Hairer, E., & Wanner, G. (1996). *Solving ordinary differential equations. ii: Stiff and differential-algebraic problems*. Springer-Verlag.

Kofman, E., & Junco, S. (2001). Quantized State Systems. A DEVS Approach for Continuous System Simulation. *Transactions of SCS*, 18(3), 123–132.

Kofman, E. (2006). A third order discrete event method for continuous system simulation. *Latin American applied research*, 36(2), 101–108.

Migoni, G., Bortolotto, M., Kofman, E., & Cellier, F. E. (2013). Linearly implicit quantization-based integration methods for stiff ordinary differential equations. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 35, 118–136.

Schmidt, M., Bakker, R., Shen, K., Bezgin, G., Diesmann, M., & van Albada, S. J. (2018). A multi-scale layer-resolved spiking network model of resting-state dynamics in macaque visual cortical areas. *PLOS Computational Biology*, 14(10), 1–38.