

Quasigeoid modeling using two methodologies in a mountainous region of Argentina

Agustín R Gómez^{1,2*} , Claudia N Tocho^{1,3} , Ezequiel D Antokoletz¹ , Sergio R Cimbaro⁴ 

Abstract High-precision pure gravimetric quasigeoid models are essential for the realization of the International Height Reference System (IHRs). In this study, two quasigeoid models were computed over a region located along the Andes Mountains (26.5°S–24.5°S, 66°W–64°W) by means of the remove-compute-restore (RCR) technique and using two integration techniques: least squares collocation (LSC) and 1D fast Fourier transform (1D-FFT). Low-frequency components were derived from the XGM2019e global geopotential model up to degree and order 800. High-frequency components were calculated using the classical residual terrain modeling (RTM) approach with the SRTM v4.1 digital elevation model. Model validation was carried out using 51 GNSS/leveling benchmarks distributed across the study area. The differences between observed and modeled heights were fitted to a four-parameter transformation function, followed by both absolute and relative validation, before and after adjustment. Absolute validation results showed that both models achieved an accuracy of 0.124 m after adjustment, representing a 49 % improvement over the global XGM2019e model. Relative validation revealed no significant differences between the two modeling techniques. In the studied region, the accuracy of the quasigeoid model is not substantially affected by the numerical integration technique employed. This study contributes to the development of a new quasigeoid model covering the entire territory of Argentina.

Keywords Pure-gravimetric quasigeoid modeling, least squares collocation, fast Fourier transform, gravity anomalies, Andes Mountains.

Modelado de cuasigeoide mediante dos metodologías en una región montañosa de Argentina

Resumen Los modelos de cuasigeoide gravimétricos puros de alta precisión son muy importantes para la materialización del Sistema Internacional de Referencia de Alturas (IHRs). En este trabajo se desarrollaron y evaluaron dos modelos de cuasigeoide en una región montañosa de la cordillera de los Andes (26.5°S–24.5°S, 66°O–64°O), mediante la técnica remover-calcular-restaurar (RCR) y utilizando dos enfoques de integración numérica: colocación por cuadrados mínimos (LSC) y la transformada rápida de Fourier unidimensional (FFT-1D). Las bajas frecuencias se extrajeron del modelo geopotencial global XGM2019e hasta grado y orden 800, mientras que las altas frecuencias se modelaron mediante el enfoque clásico de modelado residual del terreno (RTM), utilizando el modelo digital de elevaciones SRTM v4.1. Para la validación absoluta y relativa de los modelos obtenidos, se emplearon 51 puntos GNSS/nivelación distribuidos en el área de estudio. Las diferencias entre los valores observados y modelados fueron ajustadas mediante una función de transformación de cuatro parámetros. Los resultados muestran que ambos modelos alcanzaron una precisión absoluta de 0.124 m tras el ajuste, lo que representa una mejora del 49 % respecto al modelo global XGM2019e. En la validación relativa no se observaron diferencias estadísticamente significativas entre las dos metodologías. La validación muestra que, en regiones de topografía compleja como la analizada, la precisión del modelo de cuasigeoide no depende de manera sustancial de la técnica de integración numérica empleada. Este estudio constituye un aporte para la futura generación de un modelo de cuasigeoide gravimétrico de alta precisión para el territorio argentino.

Palabras clave Modelado de cuasigeoide gravimétrico puro, colocación por cuadrados mínimos, transformada rápida de Fourier, anomalías de gravedad, cordillera de los Andes.

INTRODUCCIÓN

El sistema de referencia internacional de alturas (IHRs; Ihde et al. 2017) fue definido por la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) en su Resolución N°1 del año 2015 (Drewes et al. 2016) como la referencia global para la determinación de alturas físicas. Su materialización se denomina Marco de Referencia Internacional de Alturas (IHRF). La determinación del IHRF es uno de los mayores desafíos actuales de la comunidad geodésica. Una de las estrategias más importantes para la determinación de coordenadas verticales referidas al IHRF consiste en la generación de modelos de cuasigeoide gravimétricos puros de alta precisión (Sánchez et al. 2021).

¹ Centro de Investigaciones Geofísicas (CIGEOF), Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

² Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.

³ Comisión de Investigaciones Científicas (CIC), Buenos Aires, Argentina.

⁴ Dirección de Geodesia, Instituto Geográfico Nacional, Argentina.

* Contacto: agusgomez@fcaglp.unlp.edu.ar

Los modelos locales de cuasigeoide consisten en puntos regularmente distribuidos en una región localizada sobre los cuales se conoce la anomalía de altura ζ . Esta puede calcularse en cualquier punto mediante la solución al problema de valores de contorno geodésico (GBVP; Sansò y Sideris, 2013) escalar y libre bajo la teoría de Molodensky, cuya condición de contorno involucra anomalías de gravedad (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006). Los modelos de cuasigeoide determinados de esta manera se denominan gravimétricos puros.

En teoría, la solución a este GBVP involucra una integración de anomalías de gravedad sobre toda la superficie terrestre. No obstante, en la práctica se cuenta con estaciones gravimétricas distribuidas irregularmente y dispuestas sobre una región delimitada. Esto lleva a errores en la determinación de las componentes de larga y corta longitud de onda presentes en las anomalías de altura (Denker, 2013). Para mitigar estos errores, es posible emplear la técnica remover-calcular-restaurar (RCR; Sansò y Sideris, 2013). En la etapa “remover” de RCR, los efectos de larga y corta longitud de onda del campo de gravedad son estimados y removidos de las anomalías de gravedad para obtener anomalías de gravedad residuales. En la etapa “calcular”, las anomalías de altura residuales son calculadas a partir de las anomalías de gravedad residuales. Finalmente, en la etapa “restaurar” los efectos de larga y corta longitud de onda son restaurados a las anomalías de altura residuales. Las largas longitudes de onda pueden obtenerse de un modelo geopotencial global (GGM), mientras que las cortas longitudes de onda, asociadas a los efectos gravitacionales de las masas topográficas, pueden determinarse mediante modelado residual de terreno (RTM; Forsberg, 1984).

La generación de modelos de cuasigeoide gravimétricos puros requiere la integración de distintos tipos de datos en cada una de las etapas de RCR. Por ello, es importante analizar el impacto que cada etapa tiene sobre la precisión de los modelos de cuasigeoide obtenidos. En particular, la determinación de anomalías de altura residuales en la etapa “calcular” puede realizarse mediante múltiples métodos. Entre los más utilizados, se encuentra el de colocación por cuadrados mínimos (LSC; Moritz, 1978) y los espectrales, basados en algoritmos que utilizan la transformada rápida de Fourier (FFT; Schwarz et al. 1990). FFT es computacionalmente más veloz, pero requiere que los datos gravimétricos estén dispuestos en una cuadrícula regular. En cambio, LSC puede determinarse a partir de datos irregularmente distribuidos, pero es computacionalmente demandante.

El objetivo de este trabajo es comparar el impacto sobre la precisión de los modelos de cuasigeoide de los métodos LSC y FFT-1D en una región de Argentina ubicada en la cordillera de los Andes, entre las latitudes 26.5°S y 24.5°S y las longitudes 66°O y 64°O. Esta región contiene la estación UNSA, la cual es una de las estaciones argentinas del IHRF (Figura 1a) y se caracteriza por su alta variabilidad topográfica (Figura 1b). En esta zona se utilizaron los métodos LSC y FFT-1D para determinar dos modelos de cuasigeoide gravimétricos puros. A fin de estimar su precisión, ambos modelos fueron validados con datos de estaciones GNSS/nivelación, en los que tanto la altura elipsoidal h como la altura normal H^* son conocidas, y posteriormente los modelos fueron comparados entre sí calculando su diferencia. Este estudio sirve como trabajo preliminar para el desarrollo de un modelo gravimétrico de alta resolución que cubra la totalidad del territorio argentino.

METODOLOGÍA

Técnica remover-calcular-restaurar (RCR)

La anomalía de altura ζ se define como la distancia vertical entre la superficie topográfica y el teluroide (Figura 2). Este último es el conjunto de puntos Q tales que

$$W(P) = U(Q), \quad (1)$$

donde P es un punto sobre la superficie topográfica, $W(P)$ es el potencial de gravedad de la Tierra en el punto P , y $U(Q)$ es el potencial de gravedad normal generado por un elipsoide de referencia (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006).

Adicionalmente, las anomalías de altura pueden determinarse gravimétricamente mediante la solución al GBVP escalar y libre según la teoría de Molodensky (Sansò y Sideris, 2013). Este GBVP se basa

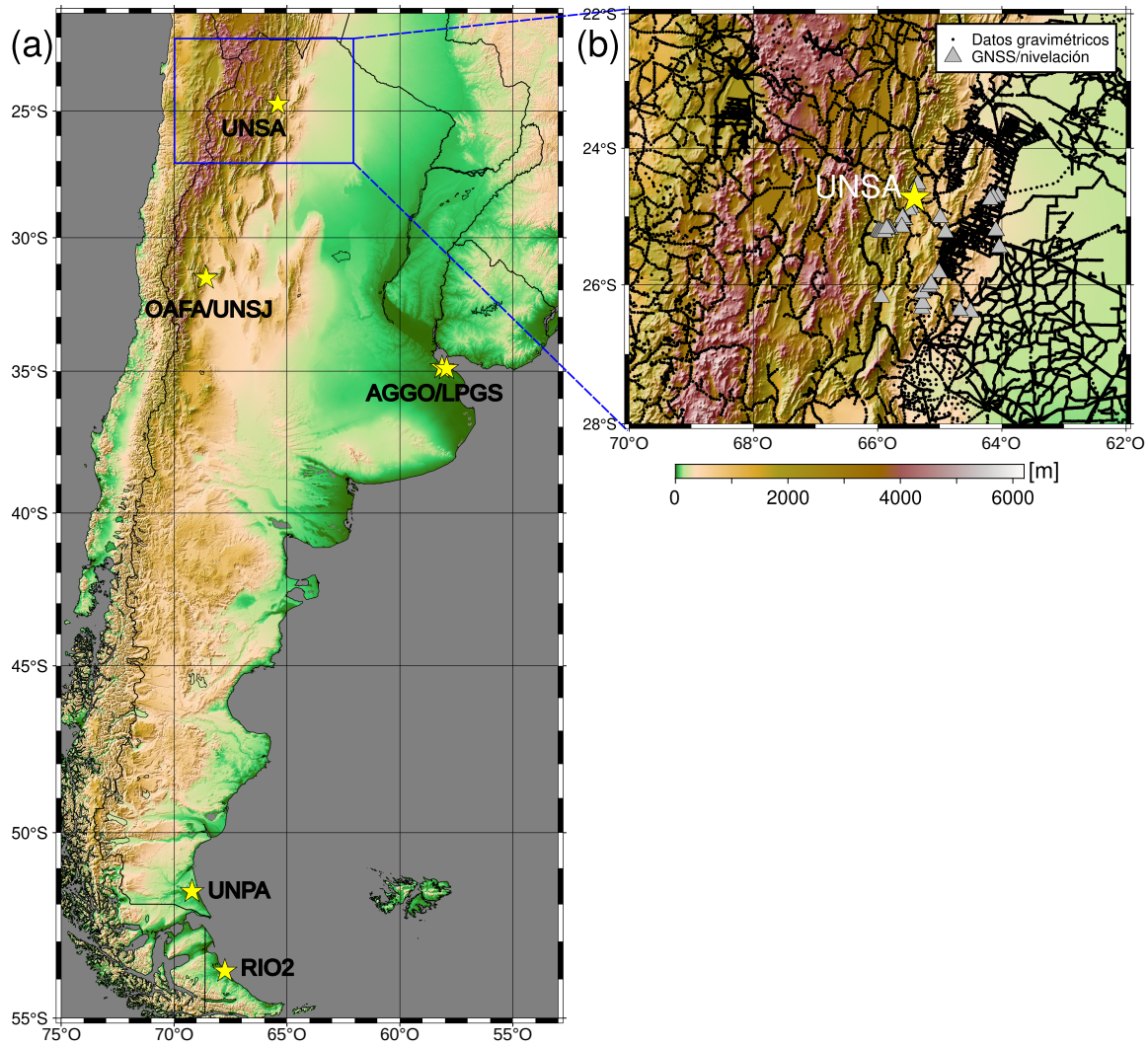


Figura 1. a) Topografía de Argentina y estaciones IHRF argentinas. b) Región de estudio, localizada alrededor de la estación UNSA.

en anomalías de aire libre definidas como:

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q), \quad (2)$$

donde $g(P)$ es la gravedad observada en la superficie de la Tierra y $\gamma(Q)$ es la gravedad normal sobre el teluroide. La solución al GBVP está dada por la integral de Molodensky:

$$\zeta(P) = \frac{R}{4\pi\gamma(Q)} \iint_{\sigma} [\Delta g(P') + G_1(P, P')] S(\psi_{PP'}) d\sigma_{P'}, \quad (3)$$

donde R es un radio medio de la Tierra, σ es la esfera unidad, $G_1(P, P') = -\frac{\partial \Delta g}{\partial h}(h(P') - h(P))$ (Moritz, 1980), $\psi_{PP'}$ es la distancia esférica entre los puntos de cálculo P e integración P' (Figura 3), y $S(\psi_{PP'})$ es la función de Stokes, dada como:

$$S(\psi_{PP'}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi_{PP'}), \quad (4)$$

donde P_n los polinomios de Legendre de grado n (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006).

La ecuación 3 presenta limitaciones prácticas que dificultan su uso de forma directa. En primer lugar, la integración no puede realizarse sobre toda la superficie terrestre, puesto que en general solo se cuenta con mediciones gravimétricas en una región delimitada. Esto provoca errores en

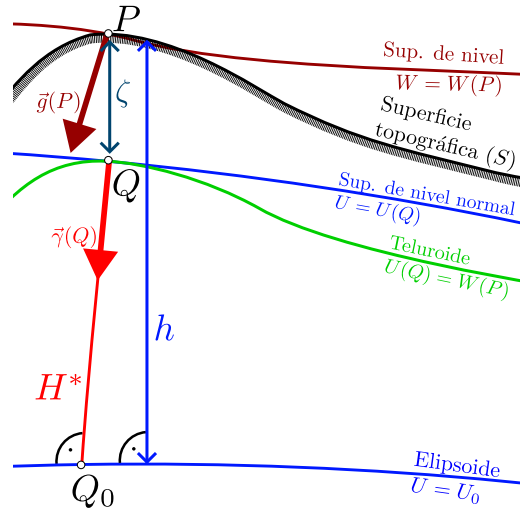


Figura 2. Disposición de la altura normal H^* , altura elipsoidal h , anomalía de altura ζ , teluroide, gravedad $g(P)$ y gravedad normal $\gamma(Q)$.

la determinación de las largas longitudes de onda. En segundo lugar, los datos gravimétricos se encuentran distribuidos de forma discreta, dificultando la determinación de las cortas longitudes de onda por efectos de *aliasing*. La técnica RCR permite mitigar estos errores, separando y modelando los efectos del campo de gravedad según su longitud de onda.

En la etapa “remove”, los efectos de larga longitud de onda sobre las anomalías de gravedad (Δg_{GGM}) son determinados a partir de un GGM mediante:

$$\Delta g_{\text{GGM}} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{n_{\text{GGM}}} (n-1) \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (5)$$

donde φ , λ y r son la latitud, longitud y distancia radial del punto de cálculo, G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la Tierra, n_{GGM} es el grado máximo de truncamiento utilizado, ΔC_{nm} y ΔS_{nm} son las diferencias entre los coeficientes de armónicos esféricos del potencial gravitacional (dados por el GGM) y los coeficientes del potencial normal, P_{nm} son las funciones asociadas de Legendre de primera especie de grado n y orden m (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006), y R es un radio medio de la Tierra. En la práctica, las constantes GM y R también se proporcionan por el GGM. La resolución del GGM, dada como:

$$\delta_{\text{GGM}} [^\circ] = \frac{180^\circ}{n_{\text{GGM}}}, \quad (6)$$

determina la mitad de la longitud de onda más corta que el GGM puede resolver.

El modelado residual de terreno (RTM) estima los efectos de corta longitud de onda calculando el efecto gravitacional de las masas comprendidas entre la topografía real y una versión suavizada, denominada superficie topográfica de referencia (H_{ref}). El efecto RTM clásico sobre las anomalías de gravedad, Δg_{RTM} , se determina mediante una integración numérica que involucra un modelo digital de elevaciones (DEM) y depende de la resolución elegida para la superficie topográfica de referencia. En la práctica, los efectos se determinan mediante una aproximación planar, en la que se asume un sistema de referencia local de coordenadas cartesianas. En dicho sistema, los efectos RTM están dados como:

$$\Delta g_{\text{RTM}}(P) = G\rho \iint_E \int_{z=H_{\text{ref}}(x,y)}^{z=H(x,y)} \frac{z - H(P)}{l^3} dz dx dy, \quad (7)$$

donde $\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$ es la densidad media de las masas topográficas, E es la región de estudio, (x, y, z) son las coordenadas cartesianas del punto de integración, $H_{\text{ref}}(x, y)$ es la altura de la superficie

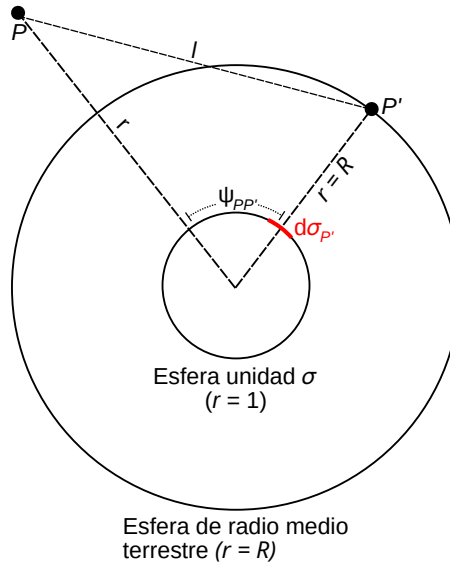


Figura 3. Punto de cálculo P y de integración P' , junto con su distancia entre ellos l , la esfera dada por el radio medio terrestre R , la esfera unidad σ y la distancia esférica entre P y P' , $\psi_{PP'}$. Modificado de Hofmann-Wellenhopf y Moritz (2006).

topográfica de referencia y $l = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - H(P))^2}$ es la distancia entre el punto de integración y el punto P , con coordenadas cartesianas $(x_P, y_P, H(P))$ (Forsberg, 1984).

Las anomalías de gravedad residuales se obtienen a través de la expresión:

$$\Delta g_r = \Delta g - \Delta g_{\text{GGM}} - \Delta g_{\text{RTM}}. \quad (8)$$

Las anomalías de gravedad residuales se utilizan en la etapa “calcular” para determinar las anomalías de altura residuales ζ_r . Los métodos utilizados en este trabajo para obtener ζ_r se describen en la sección siguiente. Finalmente, en la etapa “restaurar”, los efectos de larga y corta longitud de onda se calculan y reincorporan a las anomalías de altura residuales, para obtener:

$$\zeta_{\text{grav}} = \zeta_0 + \zeta_{\text{GGM}} + \zeta_r + \zeta_{\text{RTM}}, \quad (9)$$

donde

$$\zeta_{\text{GGM}} = \frac{GM}{\gamma r} \sum_{n=2}^{n_{\text{GGM}}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (10)$$

es la anomalía de altura debida a los efectos de larga longitud de onda (modelo global) y

$$\zeta_{\text{RTM}}(P) = \frac{G\rho}{\gamma(Q)} \iint_E \int_{z=H_{\text{ref}}(x,y)}^{z=H(x,y)} \frac{1}{l} dz dx dy, \quad (11)$$

es la anomalía de altura debida a efectos de corta longitud de onda del RTM. El término dado como:

$$\zeta_0 = \frac{GM - GM^e}{\gamma(Q)r} - \frac{W_0^{\text{IHRF}} - U_0}{\gamma(Q)}, \quad (12)$$

se denomina término de orden cero, donde M^e es la masa encerrada por el elipsoide de referencia, W_0^{IHRF} es la equipotencial de referencia del IHRF ($W_0^{\text{IHRF}} = 62636853.4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$) y U_0 es el valor del potencial de gravedad normal sobre el elipsoide de referencia (Sánchez et al. 2021).

Determinación de anomalías de altura residuales

Esta sección describe los dos métodos empleados en este trabajo para el cálculo de anomalías de altura residuales a partir de anomalías de gravedad residuales. En este estudio, se emplearon dos

métodos: colocación por cuadrados mínimos (LSC; Moritz, 1978) y FFT-1D (Haagmans et al. 1993).

El método LSC se fundamenta en el principio de minimización de Wiener-Kolmogorov (Sansò y Sideris, 2013) para construir un estimador de la anomalía de altura residual óptimo en el sentido de cuadrados mínimos. Asumiendo que los errores observacionales de cada valor de anomalía de gravedad residual no están correlacionados entre sí, el estimador óptimo tiene la siguiente forma:

$$\zeta_r^{\text{LSC}}(P) = \sum_{i,j=1}^q C_{\zeta\Delta g}(P, P_j) [C_{\Delta g}(P_i, P_j) + v_{\Delta g}^2 \delta_{ij}]^{-1} \Delta g_r(P_i), \quad (13)$$

donde $C_{\zeta\Delta g}$ es la función de covarianzas cruzadas entre las anomalías residuales de altura y gravedad, $C_{\Delta g}$ es la función de autocovarianzas de las anomalías de gravedad residuales, $v_{\Delta g}^2$ es la varianza de los errores estadísticos asociados a las anomalías de gravedad residuales, y δ_{ij} es la delta de Kronecker (Sansò y Sideris, 2013). Este estimador permite determinar las anomalías de altura residuales siempre y cuando se disponga del modelo de las autocovarianzas de Δg_r y la covarianza cruzada entre Δg_r y ζ_r^{LSC} .

La función de autocovarianza caracteriza la correlación espacial de las anomalías de gravedad residuales. Si se asume homogénea e isotrópica (Moritz, 1978), esta función depende solo de la distancia esférica entre puntos, y puede ser estimada a partir de los datos gravimétricos mediante el siguiente procedimiento: se definen D valores equiespaciados de distancia $\psi_d = d\Delta\psi$, con $d = 0, 1, \dots, D - 1$. Para cada ψ_d , se agruparon todos los pares de puntos (P_s, P_t) cuya distancia se encuentra entre los valores $\psi_d - \Delta\psi/2$ y $\psi_d + \Delta\psi/2$. A partir de estos pares, la autocovarianza de las anomalías de gravedad se estima como:

$$C_{\Delta g_r}(\psi_d) = \frac{1}{N_d} \sum_{s,t} \Delta g_r(P_s) \Delta g_r(P_t), \quad (14)$$

donde N_d es el número de pares utilizado. Las autocovarianzas empíricas fueron ajustadas a un modelo analítico de autocovarianzas. En este estudio, se utilizó el modelo de autocovarianzas recomendado por Tscherning y Rapp (1974). A partir de este modelo, es posible estimar la matriz de covarianzas entre las anomalías de gravedad y de altura. Finalmente, se aplica la ecuación 13 para obtener las anomalías de altura residuales.

Para el método LSC, las anomalías de gravedad residuales fueron determinadas directamente en las estaciones gravimétricas. El grado máximo de truncamiento del GGM se eligió comparando las anomalías de altura obtenidas a partir del modelo global mediante la ecuación 10, con las anomalías calculadas a partir de las diferencias entre alturas elipsoidales y alturas normales. El grado máximo seleccionado es aquel para el cual la desviación estándar de las diferencias se estabiliza y deja de disminuir significativamente conforme grados mayores son utilizados. La razón detrás de este procedimiento es no incorporar los errores asociados a los coeficientes en armónicos esféricos del GGM (denominados errores de comisión), los cuales aumentan con el grado de truncamiento (Sansò et al. 2019). Por su parte, la resolución de la superficie topográfica de referencia utilizada en los efectos RTM fue elegida de forma empírica, buscando que las anomalías residuales tengan un valor medio y desviación estándar lo más pequeñas que sea posible.

El método FFT-1D se basa en el hecho de que la integral de Molodensky (ecuación 3) puede escribirse como una integral de convolución. Si los datos gravimétricos se interpolan previamente en una cuadrícula regular de dimensiones $N \times M$, las anomalías de altura residuales pueden estimarse en cada punto a lo largo de un paralelo de latitud geocéntrica φ_P mediante (Haagmans et al. 1993)

$$\zeta_{r,\varphi_P}(\lambda_P) = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} \mathbf{F}_1^{-1} \left\{ \sum_{\varphi_Q=\varphi_1}^{\varphi_N} \mathbf{F}_1 \{ \Delta g_r^{\text{int}} \cos \varphi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ S_\varphi(\Delta\lambda_{PQ}) \} \right\}, \quad (15)$$

donde Δg_r^{int} son las anomalías de gravedad dadas en la cuadrícula, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ son las latitudes correspondientes a cada uno de los N paralelos, λ_P son todas las longitudes en el paralelo φ_P , y $S_\varphi(\Delta\lambda_{PQ})$ denota la función de Stokes calculada para todos los puntos del paralelo φ_Q . $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_1^{-1}$

son los operadores FFT-1D y su inversa, respectivamente. Más detalles sobre este método pueden encontrarse en Haagmans et al. (1993).

En la práctica, para minimizar errores asociados a los coeficientes en armónicos esféricos del GGM, es común utilizar una versión modificada de la función de Stokes en la ecuación 15 (Jekeli, 1980). En este estudio, se utilizó la modificación propuesta por Wong y Gore (1969), dada como:

$$S_{WG}(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{N_2} s_n \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi), \quad (16)$$

donde

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n < N_1, \\ \frac{N_2-n}{N_2-N_1} & \text{si } N_1 \leq n \leq N_2, \\ 0 & \text{si } n > N_2, \end{cases} \quad (17)$$

y N_1 y N_2 son grados de corte, elegidos empíricamente para maximizar la precisión del modelo de cuasigeoide.

Previo a la aplicación de la FFT-1D, las anomalías de gravedad residuales deben ser determinadas en una cuadrícula regular. En este trabajo, las anomalías de gravedad residuales fueron interpoladas en los nodos de una cuadrícula siguiendo la estrategia propuesta por Featherstone y Kirby (2000) y utilizada en Gómez et al. (2024). La primera etapa de la metodología de interpolación consiste en determinar las anomalías de Bouguer completas en cada estación mediante:

$$\Delta g_B = \Delta g - 2\pi G \rho H + TC, \quad (18)$$

donde TC es la corrección topográfica (Forsberg, 1984). Estas anomalías tienen una variación espacial más suave por su baja correlación con la topografía y, por lo tanto, son más propicias para su interpolación. Por ende, la segunda etapa consiste en interpolar las anomalías de Bouguer completas en los nodos de la cuadrícula. En este trabajo, la interpolación se realizó siguiendo la técnica propuesta por Moritz (1978). Primero, se calcularon las autocovarianzas de Δg_B , siguiendo la ecuación 14, y posteriormente se utilizó un estimador LSC para interpolar los valores de las anomalías de Bouguer en los nodos de la cuadrícula. A partir de las alturas topográficas provistas por el DEM (H_{DEM}) y las anomalías de Bouguer completas interpoladas (Δg_B^{int}), las anomalías de aire libre se determinan restaurando el efecto topográfico en cada nodo:

$$\Delta g^{int} = \Delta g_B^{int} + 2\pi G \rho H^{DEM} - TC. \quad (19)$$

Finalmente, los efectos del GGM y RTM se calculan en cada nodo y se remueven para obtener una cuadrícula de anomalías residuales Δg_r^{int} .

En relación con el método FFT-1D, una ventaja importante de LSC es que no se necesita interpolar los datos antes de ser aplicado. Sin embargo, su desventaja es el mayor costo computacional, debido a la inversión de matrices de grandes dimensiones.

Los cálculos relevantes para el modelado de cuasigeoide fueron realizados con el paquete de procesamiento del campo de gravedad GRAVSOFT (Forsberg y Tscherning, 2008), el cual proporciona un conjunto de subrutinas escritas en lenguaje Fortran. La subrutina GEODOL fue utilizada para determinar los efectos GGM y determinar las anomalías de altura residuales mediante LSC. Las subrutinas TCGRID y TC fueron utilizadas para determinar la superficie topográfica de referencia y los efectos RTM, respectivamente. EMPCOV y COVFIT se aplicaron al cálculo y posterior ajuste de la función de autocovarianza, respectivamente. Con SP1D se calcularon las anomalías de altura residuales mediante FFT-1D.

ÁREA DE TRABAJO Y DATOS UTILIZADOS

El área de estudio seleccionada se encuentra comprendida entre las latitudes 22°S y 28°S y las longitudes 62°O y 70°O (Figura 1b). El área está situada en el noroeste de Argentina, sobre la cordillera de los Andes, con altitudes que varían desde los 100 m hasta los 6000 m. Esta región es de interés por su alta variabilidad topográfica, y debido a que en ella se localiza la estación UNSA, una de las estaciones de referencia argentinas que integran el IHRF (Figura 1a). Una descripción más detallada de las estaciones argentinas del IHRF puede encontrarse en Tocho et al. (2020) y Gómez et al. (2025).

Se utilizó el elipsoide de referencia asociado al sistema de referencia geodésico GRS80 (Moritz, 2000). Para el cálculo del término de orden cero (ecuación 12), se utilizaron los valores $GM^e = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$ y $U_0 = 62636860.85 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, respectivamente. El GGM utilizado en este trabajo fue XGM2019e (Zingerle et al. 2020). Este GGM proporciona coeficientes en armónicos esféricos hasta el grado 2190 y el orden 2159, y asigna el valor $GM = 3.986004415 \times 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$ para la constante gravitacional. Según Tocho et al. (2022), XGM2019e presenta el mejor ajuste con las estaciones GNSS/nivelación en todo el territorio argentino. Los coeficientes en armónicos esféricos de XGM2019e fueron obtenidos del servicio del Centro Internacional de Modelos Globales de la Tierra (ICGEM; Ince et al. 2019). El DEM empleado fue SRTM v4.1 (Jarvis et al. 2008), con una resolución espacial de 3'', equivalente aproximadamente a 90 m.

Se utilizaron 12171 datos gravimétricos referidos al sistema gravimétrico IGSN71 (Morelli et al. 1972), obtenidos y provistos por el Instituto Geográfico Nacional (IGN) y otras instituciones. Estos datos se presentan en la Figura 1. Antes del cálculo de las anomalías de aire libre, se aplicó una corrección atmosférica (Hinze et al. 2005), ya que GRS80 incluye la masa de la atmósfera en su definición.

Del total de datos gravimétricos, el 2.32% fue identificado como valor atípico (*outlier*) y eliminado del conjunto de datos. La detección de estos valores se realizó mediante el siguiente procedimiento (Liu et al. 2024):

1. Cuando se asignan múltiples valores de gravedad a una misma estación, se comparan entre sí. Si la diferencia entre ellos no supera los 2 mGal, se selecciona uno de los valores para representar la estación. En caso contrario, todos los valores asociados a dicha estación son descartados.
2. Se calcularon las diferencias entre las alturas asignadas a cada estación y las extraídas del modelo SRTM v4.1. Aquellos puntos cuya diferencia entre alturas superó $3\sigma_H$, donde σ_H es la desviación estándar de las diferencias entre las alturas asignadas y las del DEM, fueron eliminados del conjunto de datos. El objetivo de este paso es descartar posibles estaciones con alturas incorrectas, ya que esto podría provocar valores erróneos de anomalías de gravedad.
3. Se calcularon las anomalías de Bouguer completas, y se llevó a cabo una inspección visual de las mismas para identificar y descartar posibles valores atípicos.
4. Con las estaciones restantes, se calculó la desviación estándar de las anomalías de Bouguer completas $\sigma_{\Delta g_B}$. Aquellas estaciones que excedieron el valor $3\sigma_{\Delta g_B}$ fueron descartados del conjunto de datos.

Los puntos GNSS/nivelación se ilustran en la Figura 1 y corresponden a 51 estaciones con coordenadas elipsoidales determinadas mediante técnicas GNSS y alturas ortométricas determinadas con nivelación geométrica y gravimetría. Las coordenadas elipsoidales están referidas al marco de referencia Posiciones Geodésicas Argentinas 2007 (POSGAR07; Cimbaro et al. 2009). Por su parte, las alturas ortométricas se expresan en el Sistema de Referencia Vertical Nacional 2016 (SRVN16; Instituto Geográfico Nacional, 2016), y fueron calculadas a partir de un ajuste en términos de números geopotenciales locales. Estos números geopotenciales fueron utilizados para determinar las alturas normales (H^* , Figura 2) en las estaciones (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006). Finalmente, las

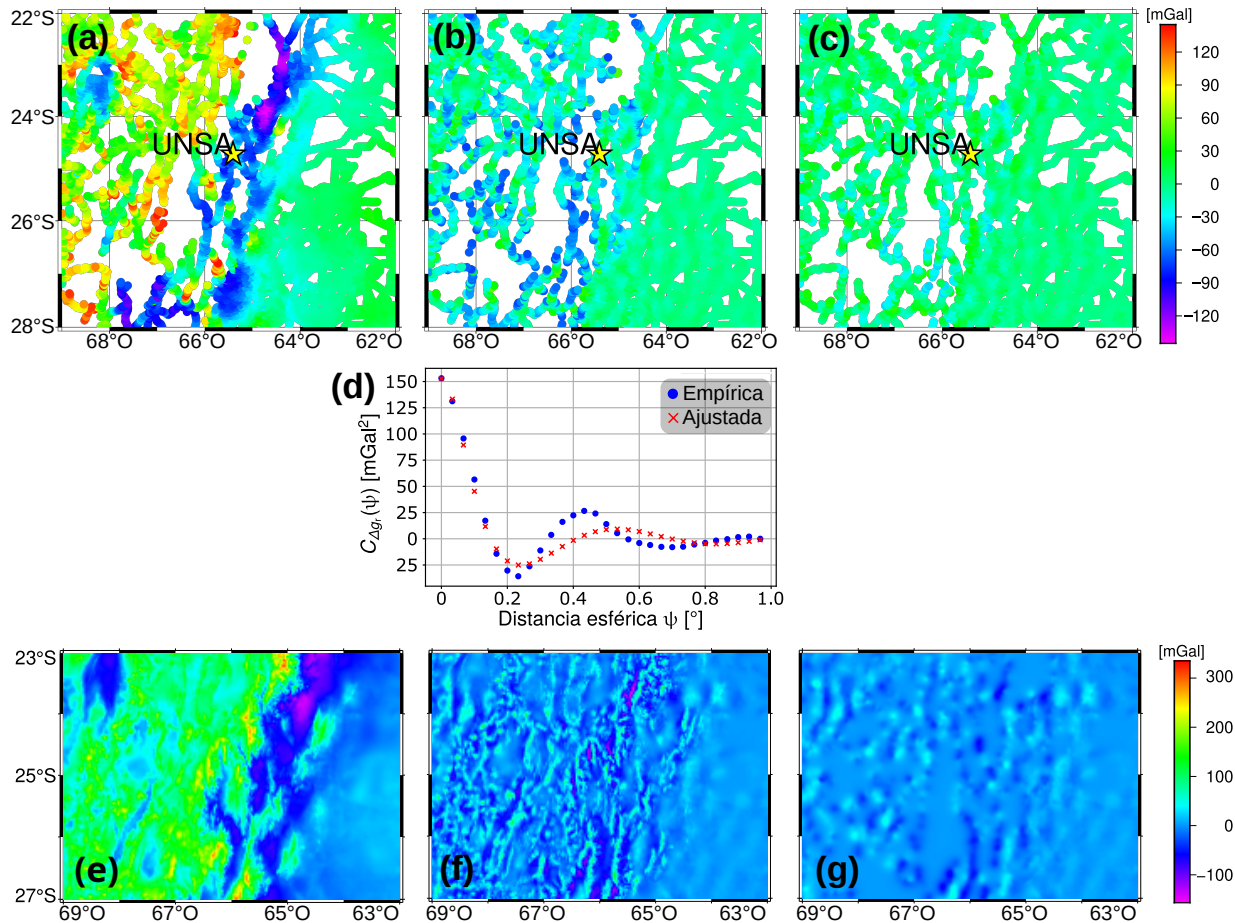


Figura 4. a), b) y c) Anomalías de aire libre, reducidas por el GGM y residuales, respectivamente, en las estaciones gravimétricas. d) Funciones de autocovarianza de las anomalías de gravedad empíricas y del modelo ajustado. e), f) y g) Cuadrículas de anomalías de aire libre, reducidas por el GGM y residuales.

anomalías de altura en todos los puntos GNSS/nivelación fueron obtenidas mediante:

$$\zeta_{\text{GNSS/nivelación}} = h - H^*. \quad (20)$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Determinación de los modelos de cuasigeoide

Para las anomalías de gravedad residuales puntuales, se utilizó el grado de truncamiento del GGM $n_{\text{GGM}} = 800$. Para los efectos RTM, se eligió una resolución de 0.056° (6.2 km) para la superficie topográfica de referencia. La Figura 4 (paneles a, b y c) muestra la distribución de las anomalías de aire libre, de las reducidas por el GGM y las anomalías residuales, respectivamente. La Tabla 1 presenta sus estadísticas. Como era de esperar, se observa que las anomalías residuales disminuyen tanto su amplitud como su contenido espectral debido a la eliminación de efectos de longitud de onda corta y larga. Asimismo, se evidencia una disminución significativa del valor medio y de la desviación estándar respecto de las anomalías de aire libre. La Figura 4d muestra la función de autocovarianza empírica determinada a partir de las anomalías de gravedad residuales, junto con el modelo de autocovarianzas ajustado.

Para el método FFT-1D, las anomalías puntuales de gravedad fueron interpoladas a una cuadrícula con resolución de 0.03° (aproximadamente $2'$ o 3.33 km). Para la determinación de anomalías residuales, se utilizaron el mismo grado y orden de truncamiento del GGM ($n_{\text{GGM}} = 800$) y la misma superficie topográfica de referencia que en el método LSC. Las estadísticas correspondientes a las anomalías de gravedad determinadas en las cuadrículas se presentan en la última fila de la Tabla 1. La Figura 4

Tabla 1. Estadísticas de las anomalías de aire libre, reducidas por el GGM, residuales en las estaciones gravimétricas y sobre la cuadrícula. Unidad: mGal.

Anomalías	Mínimo	Máximo	Media	Desv. estándar
Δg puntuales	-143.421	212.668	-9.236	42.529
$\Delta g - \Delta g_{\text{GGM}}$ puntuales	-170.953	79.192	-9.411	19.138
Δg_r puntuales	-83.708	95.098	-1.163	12.016
Δg_r^{int} interpoladas	-68.008	72.328	-1.710	11.116

(paneles e, f y g) muestra las cuadrículas de anomalías de aire libre, las anomalías reducidas por el GGM y las anomalías de gravedad residuales, respectivamente.

Finalmente, los modelos de cuasigeoide fueron generados sobre una cuadrícula con una resolución de 0.03° (3.33 km). Los modelos determinados con LSC y FFT-1D fueron denominados UNSAQG_LSC_2025 y UNSAQG_FFT_2025, respectivamente. La validación de ambos se describe a continuación.

Validación con datos GNSS/nivelación

El método principal para validar modelos de cuasigeoide gravimétricos en tierra es mediante la comparación con anomalías de alturas obtenidas con la [ecuación 20](#), lo cual da lugar a la siguiente diferencia absoluta:

$$\Delta\zeta = \zeta_{\text{GNSS/nivelación}} - \zeta_{\text{grav}}. \quad (21)$$

La precisión de los modelos de cuasigeoide se evalúa a partir de las estadísticas de $\Delta\zeta$. Estas diferencias contienen sesgos y sistematismos asociados a diferencias entre el datum de las alturas normales y el datum del modelo de cuasigeoide, que enmascaran el acuerdo real entre las anomalías de altura gravimétricas y las asociadas a los datos GNSS/nivelación. Para eliminar estos sesgos es posible ajustar las diferencias a un modelo de transformación de cuatro parámetros, dado como:

$$\Delta\zeta_i = a_0 + a_1 \cos \varphi_i \cos \lambda_i + a_2 \cos \varphi_i \sin \lambda_i + a_3 \sin \varphi_i + \nu_i, \quad (22)$$

donde $\Delta\zeta_i$ son las diferencias absolutas calculadas mediante la [ecuación 21](#) en el i -ésimo punto GNSS/nivelación, a_0 , a_1 , a_2 y a_3 son los cuatro parámetros a ajustar, y ν_i es el residuo a minimizar (Fotopoulos et al. 2000). Este modelo remueve el valor medio y los efectos de larga longitud de onda asociados a las diferencias en los datums verticales. En ese sentido, las estadísticas de los residuos luego del ajuste describen el acuerdo absoluto del modelo con los datos GNSS/nivelación, y la desviación estándar de las diferencias en particular sirve como estimador de la precisión de los modelos. Por su variación espacial suave, este modelo también absorbe errores de larga longitud de onda, tales como los asociados al GGM.

La [Tabla 2](#) presenta las estadísticas de las diferencias antes y después del ajuste. La [Figura 5](#) (paneles a y b) muestra la distribución espacial de los residuos luego del ajuste correspondiente a cada método. Con el objetivo de verificar si los modelos de cuasigeoide locales presentan una mejora con respecto al GGM, XGM2019e hasta grado y orden máximos también fue validado. La precisión estimada de XGM2019e en la región es 0.203 m, mientras que tanto UNSAQG_LSC_2025 como UNSAQG_FFT_2025 tienen una precisión estimada de 0.124 m. Por un lado, ambos modelos locales presentan una mejora significativa de 0.079 m o 49 % en su precisión en comparación con XGM2019e. Por otro lado, las precisiones de los modelos locales son equivalentes entre sí luego del ajuste, lo cual sugiere que tanto LSC como FFT-1D tienen el mismo impacto en la precisión de los modelos.

La validación relativa consiste en estimar la precisión del gradiente espacial del modelo (Featherstone, 2001) y se realizó de la siguiente manera: en primer lugar, se agruparon todos los pares de puntos cuya distancia entre ellos (denominada longitud de línea de base) se encuentra dentro de un rango de valores. Los rangos de líneas de base fueron elegidos de manera que, en cada conjunto, el número

Tabla 2. Estadísticas de las diferencias entre las anomalías de alturas determinadas mediante alturas elipsoidal y normal y las obtenidas de XGM2019e y de los modelos locales UNSAQG_LSC_2025 (determinado con LSC) y UNSAQG_FFT_2025 (determinado con FFT-1D), antes y después del ajuste del modelo de cuatro parámetros a los residuos. La desviación estándar de las diferencias luego del ajuste se presenta en negrita. Unidad: m.

Residuos	Mínimo	Máximo	Media	Desv. estándar
XGM2019e	-0.540	0.264	-0.069	0.247
XGM2019e ajustado	-0.278	0.380	0.000	0.203
UNSAQG_LSC_2025	-0.436	0.065	-0.089	0.160
UNSAQG_LSC_2025 ajustado	-0.235	0.351	0.000	0.124
UNSAQG_FFT_2025	-0.456	0.069	-0.029	0.158
UNSAQG_FFT_2025 ajustado	-0.205	0.350	0.000	0.124

de pares utilizado sea similar. Para cada par de puntos P_i , P_j en un mismo rango de distancias, se calculó la diferencia:

$$\Delta\zeta_{ij} = \Delta\zeta_i - \Delta\zeta_j, \quad (23)$$

donde ζ_i y ζ_j son las anomalías de altura determinadas en los puntos P_i y P_j , respectivamente.

A partir de todos los valores de $\Delta\zeta_{ij}$ obtenidos para un mismo rango de longitudes de líneas de base, se calculó la desviación estándar de los mismos. Este procedimiento se repitió para todos los rangos de líneas de base seleccionados. Al igual que con la validación absoluta, la validación relativa fue determinada antes y después del ajuste del modelo de cuatro parámetros. La [Figura 5c](#) muestra las curvas de los valores de la desviación estándar de las diferencias para los modelos antes y después del ajuste.

Las curvas de validación relativa muestran que los modelos de cuasigeoide presentan un acuerdo significativamente mayor en comparación con XGM2019e, para todas las longitudes de líneas de base e independientemente del método empleado. Las curvas obtenidas luego del ajuste muestran menores valores de desviación estándar para líneas de base altas, ya que los sesgos de larga longitud de onda fueron absorbidos por el modelo de transformación de cuatro parámetros (Featherstone, 2001). Se observa que la curva asociada al método FFT-1D luego del ajuste muestra una desviación estándar menor para líneas de base ubicadas entre los rangos 20-50 km y 80-110 km. Esto sugiere que las anomalías determinadas con FFT-1D tienen un acuerdo mejor con los datos GNSS/nivelación para estos rangos de línea de base. En líneas de base mayores a 110 km, ambos métodos muestran acuerdos relativos similares.

Ambos modelos de cuasigeoide se presentan en la [Figura 6](#) (paneles a y b), mientras que la [Figura 6c](#) muestra la diferencia entre ellos. Tanto el valor medio como la desviación estándar de los modelos y su diferencia también se presentan en las respectivas figuras. En particular, la desviación estándar de diferencias toma el valor de 0.055 m. Adicionalmente, es posible observar una correlación espacial entre las diferencias entre los modelos y la topografía de la región ([Figura 6d](#)). De acuerdo con Sansò y Sideris (1997), en principio tanto LSC como FFT-1D deberían dar lugar a resultados equivalentes, de manera que la diferencia entre ambos debería ser nula. Sin embargo, en la práctica los resultados generados por cada método presentan diferencias entre sí, asociadas principalmente al tratamiento de los datos de entrada y a la validez de los valores de los distintos parámetros asociados a cada metodología (parámetros del modelo de covarianzas para LSC, y grados de transición para la modificación de Wong-Gore en FFT-1D). En el caso del método FFT-1D, los datos gravimétricos deben interpolarse previamente a una cuadrícula regular, por lo que la precisión del modelo resultante depende, en parte, de los errores asociados a dicha interpolación. Esto no ocurre en el método LSC, donde los datos irregularmente distribuidos pueden ser utilizados directamente por el estimador. Sin embargo, una ventaja importante de FFT-1D es que permite aplicar la transformación de Wong-Gore a la función de Stokes, lo que ayuda a mitigar errores de larga longitud de onda presentes en los datos gravimétricos. En cambio, LSC no permite la aplicación directa de esta transformación. Adicionalmente, FFT-1D es computacionalmente menos costoso que LSC, lo que permite su uso para regiones más extensas.

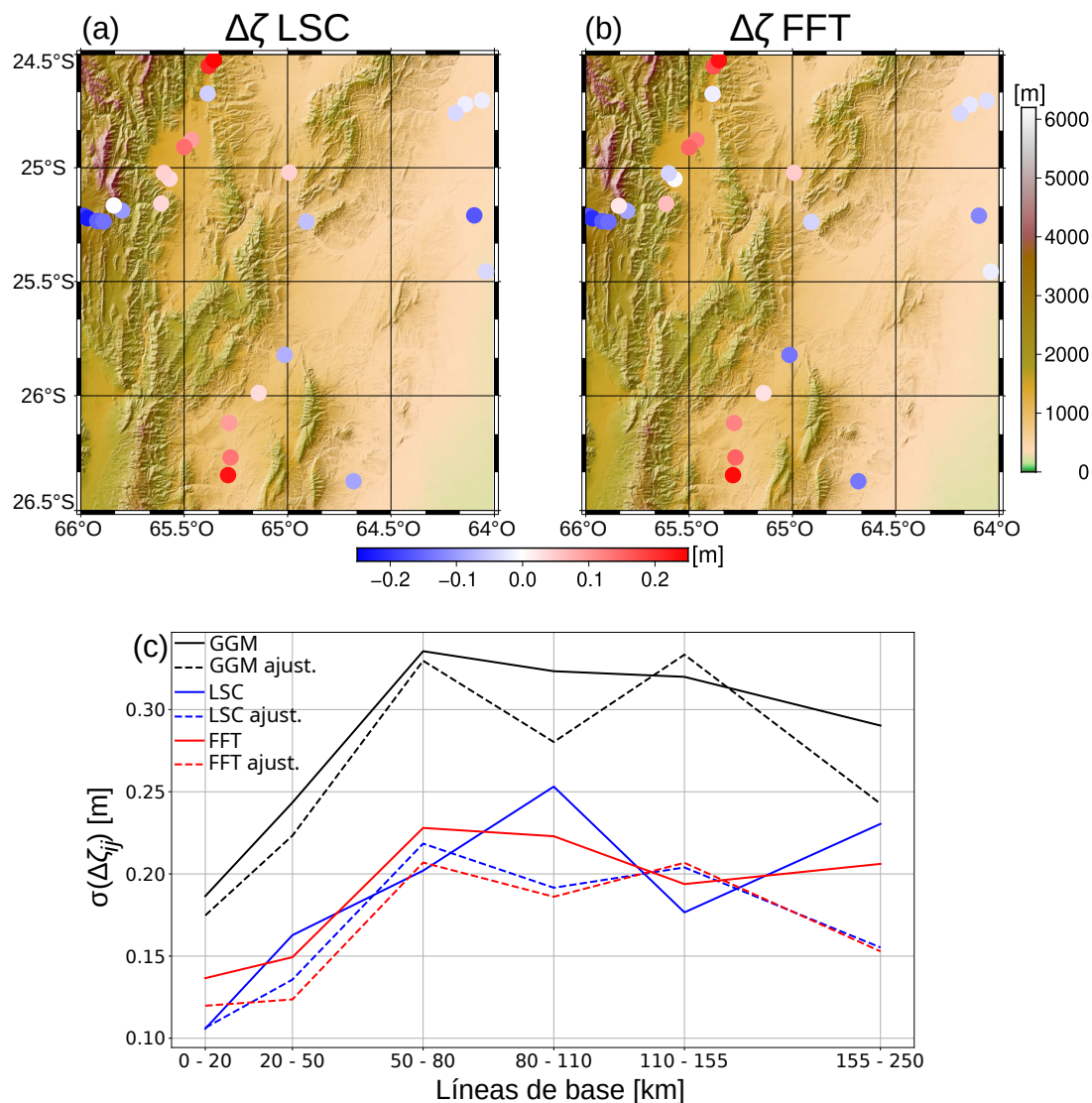


Figura 5. a) y b) Distribución de los residuos entre las anomalías de altura determinadas mediante los datos GNSS/nivelación y los obtenidos con los métodos LSC y FFT-1D, respectivamente, luego del ajuste a la función de transformación de cuatro parámetros. c) Curvas de validación relativa de XGM2019e, y de los modelos determinados con LSC y FFT-1D, antes y después del ajuste de la función de cuatro parámetros.

CONCLUSIONES

En este trabajo se evaluaron dos métodos para la generación de modelos de cuasigeoide gravimétricos puros: LSC y FFT-1D. Ambos fueron implementados dentro del esquema RCR en una región de topografía compleja del noroeste argentino sobre la cordillera de los Andes. Los efectos de larga longitud de onda fueron determinados mediante XGM2019e, mientras que los efectos de corta longitud de onda se abordaron mediante la técnica RTM y SRTM v4.1. Los modelos resultantes, junto con XGM2019e hasta grado y orden máximos, fueron validados de forma absoluta y relativa con puntos GNSS/nivelación. La validación se realizó antes y después de ajustar los residuos a una función de transformación de cuatro parámetros, lo que permitió aumentar la precisión y reducir posibles sesgos en los modelos de cuasigeoide obtenidos.

Tanto la validación absoluta como la relativa demuestran que, independientemente del método utilizado, los modelos obtenidos presentan un mejor ajuste que XGM2019e a los datos GNSS/nivelación. En particular, muestran mejoras en la precisión de 0.079 m, lo que representa un incremento del 49 %. Estos resultados resaltan la importancia de incorporar datos gravimétricos locales en la determinación de modelos de cuasigeoide de alta precisión, especialmente en regiones montañosas.

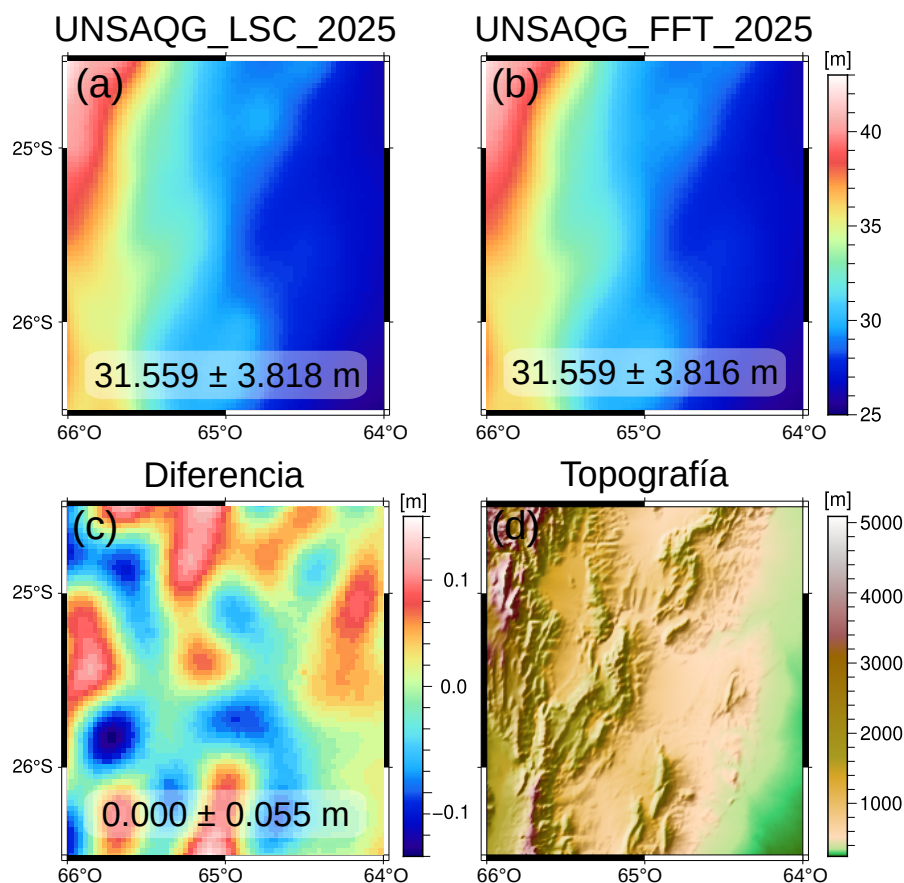


Figura 6. Modelos de cuasigeoide gravimétricos puros determinados con los métodos a) LSC y b) FFT-1D, respectivamente, y c) las diferencias entre ellos. La escala de valores en a) y b) difiere de la utilizada en c). El valor medio y desviación estándar de cada modelo, así como de las diferencias, se presenta en cada gráfico. d) Topografía de la región.

Con respecto a la validación de los métodos, ambos muestran un acuerdo similar al compararse con datos GNSS/nivelación. A partir de la validación absoluta se obtuvo una precisión estimada de 0.124 m para ambos métodos. Por su parte, la validación relativa muestra un acuerdo equivalente o ligeramente superior del modelo determinado con FFT-1D respecto de LSC luego del ajuste a la función de cuatro parámetros. Las diferencias entre modelos presentan una desviación estándar de 0.055 m, la cual se asocia principalmente con las discrepancias en la distribución espacial de los datos de entrada en la etapa “calcular”, utilizados para cada método.

Este análisis constituye un aporte preliminar hacia la determinación de un nuevo modelo de cuasigeoide gravimétrico puro para todo el territorio argentino, como parte del proceso de implementación del IHRF.

Agradecimientos Agradecemos al Editor Dr. Danilo Velis y a los dos revisores anónimos por tomarse el tiempo para leer y revisar el manuscrito. Sus comentarios y sugerencias han sido sumamente valiosos para mejorar la calidad de este trabajo.

REFERENCIAS

- Cimbaro, S., Lauría, E., y Piñón, D. (2009). Adopción del nuevo marco de referencia geodésico nacional. *Instituto Geográfico Militar*.
- Denker, H. (2013). Regional gravity field modeling: Theory and practical results. En G. Xu (Ed.), *Sciences of Geodesy - II: Innovations and future developments* (pp. 185-291). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-28000-9_5

- Drewes, H., Kuglitsch, F. G., Adám, J., y Rózsa, S. (2016). The Geodesist's handbook 2016. *Journal of Geodesy*, 90(10), 907-1205. <https://doi.org/10.1007/s00190-016-0948-z>
- Featherstone, W. (2001). Absolute and relative testing of gravimetric geoid models using Global Positioning System and orthometric height data. *Computers & Geosciences*, 27(7), 807-814. [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(00\)00169-2](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(00)00169-2)
- Featherstone, W., y Kirby, J. (2000). The reduction of aliasing in gravity anomalies and geoid heights using digital terrain data. *Geophysical Journal International*, 141(1), 204-212. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2000.00082.x>
- Forsberg, R. (1984). *A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling* ([Informe técnico]). Ohio State University.
- Forsberg, R., y Tscherning, C. C. (2008). *An overview manual for the GRAVSOF geodetic gravity field modelling programs* (2.ª ed.). Kongens Lyngby.
- Fotopoulos, G., Kostakis, C., y Sideris, M. (2000). A new Canadian geoid model in support of levelling by GPS. *Geomatica*, 51(1), 53-62. <https://doi.org/10.5623/geomat-2000-0006>
- Gómez, A. R., Tocho, C. N., y Antokoletz, E. D. (2024). Modelado de cuasigeoide mediante métodos FFT y determinación de cuadrículas regulares de distintos tipos de anomalías de gravedad. *Geoacta*, 45(1), 17-37.
- Gómez, A. R., Tocho, C. N., Antokoletz, E. D., y Cimbaro, S. R. (2025). Local quasigeoid modeling at Argentinean stations of the International Height Reference Frame (IHRF). *Journal of Geodesy*, 99(12), 94. <https://doi.org/10.1007/s00190-025-02018-5>
- Haagmans, R., de Min, E., y von Geideren, M. (1993). Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral. *Manuscripta Geodaetica*, 18, 227-241. <https://doi.org/10.1007/BF03655315>
- Hinze, W. J., Aiken, C., Brozena, J., Coakley, B., Dater, D., Flanagan, G., Forsberg, R., Hildenbrand, T., Keller, G. R., Kellogg, J., Kucks, R., Lee, X., Mainville, A., Morin, R., Pilkington, M., Plouff, D., Ravat, D., Roman, D., Urrutia-Fucugauchi, J., ... Y Winester, D. (2005). New standards for reducing gravity data: The North American gravity database. *Geophysics*, 70(4), J25-J32. <https://doi.org/10.1190/1.1988183>
- Hofmann-Wellenhof, B., y Moritz, H. (2006). *Physical Geodesy*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-211-33545-1>
- Ilde, J., Sánchez, L., Barzaghi, R., Drewes, H., Foerste, C., Gruber, T., Liebsch, G., Marti, U., Pail, R., y Sideris, M. (2017). Definition and proposed realization of the International Height Reference System (IHRF). *Surveys in Geophysics*, 38, 549-570. <https://doi.org/10.1007/s10712-017-9409-3>
- Ince, E. S., Barthelmes, F., Reißland, S., Elger, K., Förste, C., Flechtner, F., y Schuh, H. (2019). ICGEM—15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans. *Earth System Science Data*, 11(2), 647-674. <https://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>
- Instituto Geográfico Nacional. (2016). *Nuevo Sistema Vertical de la República Argentina. Simposio SIRGAS 2016* ([Informe técnico]). Argentina.
- Jarvis, A., Reuter, H., Nelson, A., y Guevara, E. (2008). Hole-filled seamless SRTM data V4. *CGIAR - Consortium for Spatial Information*. <https://srtm.csi.cgiar.org/>
- Jekeli, C. (1980). *Reducing the error of geoid undulation computations by modifying Stokes' function* ([Informe técnico]). Ohio State University. <https://kb.osu.edu/handle/1811/105291>
- Liu, Q., Schmidt, M., Sánchez, L., Moisés, L., y Cortez, D. (2024). High-resolution regional gravity field modeling in data-challenging regions for the realization of geopotential-based height systems. *Earth, Planets and Space*, 76(1), 35. <https://doi.org/10.1186/s40623-024-01981-1>
- Morelli, C., Gantar, C., McConnell, R. K., Szabo, B., y Uotila, U. (1972). *The International Gravity Standardization Net 1971 (IGSN 71)* ([Informe técnico]). International Association of Geodesy. <https://apps.dtic.mil/sti/html/tr/ADA006203/>
- Moritz, H. (1978). Least-squares collocation. *Reviews of Geophysics*, 16(3), 421-430. <https://doi.org/10.1029/RG016i003p00421>
- Moritz, H. (1980). *Advanced physical geodesy*. Herbert Wichmann.
- Moritz, H. (2000). Geodetic Reference System 1980. *Journal of Geodesy*, 74, 128-133. <https://doi.org/10.1007/s001900050278>
- Sánchez, L., Ågren, J., Huang, J., Wang, Y. M., Mäkinen, J., Pail, R., Barzaghi, R., Vergos, G. S., Ahlgren, K., y Liu, Q. (2021). Strategy for the realisation of the International Height Reference System (IHRF). *Journal of Geodesy*, 95, 33. <https://doi.org/10.1007/s00190-021-01481-0>
- Sansò, F., y Sideris, M. G. (1997). On the similarities and differences between systems theory and least-squares collocation in physical geodesy. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 56, 173-206.
- Sansò, F., y Sideris, M. G. (2013). *Geoid determination: Theory and methods*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74700-0>
- Sansò, F., Reguzzoni, M., y Barzaghi, R. (2019). *Geodetic Heights* (Vol. 141). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-10454-2>

- Schwarz, K., Sideris, M., y Forsberg, R. (1990). The use of FFT techniques in physical geodesy. *Geophysical Journal International*, 100(3), 485-514. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1990.tb00701.x>
- Tocho, C. N., Antokoletz, E. D., Gómez, A. R., Guagni, H., y Piñón, D. A. (2022). Analysis of high-resolution global gravity field models for the estimation of International Height Reference System (IHRF) coordinates in Argentina. *Journal of Geodetic Science*, 12(1), 131-140. <https://doi.org/10.1515/jogs-2022-0139>
- Tocho, C. N., Antokoletz, E. D., y Piñón, D. A. (2020). Towards the realization of the International Height Reference Frame (IHRF) in Argentina. En J. T. Freymueller y L. Sánchez (Eds.), *Beyond 100: The next century in Geodesy* (pp. 11-20). Springer. https://doi.org/10.1007/1345_2020_93
- Tscherning, C., y Rapp, R. H. (1974). *Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models* ([Informe técnico]). Ohio State University. <https://kb.osu.edu/handle/1811/104988>
- Wong, L., y Gore, R. (1969). Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels. *Geophysical Journal International*, 18(1), 81-91. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1969.tb00264.x>
- Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., y Oikonomidou, X. (2020). The combined global gravity field model XGM2019e. *Journal of Geodesy*, 94, 1-12. <https://doi.org/10.1007/s00190-020-01398-0>