

## Un enfoque jerárquico para la planificación óptima de la producción, el inventario y la distribución de una empresa manufacturera

Lucas Porporatto<sup>1</sup>, Gabriela Corsano<sup>1</sup>, Yanina Fumero<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Desarrollo y Diseño, CONICET-UTN, Avellaneda 3657, S3002GJC Santa Fe, Argentina  
 {lporporatto, gcorsano, yfumero}@santafe-conicet.gov.ar

**Resumen.** En los últimos años, la coordinación de las actividades de producción, inventario y distribución de productos se ha vuelto esencial para enfrentar las exigencias del mercado al menor costo posible. En este trabajo se aborda el problema conocido en la literatura como *Production-Inventory-Routing Problem* (PIRP) mediante un enfoque de programación mixta-entera lineal (MILP). El reto de estos modelos radica en responder a interrogantes tales como qué, cuándo y cuánto producir, cuánto de ello almacenar en la planta y cómo distribuir posteriormente los diversos productos de la empresa a los distintos clientes de tal manera que se satisfaga la demanda y se minimicen los costos de toda la cadena de suministros. Teniendo en cuenta la complejidad combinatoria de las decisiones involucradas, se propone la resolución secuencial de dos modelos MILP: uno para determinar la producción, inventario y entrega de productos, y otro para el ruteo, a fin de lograr resultados cercanos al óptimo en un tiempo de cómputo razonable. El enfoque propuesto se aplica a una industria manufacturera de la provincia de Santa Fe, sirviendo como herramienta de apoyo a la toma de decisiones relacionadas con alcanzar el mínimo costo en las tareas mencionadas para un horizonte semanal.

**Palabras claves:** Problema de Producción-Inventario-Ruteo, Optimización, MILP, Pedidos con retraso.

**Abstract.** In recent years, the coordination of production, inventory, and product distribution activities has become essential to meet market demands at the lowest possible cost. The problem known in the literature as the *Production-Inventory-Routing Problem* (PIRP) is addressed in this work through a mixed-integer linear programming (MILP) approach. The challenge of these models lies in answering questions such as what, when, and how much to produce, how much to store at the facility, and how to distribute the various products of the company to different customers in a way that demand is met at minimum costs across the entire supply chain. Taking into account the combinatorial complexity of the decisions involved, a hierarchical solution based on MILP-models is proposed: first, production, inventory, and product delivery is determined, and then routing is solved, in order to achieve results close to optimal within a reasonable computation time. The proposed approach is applied to a manufacturing industry in the Santa Fe province, in order to support the company's decision-

Received May 2025; Accepted June 2025; Published July 2025



This work is under a Creative Commons  
 Attribution – NonCommercial – Share Alike 4.0 International License

making related to achieving the minimum cost in the tasks mentioned for a weekly horizon.

**Keywords:** Production Inventory Routing Problem, Optimization, MILP, Backorder.

## 1 Introducción

Gestionar la producción, inventario y distribución de productos es una tarea cotidiana en cualquier industria manufacturera. Históricamente, estas decisiones se tomaban de forma secuencial e independiente, estableciendo por un lado el plan de producción y por el otro la distribución final de los productos a los diferentes clientes, utilizando al inventario como desacople entre ambos. Sin embargo, la globalización de la economía en general, y de sus correspondientes cadenas de suministro, junto con la elevada competencia que esto genera en los mercados, hace imprescindible la necesidad de hacer un uso más eficiente de los recursos al mismo tiempo de aumentar el servicio a los clientes. Por esta razón, en los últimos años, la gestión de la cadena de abastecimiento se ha centrado en la integración tanto de actores como de las decisiones debido a los beneficios que esto conlleva ([1], [2]).

Bajo esta perspectiva, y gracias al avance de la tecnología, se han desarrollado nuevas formas de integrar la cadena de suministros. Una de ellas es el acuerdo conocido como *Vendor Managed Inventory* (VMI), que implica que los proveedores gestionen el inventario de sus clientes. Esto requiere de un conocimiento constante de los niveles del inventario, lo que subraya la importancia de tener acceso a esta información. De esta manera, los proveedores pueden abordar de manera integrada el problema de planificación de la cadena de abastecimiento, lo que lleva a una utilización más eficiente de los recursos en general [3].

La optimización de la cadena de suministros integrando sus eslabones implica tomar cuatro decisiones claves de nivel táctico-operativo [4]: (i) qué productos manufacturar, cuánto y cuándo hacerlo, (ii) cuándo visitar a cada cliente, (iii) cuánto entregar a estos en la visita, y por último (iv) qué ruta utilizar para llegar a ellos. Estas interrogantes, de forma separada, son problemas ampliamente conocidos y estudiados en la literatura: el *Lot-Sizing Problem* (LSP) para las decisiones (i), (ii) y (iii), y el *Vehicle Routing Problem* (VRP) para las decisiones (ii), (iii) y (iv). Además, si se incorpora la gestión del inventario al VRP, se transforma en otro problema conocido en la literatura como *Inventory Routing Problem* (IRP). Este enfoque no solo mejora la planificación logística, sino que también optimiza el uso de recursos y minimiza costos operativos. Finalmente, abordar todas estas decisiones de forma simultánea implica un desafío mayor, conocido como *Production Inventory Routing Problem* (PIRP). Este problema es crítico para las empresas que buscan no solo satisfacer la demanda de sus clientes, sino también mantener la eficiencia operativa y la rentabilidad en un entorno de mercado cada vez más competitivo. Éstos son los motivos que nos llevan a enfocar el presente trabajo en el estudio de este problema.

Los problemas PIRP han recibido mucha atención en la última década a través de diferentes formulaciones. Dado que LSP y VRP son problemas *NP-hard*, por extensión también lo son IRP y fundamentalmente PIRP. Si bien existen desarrollos de métodos exactos para abordarlo, como *Branch and price* [4], *Lagrangian relaxation* ([5], [6]) y variantes del algoritmo *branch and cut* ([7], [8]), la mayoría de los trabajos están enfocados en métodos heurísticos como *large neighborhood search* [9], *tabu search* [10], *greedy randomized adaptive search procedures* [11], *memetic algorithms* [12] y *particle swarm optimization* [13]. Incluso se han desarrollado métodos iterativos ([14], [15], [16]) y heurísticos basados en programación matemática [17]. El presente trabajo se encuentra bajo esta última línea, y se utilizará programación matemática para alcanzar valores cercanos al óptimo del PIRP en tiempo de cómputo razonable. Para una revisión más exhaustiva de la bibliografía, se sugiere consultar Hrabec y col. [18].

En este trabajo, el objetivo es generar una formulación matemática del PIRP que se adapte a las necesidades de una empresa manufacturera de la provincia de Santa Fe y le sirva como sistema de soporte en la toma de las decisiones involucradas. Debido a la complejidad que presenta el PIRP, se propone una estrategia de descomposición para la resolución. En una primera etapa, se desarrolla y resuelve un modelo MILP para determinar la producción, inventario y entrega de productos. Luego, conociendo las cantidades producidas y enviadas por cada ruta, se resuelve el ruteo de los camiones que salen de la fábrica y se dirigen a los distintos clientes.

Las particularidades que presenta este enfoque y que lo diferencia de los casos propuestos en la bibliografía, han generado los principales aportes del trabajo. Ellos son:

- Gestión de *backorders* y
- Diversidad de nodos a atender: sucursales, clientes finales y clientes prioritarios.

Por un lado, se considera *backorder* a aquellos productos demandados por un cliente y que no han podido cumplirse a tiempo, por lo que quedan pendientes de entrega. Son escasos los trabajos del área que permiten el atraso en la entrega de productos o, en otras palabras, el incumplimiento de la demanda. De la búsqueda realizada, sólo el trabajo de Brahimi y Aouam [19] contempla la posibilidad de *backorders*. Sin embargo, estos autores consideran una flota de vehículos homogénea, a diferencia del caso que se aborda en este trabajo donde se tienen en cuenta diferentes tipos de vehículos. Por otro lado, se contemplan sucursales y clientes finales a atender, habiendo dentro de éstos últimos un grupo denominado prioritarios, sobre los que no se permite incurrir en *backorder*. De esta manera, la presente formulación considera diferentes tipos de nodos a satisfacer y, de acuerdo con la búsqueda realizada, ningún trabajo del área hace esta distinción, a pesar de ser una característica usual de la industria en general, ya que es habitual tener en simultáneo sucursales y clientes finales (con mayor o menor prioridad).

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se detalla el problema a abordar, para luego presentar su formulación matemática en la sección 3. La

sección 4 está destinada al caso de estudio con los resultados computacionales del modelo, dejando las conclusiones y posibles futuros trabajos para la sección 5.

## 2 Descripción del problema

En la cadena de suministro bajo estudio se considera una fábrica  $v_0 \in V$  dedicada a la producción de múltiples productos  $p \in P$  pertenecientes a diferentes familias  $f \in F$ , con limitaciones diarias en su capacidad productiva  $CapF_f$  y de almacenamiento  $CapV_{v_0}$ . Las órdenes de pedido  $o \in O$  de los clientes  $v \in V$ , cada una con una demanda específica de productos  $d_{o,p}$ , son conocidas sobre un conjunto finito y discreto de períodos de tiempo  $t \in T$ , siendo usualmente días. Estas demandas son satisfechas desde la fábrica a través del envío de productos por las rutas  $r \in R$ , las cuales son conocidas e involucran un subconjunto de clientes a los que se puede visitar en su recorrido. Como parte de las decisiones del problema, se debe determinar cuáles rutas utilizar y a qué clientes visitar a través de ellas en cada viaje. Para las entregas, se cuenta con un conjunto de vehículos  $k \in K$ , cada uno con diferentes capacidades de transporte  $CapC_c$  dependiendo su tipo  $c \in C$ , vinculando ambos a través de la relación  $K_c$ . Los puntos de demanda, también conocidos como sumideros, se encuentran distribuidos a lo largo y ancho del país, y poseen características que los distinguen unos de otros: algunos son sucursales de la misma empresa  $v \in V_S \subseteq V$ , contando con capacidad de almacenamiento  $CapV_v$ , mientras que otros son simplemente clientes finales  $v \in V_{CF} \subseteq V$ . Dentro del conjunto de los clientes finales, existen algunos clientes considerados por la compañía como prioritarios  $v \in V_{CFP} \subseteq V_{CF}$ , a quienes deben satisfacerse las demandas en la fecha indicada (o antes). En cambio, los clientes que no son considerados prioritarios, pueden sufrir entregas tardías.

Existen diferentes costos sobre los que se incurre en esta cadena de suministro. Al momento de producir, hay costos fijos  $CS_f$  vinculados a cada familia y costos variables  $CP_p$  que dependen de la cantidad producida. Esta producción genera inventario, el cual implica un costo  $CI_p$  tanto en la fábrica como en las sucursales donde luego se almacenan también. De igual manera, el uso de vehículos para el transporte significa un costo variable (por la distancia recorrida,  $CT_c$ ) y un costo fijo (por su utilización en un determinado día,  $CFT_c$ ) según el tipo de vehículo. Por último, el incumplimiento de las órdenes de los clientes también se imputa como un costo de penalización  $CB_p$ .

La política de distribución utilizada es conocida como *maximum level* (ML). Esta consiste en entregar a cada sucursal una cantidad de productos restringida simplemente por su espacio de almacenamiento y la capacidad del vehículo utilizado. Esto se diferencia de la alternativa conocida como *Order-up to level* (OU), en la cual siempre que se decida visitar a una sucursal debe completarse el inventario hasta su nivel máximo. En ML no es necesaria esta condición [20].

### 3 Formulación matemática

#### 3.1 PIRP

En esta sección se presenta uno de los modelos MILP para resolver el problema PIRP anteriormente planteado. Los nodos previamente descritos (fábrica, sucursales y clientes) se encuentran a su vez agrupados en localidades  $l \in L$  a las cuales pertenecen, mediante la relación  $V_l$ . La fábrica es la encargada de elaborar los productos a distribuir, cada uno de los cuales está asociado a una determinada familia de productos a través de la relación  $P_f$ . Estos son almacenados en la fábrica para luego ser distribuidos a los distintos nodos con el objetivo de satisfacer las órdenes de pedido. Toda orden posee una fecha límite de entrega, indicada con la relación  $O_t$ , además de estar asociada a un nodo particular mediante la relación  $O_v$ . Si bien toda orden pertenece a un único nodo (sucursal o cliente), estos pueden tener múltiples órdenes asociadas con distintas fechas límite, o incluso con la misma fecha. Para la entrega de los productos, se conocen las localidades que cada ruta recorre a través de la relación  $L_r$  (localidad-ruta). La flota de vehículos es limitada, por lo que existe un número máximo de unidades de cada tipo que se pueden utilizar por período de tiempo ( $n_{ct}$ ). Debido a las extensas distancias que existen entre la fábrica y ciertas localidades ( $df_{rl}$ ), en la práctica se puede requerir más de un día para cubrir la demanda de dicha localidad. Esto se tiene en cuenta en el modelo mediante el parámetro  $dt_{rl}$  el cual indica los días necesarios para atender a la localidad  $l$ , partiendo desde la fábrica, y a través de la ruta  $r$ .

El objetivo del PIRP es minimizar el costo asociado a la producción, inventario y distribución de los productos, sujeto a restricciones de capacidad en las diferentes etapas. Para la formulación del modelo matemático se definen las siguientes variables de decisión:

- $Y_{c,r,t}$ : variable binaria, igual a 1 si se utiliza al menos un vehículo de tipo  $c$  por la ruta  $r$  en el tiempo  $t$
- $X_{f,t}$ : variable binaria, igual a 1 si se produce la familia  $f$  en el tiempo  $t$
- $Q_{p,t}$ : unidades de producto  $p$  producidas en el tiempo  $t$
- $Q_{p,r,v,t}$ : unidades de producto  $p$  enviadas al nodo  $v$  mediante la ruta  $r$  en el tiempo  $t$
- $I_{p,v,t}$ : unidades de producto  $p$  almacenadas en el nodo  $v$  al finalizar el tiempo  $t$
- $Bg_{p,v,t}$ : unidades acumuladas de producto  $p$  demandadas y no cumplidas en el nodo  $v$  al finalizar el tiempo  $t$  (*backorder*)
- $Nc_{c,r,t}$ : número de vehículos a utilizar de tipo  $c$  en la ruta  $r$  en el tiempo  $t$
- $CT$ : costo total.

Además, se considera la siguiente nomenclatura para la definición de conjuntos y parámetros extras que se requieren para las restricciones:

- $V'$ : Conjunto de nodos sin la fábrica:  $V - \{v_0\}$
- $V_I$ : Conjunto de nodos  $v$  que gestionan inventario:  $V_S \cup \{v_0\}$
- $II_{p,v}$ : stock inicial de producto  $p$  inventariado en el nodo  $v$  a tiempo  $t = 0$

- $dfp_r$ : Distancia promedio de la ruta  $r$  desde la fábrica
- $Vol_p$ : Volumen del producto  $p$
- $FUP$ : Factor de utilización de la producción
- $FUT$ : Factor de utilización mínimo del transporte
- $FUM$ : Factor de utilización máximo del transporte

Las ecuaciones del PIRP asociado son:

$$\begin{aligned} \min \quad CT = & \sum_{f \in F} \sum_{t \in T} X_{f,t} \cdot CS_f + \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} Qp_{p,t} \cdot CP_p + \\ & \sum_{v \in V_l} \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} I_{p,v,t} \cdot CI_p + \sum_{v \in V_{CF}} \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} Bg_{p,v,t} \cdot CB_p + \\ & \sum_{c \in C} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} CT_c \cdot dfp_r \cdot Nc_{c,r,t} \cdot 2 + Nc_{c,r,t} \cdot CFT_c \quad (1) \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\sum_{p \in P_f} Qp_{p,t} \leq X_{f,t} \cdot CapF_f, \quad \forall t \in T, f \in F \quad (2)$$

$$\sum_{p \in P_f} Qp_{p,t} \geq FUP \cdot X_{f,t} \cdot CapF_f, \quad \forall t \in T, f \in F \quad (3)$$

$$I_{p,0,t-1} + Qp_{p,t-1} = I_{p,0,t} + \sum_{r \in R} \sum_{v \in V'} Q_{p,r,v,t}, \quad \forall t \in T, p \in P \quad (4)$$

$$\sum_{p \in P} I_{p,v,t} \cdot Vol_p \leq CapV_v, \quad \forall t \in T, v \in V_l \quad (5)$$

$$I_{p,v,t} \geq SS_{p,v}, \quad \forall t \in T, p \in P, v \in V_l \quad (6)$$

$$I_{p,v,t-1} + \sum_{r,l \in L_r, V_l} Q_{p,r,v,t} = I_{p,v,t} + \sum_{\substack{o \in O_v \\ o \in O_t}} d_{o,p}, \quad \forall t \in T, p \in P, v \in V_s \quad (7)$$

$$Bg_{p,v,t} = 0, \quad \forall t \in T, p \in P, v \in V_{CFP} \quad (8)$$

$$Bg_{p,v,t} + \sum_{r,l \in L_r, V_l} \sum_{t'=1}^t Q_{p,r,v,t'} = \sum_{t'=1}^t \sum_{\substack{o \in O_v \\ o \in O_t}} d_{o,p}, \quad \forall t \in T, p \in P, v \in V_{CF} \quad (9)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{\substack{l \in L_r \\ v \in V_l}} Q_{p,r,v,t} \cdot Vol_p \leq \sum_{c \in C} (Y_{c,r,t} \cdot CapC_c \cdot n_c), \quad \forall r \in R, t \in T \quad (10)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{\substack{l \in L_r \\ v \in V_l}} Q_{p,r,v,t} \cdot Vol_p \geq \sum_{c \in C} (Y_{c,r,t} \cdot CapC_c \cdot FU), \quad \forall r \in R, t \in T \quad (11)$$

$$\sum_{c \in C} (Nc_{c,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUM) \geq \sum_{p \in P} \sum_{v \in V} Q_{p,r,v,t} \cdot Vol_p, \quad \forall r \in R, t \in T \quad (12)$$

$$\sum_{c \in C} (Nc_{c,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUT) \leq \sum_{p \in P} \sum_{v \in V} Q_{p,r,v,t} \cdot Vol_p, \quad \forall r \in R, t \in T \quad (13)$$

$$Nc_{c,r,t} \leq Y_{c,r,t} \cdot n_{c,t} \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T \quad (14)$$

$$Nc_{c,r,t} \geq Y_{c,r,t} \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T \quad (15)$$

$$\sum_{r \in R} Nc_{c,r,t} \leq n_{c,t} - \sum_{\substack{r \in R \\ dt_{r,l}=1}} Nc_{c,r,t-1} - \sum_{\substack{r \in R \\ dt_{r,l}=2}} (Nc_{c,r,t-2} + Nc_{c,r,t-1}) \quad \forall c \in C, t \in T \quad (16)$$

$$\sum_{p \in P} Q_{p,r,v,t} = 0 \quad \forall r \in L_r \forall l \in V_l, t \in T / (t + dt_{r,l}) > |T| \quad (17)$$

$$X_{f,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T, f \in F \quad (18)$$

$$Y_{c,r,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T \quad (19)$$

$$I_{p,v,t}, Bg_{p,v,t} \geq 0 \quad \forall p \in P, v \in V, t \in T \quad (20)$$

$$Q_{p,r,v,t} \geq 0 \quad \forall p \in P, r \in R, v \in V, t \in T \quad (21)$$

$$Qp_{p,t} \geq 0 \quad \forall p \in P, t \in T \quad (22)$$

$$Nc_{c,r,t} \geq 0 \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T \quad (23)$$

La función objetivo (1), tal como se mencionó anteriormente, minimiza la suma total de los costos de producción, inventario, *backorder* y distribución, en dicho orden. Las restricciones (2) y (3) establecen límites superiores e inferiores para la producción de cada familia de productos, respectivamente, para evitar una baja utilización de los recursos productivos. La ecuación (4) define el balance del inventario en la fábrica, teniendo en cuenta las unidades producidas y distribuidas. Notar que las unidades producidas impactan en el inventario de la fábrica un día después de generarse. Las restricciones (5) y (6) determinan las cantidades máximas y mínimas que se pueden almacenar tanto en la fábrica como en las sucursales. El límite superior está impuesto en términos volumétricos, definido por el tamaño de cada locación, mientras que el límite inferior establece un umbral de stock para hacer frente a cualquier evento disruptivo o no planificado que ocurra. El balance de inventario en las sucursales se refleja en la ecuación (7), similar al de la fábrica en la restricción (4). En este caso, los ingresos de productos provienen de la distribución, mientras que los egresos a su demanda.

La ecuación (8) impide incurrir en *backorder* con los clientes finales prioritarios. La restricción (9) representa el cumplimiento de la demanda de los clientes finales, convirtiéndose en *backorder* todas aquellas unidades de producto no entregadas, generando un impacto negativo en la función objetivo. Esta restricción es creada recién a partir de que ocurra una demanda del producto  $p$  en el cliente  $v$  y no antes, lo que permite reflejar también la posibilidad de realizar entregas tempranas de productos. A modo de ejemplo, si un producto  $p$  en un nodo  $v$ , al cual se accede sólo por la ruta  $r$ , tiene su primera demanda igual a 3 unidades en el período  $t4$ , las restricciones para los períodos 1 a 4 serían las presentadas en la ecuación 24 si fuesen creadas para cada período de tiempo. En ese caso, la variable  $Q$  estaría forzada a valer 0 cuando no hubo demanda todavía, impidiendo las entregas tempranas. De esta forma, creando la restricción recién cuando ocurre la primera demanda (período 4), se relaja esta situación y se permiten entonces entregas tempranas.

$$\begin{aligned}
 Bg_{p,v,t1} + Q_{p,r,v,t1} &= 0 \\
 Bg_{p,v,t2} + Q_{p,r,v,t1} + Q_{p,r,v,t2} &= 0 \\
 Bg_{p,v,t3} + Q_{p,r,v,t1} + Q_{p,r,v,t2} + Q_{p,r,v,t3} &= 0 \\
 Bg_{p,v,t4} + Q_{p,r,v,t1} + Q_{p,r,v,t2} + Q_{p,r,v,t3} + Q_{p,r,v,t4} &= 3
 \end{aligned} \tag{24}$$

En lo que respecta a la etapa de distribución, se determina qué ruta utilizar para visitar a las localidades y atender a los correspondientes clientes. Las restricciones (10) y (11) son la vinculación entre las variables  $Q$  e  $Y$ . Estas ecuaciones limitan superior e inferiormente el volumen que se puede transportar por cada ruta y período de tiempo en función del tipo de vehículo utilizado. Las restricciones (12) y (13) definen la cantidad de vehículos a utilizar de cada tipo en función de los volúmenes transportados. Las restricciones (14) y (15) vinculan las variables  $Nc$  e  $Y$ .

Como se mencionó anteriormente, dada la extensa cadena de suministros modelada, existen localidades a las que no se las puede atender y regresar al nodo base en el mismo día. Es por este motivo que se considera la ecuación (16), la cual vincula la cantidad de vehículos disponibles de cada tipo en un determinado día con la cantidad remanente, teniendo en cuenta aquellos que han recorrido rutas con localidades que estén a uno o dos días de ser atendidos. En otras palabras, los vehículos disponibles para un determinado día  $t$  resultan de la diferencia entre la flota total con la que cuenta la empresa y aquellas unidades de transporte que se encuentran en viaje. Es importante notar que la restricción toma la forma presentada dado que el máximo de días que lleva atender a una localidad y regresar es de 2 unidades de tiempo. En caso de ser mayor, debería adecuarse a ello. La restricción (17) limita las entregas de productos al período de tiempo bajo análisis y, por último, las ecuaciones (18)-(23) son las definiciones de dominio de las variables.

Es importante destacar que en la presente formulación no se define el ruteo de cada vehículo, sino que se establece de manera general qué transportar, cuánto, cuándo, a quiénes y por qué ruta (variable  $Q$ ), junto con el número de vehículos de cada tipo a utilizar en dicha ruta (variable  $Nc$ ). Esto implica que el costo de transporte no se cal-

cula con precisión sobre los kilómetros recorridos por cada vehículo, sino que es una aproximación vinculada a la ruta recorrida (parámetro  $dfp_r$ ) y al número de vehículos a usar, como puede verse en el último término de la función objetivo (Ecuación 1). Si bien esto impide encontrar el óptimo global del PIRP completo, permite generar soluciones de calidad en un tiempo considerablemente menor al que llevaría resolver un PIRP integrando ambas etapas.

Para generar entonces una completa solución al PIRP que defina la asignación óptima de vehículos a las entregas determinadas y precise qué productos llevará cada vehículo a cada cliente, se propone una formulación MILP complementaria, la cual se nutre de la solución entregada por el modelo recientemente descrito. La descomposición del PRIP es una estrategia usual en este tipo de problemas de optimización (Absi y col. [14] entre los más destacados) ya que facilita el hallazgo de soluciones óptimas o cercanas a ésta.

### 3.2 Asignación de vehículos

El objetivo de esta nueva formulación es completar la solución del PIRP presentado y determinar cuáles de los vehículos asignados a cada ruta para un determinado día serán los que entreguen cada uno de los productos a los nodos que los demandan. El modelo que se presenta en esta sección permite encontrar la asignación óptima a fin de reducir los costos de transporte, ahora sí con mayor precisión ya que es posible calcular la distancia que recorre cada uno de los vehículos seleccionados en el modelo previo.

Para este problema se definen las siguientes variables de decisión:

- $Z_{k,r,t}$ : variable binaria, igual a 1 si el vehículo  $k$  recorre la ruta  $r$  en el tiempo  $t$
- $W_{k,v,r,t}$ : variable binaria, igual a 1 si el vehículo  $k$  visita al nodo  $v$  por la ruta  $r$  en el tiempo  $t$
- $Q_{k,p,r,v,t}$ : unidades del producto  $p$  enviadas por el vehículo  $k$  al nodo  $v$  por la ruta  $r$  en el período de tiempo  $t$
- $D_{k,r,t}$ : distancia recorrida del vehículo  $k$  a través de la ruta  $r$  en el tiempo  $t$
- $CCT$ : costo total de transporte

Las ecuaciones de la nueva formulación son:

$$\min CCT = \sum_{c,k \in K_c} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} D_{k,r,t} \cdot CT_c + \sum_{t \in T} \sum_{c \in C} \sum_{r \in R} N_{c,r,t} \cdot CFT_c \quad (25)$$

$$Q_{p,r,v,t} = \sum_{k \in K} Q_{k,p,r,v,t} \quad \forall t \in T, r \in R, p \in P, v \in V \quad (26)$$

$$\sum_{k \in K_c} Z_{k,r,t} = N_{c,r,t} \quad \forall r \in R, t \in T \quad (27)$$

$$\sum_{r \in R} Z_{k,r,t} \leq 1 \quad \forall k \in K, t \in T \quad (28)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{v, l \in L_r, V_l} Qk_{k,p,r,v,t} \cdot Vol_p \leq Z_{k,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUM \quad \forall r \in R, t \in T, c \in K_c \quad (29)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{v, l \in L_r, V_l} Qk_{k,p,r,v,t} \cdot Vol_p \geq Z_{k,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUT \quad \forall r \in R, t \in T, c \in K_c \quad (30)$$

$$\sum_{p \in P} Qk_{k,p,r,v,t} \cdot Vol_p \leq W_{k,v,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUM \quad \forall v \in V, r \in R, t \in T, c \in K_c \quad (31)$$

$$\sum_{p \in P} Qk_{k,p,r,v,t} \geq W_{k,v,r,t} \quad \forall v \in V, r \in R, t \in T, k \in K \quad (32)$$

$$W_{k,v,r,t} \leq Z_{k,r,t} \quad \forall v \in V, r \in R, t \in T, k \in K \quad (33)$$

$$\sum_{v \in V} W_{k,v,r,t} \geq Z_{k,r,t} \quad \forall r \in R, t \in T, k \in K \quad (34)$$

$$D_{k,r,t} \geq 2 \cdot df_{r,l} \cdot W_{k,v,r,t} \quad \forall k \in K, t \in T, r \in R, v \in V_l \quad (35)$$

$$\sum_{\substack{r \in R \\ dt_{r,l}=0}} Z_{k,r,t} \geq \sum_{\substack{r \in R \\ dt_{r,l}=0}} Z_{k+1,r,t} \quad \forall t \in T, c \in K_c \quad (36)$$

$$\sum_{r \in R} Z_{k,r,t+1} \leq 1 - W_{k,v,r,t} \quad \forall t \in T, k \in K, l \in V_l, dt_{r,l} = 1 \quad (37)$$

$$\sum_{r \in R} Z_{k,r,t+1} + \sum_{r \in R} Z_{k,r,t+2} \leq 2(1 - W_{k,v,r,t}) \quad \forall t \in T, k \in K, l \in V_l, dt_{r,l} = 2 \quad (38)$$

$$Z_{k,r,t} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, r \in R, t \in T \quad (39)$$

$$W_{k,v,r,t} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, v \in V, r \in R, t \in T \quad (40)$$

$$D_{k,r,t} \geq 0 \quad \forall k \in K, v \in V, r \in R, t \in T \quad (41)$$

$$Qk_{k,p,r,v,t} \geq 0 \quad \forall k \in K, p \in P, r \in R, v \in V, t \in T \quad (42)$$

La función objetivo (25) representa el costo total de transporte de los vehículos en función de las distancias que finalmente recorren y del número total de vehículos que se utilizan, en dicho orden. Es decir, existe un costo variable que depende de las distancias, y un costo fijo por la utilización o no de un vehículo. La ecuación (26) asigna los productos a entregar (determinados en la formulación PIRP) a los diferentes vehículos que finalmente se utilicen. Ecuación (27) determina los vehículos que se

utilizarán de acuerdo con el número que se obtuvo de éstos en la solución del PIRP. Notar que la variable  $Nc$  brinda información también sobre el tipo de vehículo a utilizar, por lo que la activación de vehículos (variable  $Z$ ) respeta esta condición. La restricción (28) limita a uno el número total de rutas que puede recorrer un vehículo en un período de tiempo, es decir que, por día, cada vehículo realiza a lo sumo un viaje. Restricciones (29) y (30) vinculan las variables binarias de asignación de vehículos a rutas ( $Z$ ) con la variable no negativa de productos a entregar ( $Qk$ ), restringiendo volumétricamente al vehículo tanto superior como inferiormente, respectivamente. Una situación análoga ocurre con las restricciones (31) y (32), asociando la variable binaria que indica a qué nodo visita cada vehículo ( $W$ ) con la variable no negativa de productos a entregar ( $Qk$ ).

Las restricciones (33) y (34) relacionan las dos nuevas binarias de esta formulación, indicando que no será posible visitar a un cliente si no se recorre la ruta  $r$  a la que pertenece, e imponiendo la visita de al menos uno de ellos si dicha ruta es atravesada. Ecuación (35) es el cálculo de la distancia que recorre cada vehículo. Notar que se multiplica por 2 dado que el parámetro  $df_{r,l}$  sólo mide la distancia de ida de los viajes, la cual se considera igual a la de vuelta. La restricción (36) se utiliza para realizar cortes de simetría, permitiendo reducir el número de soluciones óptimas alternativas.

Las ecuaciones (37) y (38) están vinculadas con la ya mencionada ecuación (16) donde se restringe la cantidad de vehículos disponibles teniendo en cuenta aquellos que están “en viaje”. Para este modelo, en donde se decide específicamente a qué cliente visita cada vehículo, las restricciones (37) y (38) impiden recorrer ruta alguna (variable  $Z$ ) en caso de haber visitado anteriormente un cliente que requiera uno o dos días para ser atendido, respectivamente. Por último, ecuaciones (39)-(42) son las definiciones de dominio de las variables.

## 4 Caso de estudio y Resultados

Las formulaciones fueron codificadas e implementadas en GAMS (*General Algebraic Modeling System*) 42.4.0 y ejecutadas con el *solver* CPLEX 22.1. La estación de trabajo utilizada cuenta con un procesador Intel® Core™ i7 CPU 3.2 GHz, 16GB de RAM y sistema operativo Windows 10.

La empresa bajo consideración produce 228 productos diferentes agrupados en 9 familias para satisfacer las demandas de 5 sucursales y 127 clientes finales, de los cuales 50 son prioritarios. Se cuenta con un total de 66 rutas, las cuales atraviesan entre 1 y 11 localidades como máximo, existiendo algunas que son recorridas por más de una ruta. Se trabaja con un horizonte de tiempo de 6 períodos (una semana laboral), sobre el cual se distribuyen 218 órdenes de pedido. Estas órdenes suman un total de 5526 unidades de producto demandadas. A modo de resumen, y para dimensionar el problema, se presentan las Tablas 2 y 3 con información sobre la composición de las familias de productos, las sucursales y sus demandas.

Tabla 1. Información sobre Familias y Productos

Familia $F$	Nº de productos $P_F$	Cap. de producción diaria $CapF_f[u]$	Volumen promedio $[m^3/u]$	Demanda total $[u]$
F1	6	52	0.05	190
F2	1	19	0.04	102
F3	16	273	0.03	795
F4	42	118	0.56	1737
F5	11	53	0.15	93
F6	30	219	0.53	1186
F7	92	126	0.86	789
F8	16	11	1.11	81
F9	14	105	0.5	553
Total	228	976	-	5526

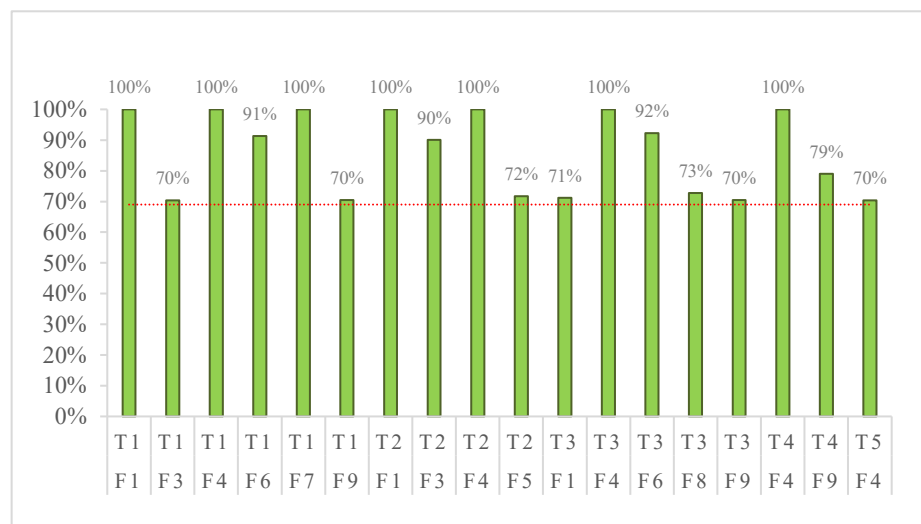
Tabla 2. Información sobre las sucursales

Sucursal $V_s$	Rutas $L_r$	Distancia promedio $[km]$	Nº órdenes $O_s$	Demanda total $[u]$
Buenos Aires	R1	510	44	1319
Rosario	R20-R21-R22 R23-R24-R27	239	14	198
Cipolletti	R44-R45-R46 R47-R48	1418	7	197
Córdoba	R9-R12-R13	303	10	233
Resistencia	R57-R58-R59 R60	795	15	456
Total	-	-	90	2403

Como se observa, el tamaño del modelo para el caso propuesto es grande. A modo de ejemplo, el número de variables  $Q_{p,r,v,t}$ , considerando la dimensión de los conjuntos involucrados, alcanzaría casi 12 millones. Es decir, si se consideran los 228 productos, las 66 rutas, los 132 nodos y cada uno de los 6 períodos, su combinación daría una cantidad de:  $228*66*132*6 = 11.918.016$  variables. Sin embargo, debido a las relaciones establecidas entre los distintos conjuntos como  $V_l$  y  $L_r$ , muchas de éstas no son incluidas dentro del proceso de optimización reduciendo finalmente a menos de 13.000 el número de variables denotadas por  $Q_{p,r,v,t}$ . Aplicando una lógica similar al resto de las variables ( $Bg$ ,  $I$ ,  $Qk$ ,  $W$ ,  $Z$ ), se obtiene finalmente una formulación de 15.412 ecuaciones con 23.628 variables para el PIRP y 26.458 ecuaciones con 7.965 variables para la asignación de vehículos.

El PIRP se resuelve en menos de 4 minutos (240 segundos) con un gap menor al 1%. El valor de la función objetivo es de \$3.791.557 (\$1.102.336 de costo de transporte, \$1.117.900 de costo de producción, \$993.184 de costo de inventario y \$578.138 de penalización por *backorder*). A partir de la solución de este modelo, se resuelve la asignación de vehículos, donde se obtiene la solución óptima en menos de un segundo, con un costo de transporte (función objetivo) de \$1.289.006. Este costo, al ser mayor que el de transporte obtenido en la formulación del PIRP, muestra que utilizar el promedio de las distancias de una ruta es una subestimación de la distancia recorrida.

Una de las decisiones del modelo es la cantidad a producir de cada producto  $p$ . Dado que son demasiados, en la Figura 1 se resume esta información a través de las familias y la utilización de su capacidad. Como se observa, existe la necesidad de producir casi todas las familias (exceptuando F2) en al menos un período de tiempo, además de respetarse los niveles mínimos de producción (70% de utilización).



**Fig. 1.** Porcentaje de utilización de las capacidades de producción de cada familia por día (barras verdes) y su nivel mínimo (línea roja)

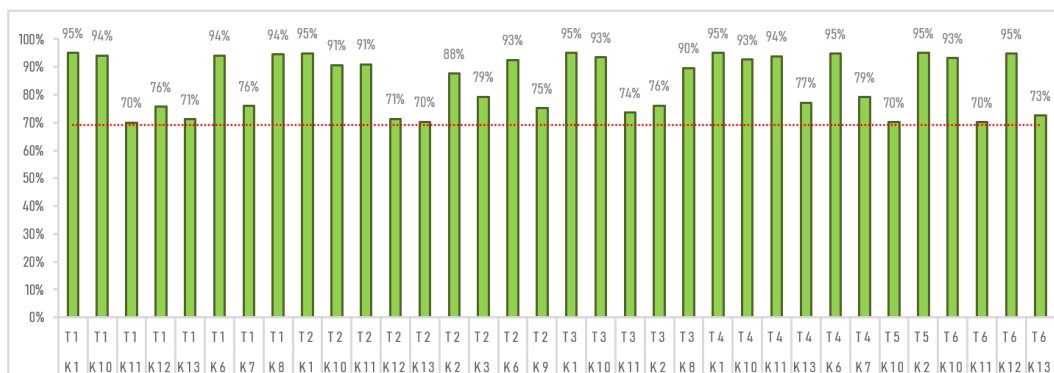
El inventario en la fábrica aumenta en función de las cantidades producidas ( $Qp$ ) y disminuye según la entrega de productos a los distintos nodos ( $Q$ ). En la Tabla 4 se muestra, a modo de ejemplo, cómo varía el *stock* en ella de uno de los productos más demandados, perteneciente a la familia F1. Es importante recordar que la producción del día  $t$  impacta en el inventario de la fábrica el día  $t+1$ , por lo que el inventario al inicio de  $t2$  (93) se explica por el inventario al finalizar  $t1$  (5) más la producción de dicho período (88). Se puede ver también cómo el *stock* de seguridad impuesto de 5 unidades implica un soporte en los niveles de inventario al final de cada día.

**Tabla 3.** Evolución del inventario en la fábrica del producto P00053

Tiempo	t1	t2	t3	t4	t5	t6
<b>Inventario al inicio de <math>t</math></b>	15	93	131	81	79	47
<b>Envíos desde la fábrica</b>	10	83	50	2	32	42
<b>Inventario al final de <math>t</math></b>	5	10	81	79	47	5
<b>Producción</b>	88	121	-	-	-	-

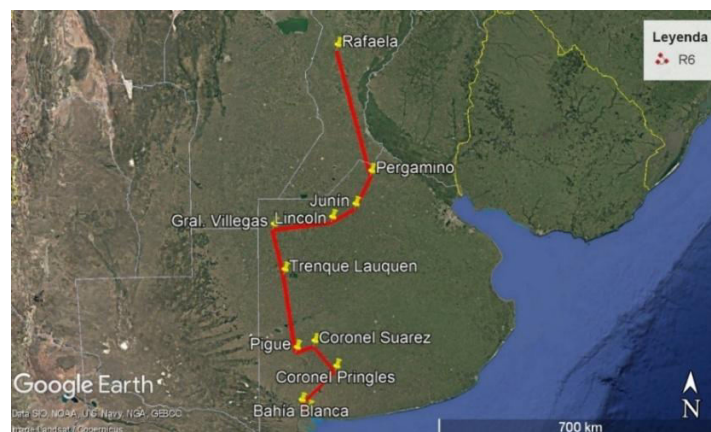
En lo que respecta a la distribución de productos, la cadena a abastecer es extensa, con clientes dispersos a lo largo de todo el país. Para satisfacer la demanda, el modelo decide realizar 34 viajes, repartiendo en total casi tres mil productos en una semana.

La utilización de los 34 camiones en sus viajes, medido como el porcentaje de llenado del mismo en términos volumétricos, se presenta en la Figura 3. Como se puede observar, ninguno cayó por debajo de la utilización mínima permitida del 70%.



**Fig. 3.** Utilización de cada vehículo en su viaje realizado

Para ejemplificar el detalle de los resultados obtenidos por la optimización, se selecciona como caso ilustrativo la ruta denominada R6, la cual se representa en la Figura 4. Esta posee una extensión de más de 1200 kilómetros, con la posibilidad de visitar 10 localidades en su trayecto. Dada su extensión, no es posible en la práctica recorrerla por completo y luego regresar a la base en el mismo día. Es por ello que el modelo cuenta con las restricciones 17, 36 y 37 para que el vehículo encargado de realizar dicho viaje no pueda ser utilizado el día siguiente.



**Fig. 4.** Imagen satelital de la ruta R6 (roja) con sus localidades asociadas

De la lectura de la solución óptima, la ruta R6 se utiliza el día 4 de la semana para visitar las localidades de Trenque Lauquen, Coronel Suarez y Bahía Blanca. En este viaje se entregan productos relacionados a 3 órdenes: O-117-05, O-119-02 y O-119-

11. Las dos primeras poseen fecha límite de entrega precisamente el día 4 de la semana, pero la última lo tiene el día 6. Esta entrega temprana de productos permite alcanzar un uso más eficiente de los vehículos al consolidar múltiples órdenes en un mismo viaje, ahorrando así costos vinculados al transporte. El detalle de los productos entregados se encuentra en la tabla 5.

**Tabla 5.** Detalle de los productos repartidos el día 4 de la semana a través de la ruta R6

Producto	Trenque Laquen	Coronel Suarez	Bahía Blanca
P00028	2	-	2
P00112	3	-	1
P00203	2	-	2
P00075	3	-	-
P00143	-	26	-
P00003	-	4	-

Para el reparto de las tres órdenes mencionadas se utiliza el vehículo denominado *k11*. Como muestra la Figura 3, el viaje se realiza con una utilización del espacio del 94% y, dada la extensión de la ruta, el vehículo no fue asignado a ningún otro viaje el día siguiente, siendo utilizado nuevamente recién para el último día de la semana.

## 5 Conclusiones

En este trabajo se propone una formulación del PIRP alternativa a las de la literatura, que, si bien responde a políticas particulares de una empresa local, es fácilmente adaptable a otras industrias de diversos sectores. Los modelos fueron desarrollados con el objetivo de minimizar el costo total que conlleva producir, almacenar y distribuir múltiples productos con una flota de vehículos heterogénea a lo largo de una extensa cadena de suministros con diferentes actores.

Precisamente, las particularidades de la cadena de suministro modelada es uno de los principales aportes del trabajo. Empezando por la producción, posee un abanico extenso de diferentes productos agrupados en familias, las cuales están limitadas en su capacidad de producción. Desde la perspectiva del inventario, por un lado, se tienen las sucursales, que concentran una gran porción de la demanda y que por ello han sido dotadas de la capacidad de mantener inventario, el cual debe respetar en todo momento sus niveles de seguridad. Por el otro, se discriminan los clientes finales en prioritarios, sobre los cuales no es posible incurrir en *backorder* en ningún momento.

La formulación se destaca además por su capacidad de obtener soluciones cercanas a valores óptimos muy rápidamente. Esto permite, a quien lo utilice, evaluar múltiples escenarios en poco tiempo, como podría ser una modificación en la composición de la flota de vehículos, en las capacidades de producción, en la demanda, etc.

Los resultados muestran que, para un ejemplo concreto de la industria, es posible organizar en tan solo minutos todas las tareas fundamentales de la cadena de suminis-

tros para una semana laboral completa al mínimo costo. Esto valida el enfoque como una herramienta potente para guiar la toma de decisiones de producción, inventario y distribución.

En lo que respecta a posibles trabajos futuros, un camino a explorar es desarrollar una estrategia de solución en donde se concatenen ambas formulaciones mediante un proceso iterativo para reducir al mínimo el gap que genera la estimación del costo de transporte en la formulación PIRP con la solución óptima real del problema.

También es posible extender la presente formulación para contemplar las tareas de distribución que cada sucursal debe realizar ya que, una vez entregados los productos a la misma desde la fábrica, esta debe atender a sus clientes para finalizar con los compromisos pactados. De esta manera, se cubriría una importante porción de la cadena de suministros que hasta el momento no ha sido contemplada.

## Referencias

1. Chandra, P., & Fisher, M. L.: Coordination of production and distribution planning. *European Journal of Operational Research*, **72**(3), 503-517 (1994)
2. Archetti, C., & Speranza, M. G.: The inventory routing problem: the value of integration. *International Transactions in Operational Research*, **23**(3), 393-407 (2016)
3. hong Zhao, Q., Chen, S., Leung, S. C., & Lai, K. K.: Integration of inventory and transportation decisions in a logistics system. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, **46**(6), 913-925 (2010)
4. Bard, J. F., & Nananukul, N.: A branch-and-price algorithm for an integrated production and inventory routing problem. *Computers & Operations Research*, **37**(12), 2202-2217 (2010)
5. Fumero, F., & Vercellis, C.: Synchronized development of production, inventory, and distribution schedules. *Transportation Science*, **33**(3), 330-340 (1999)
6. Solyalı, O., & Süral, H.: A relaxation-based solution approach for the inventory control and vehicle routing problem in vendor managed systems. En *Modeling, Computation and Optimization*, pp. 171-189. (2009)
7. Adulyasak, Y., Cordeau, J. F., & Jans, R.: Formulations and branch-and-cut algorithms for multivehicle production and inventory routing problems. *INFORMS Journal on Computing*, **26**(1), 103-120 (2014)
8. Archetti, C., Bertazzi, L., Paletta, G., & Speranza, M. G.: Analysis of the maximum level policy in a production-distribution system. *Computers & Operations Research*, **38**(12), 1731-1746 (2011)
9. Adulyasak, Y., Cordeau, J. F., & Jans, R.: Optimization-based adaptive large neighborhood search for the production routing problem. *Transportation Science*, **48**(1), 20-45 (2014)
10. Armentano, V. A., Shiguemoto, A. L., & Løkketangen, A.: Tabu search with path relinking for an integrated production–distribution problem. *Computers & Operations Research*, **38**(8), 1199-1209 (2011)
11. Boudia, M., Louly, M. A. O., & Prins, C.: A reactive GRASP and path relinking for a combined production–distribution problem. *Computers & Operations Research*, **34**(11), 3402-3419 (2007)

12. Boudia, M., & Prins, C.: A memetic algorithm with dynamic population management for an integrated production–distribution problem. *European Journal of Operational Research*, **195**(3), 703-715 (2009)
13. Chan, F. T., Wang, Z. X., Goswami, A., Singhania, A., & Tiwari, M. K.: Multi-objective particle swarm optimisation based integrated production inventory routing planning for efficient perishable food logistics operations. *International Journal of Production Research*, **58**(17), 5155-5174 (2020)
14. Absi, N., Archetti, C., Dauzère-Pérès, S., & Feillet, D. A two-phase iterative heuristic approach for the production routing problem. *Transportation Science*, **49**(4), 784-795 (2015)
15. Absi, N., Archetti, C., Dauzère-Pérès, S., Feillet, D., & Speranza, M. G.: Comparing sequential and integrated approaches for the production routing problem. *European Journal of Operational Research*, **269**(2), 633-646 (2018)
16. Solyali, O., & Süral, H.: A multi-phase heuristic for the production routing problem. *Computers & Operations Research*, **87**, 114-124 (2017)
17. Avci, M., & Yildiz, S. T.: A mathematical programming-based heuristic for the production routing problem with transshipments. *Computers & Operations Research*, **123**, 105042 (2020)
18. Hrabec, D., Hvattum, L. M., & Hoff, A.: The value of integrated planning for production, inventory, and routing decisions: A systematic review and meta-analysis. *International Journal of Production Economics*, **248**, 108468 (2022)
19. Brahimi, N., & Aouam, T.: Multi-item production routing problem with backordering: a MILP approach. *International Journal of Production Research*, **54**(4), 1076-1093 (2016)
20. Bertazzi, L., & Speranza, M. G.: Inventory routing problems: an introduction. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, **1**, 307-326 (2012)