El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria

[The development of algebraic thinking in children of primary school]

Bárbara M. Brizuela[1]; Maria Blanton[2]

1 Department of Education, School of Arts & Sciences, 12 Upper Campus Rd., Paige Hall, Tufts University, Medford, MA 02155, EEUU. **2** TERC, 2067 Massachusetts Ave., Cambridge, MA 02140.

Resumen: Este artículo presenta los resultados de investigaciones focalizadas en el desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. Se centra, específicamente, en el desarrollo del pensamiento funcional y en la práctica representacional, atendiendo a la apropiación de las tablas y las letras para representar cantidades indeterminadas por parte de niños de primer grado. Estos estudios muestran los recursos que manifiestan los niños para desarrollar su pensamiento funcional y para usar tablas y letras en contextos algebraicos. Estos resultados se oponen a los de estudios clásicos que habían enfatizado las grandes dificultades de estudiantes adolescentes a la hora de aprender álgebra. El artículo finaliza con reflexiones a nivel metodológico y teórico en cuanto a estos estudios de investigación.

Palabras clave: educación matemática; simbolización; alumnos de escolaridad primaria; pensamiento algebraico.

Abstract: This article presents an overview of the results of studies that have focused on the development of algebraic thinking among young elementary school children. Specifically, it centers on the development of functional thinking and the algebraic practice of representation, with a focus on the appropriation of

Recibido: junio de 2014; aceptado: julio de 2014.

tables and notation for variables among first grade children. These studies show the resources that children have to develop functional thinking and to use tables and notation for variables in algebraic contexts. These results are contrasted with earlier studies that had emphasized the great difficulties that adolescent students have in learning algebra. In closing, the article provides methodological and theoretical reflections related to these research studies.

Keywords: mathematics education; symbolism; elementary school students; algebraic.

En este artículo describiremos a grandes rasgos el trabajo que hemos desarrollado junto a nuestros colegas durante la última década y media relacionado con los primeros pasos en el desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria (por ej.: Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens, & Sawrey, en prensa; Brizuela & Martinez, 2012; Brizuela & Schliemann, 2008; Carraher, Martinez, & Schliemann, 2009; Sawrey, Brizuela, & Blanton, en prensa; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2011). Distintos marcos teóricos de la psicología se encuentran en la base de estos trabajos, como describiremos más adelante—desde los trabajos de Piaget y Vygotsky así como los trabajos que se centran en los procesos de desarrollo como dinámicos y no lineales. Asimismo, trabajos que entienden el aprendizaje como un sistema de actividades en contextos sociales y que atienden al rol de los sistemas semióticos en el aprendizaje de las matemáticas.

En nuestros estudios, el niño es protagonista y centro de atención. Lo que nos preguntamos al estudiar el desarrollo de su pensamiento algebraico es: ¿cómo describimos y explicamos, de la manera más completa y honesta que nos sea posible, el desarrollo del pensamiento algebraico sin perder de vista al niño entero? Entre nuestros objetivos se encuentran: achicar las distancias entre la investigación y la práctica; entender los procesos y mecanismos de cambio a nivel microgenético; y fundamentar la renovación y la innovación de la práctica educativa.

Dentro del área del pensamiento algebraico temprano nos enfocamos en el pensamiento funcional. Blanton, Levi, Crites y Dougherty (2011) describen otras áreas del pensamiento algebraico que incluyen la aritmética generalizada, las ecuaciones, las variables y el razonamiento cuantitativo. Una función es una relación matemática especial entre dos conjuntos, donde cada elemento de un conjunto, que llamamos el dominio, está relacionado de manera única con un elemento del segundo conjunto, que llamamos codominio. En general, todas las definiciones de función incluyen a la variable como elemento clave de la definición.

El pensamiento funcional implica la generalización de relaciones entre cantidades que co-varían; la representación y justificación de estas relaciones de múltiples maneras a través del lenguaje natural, del uso de letras para representar cantidades indeterminadas[1] (o sea, de acuerdo a Radford [2011], cantidades variables o incógnitas), y del uso de tablas y gráficos; y el razonamiento con fluidez con estas representaciones generalizadas a fin de comprender y predecir el comportamiento funcional. Las funciones han sido consideradas como un hilo conductor en el currículo de enseñanza de las matemáticas a través de la escolaridad, desde pre-escolar hasta el final de la escuela secundaria. También han sido consideradas como uno de los componentes más importantes del pensamiento algebraico. En nuestros trabajos, nos abocamos a describir la manera en la cual los niños desarrollan su pensamiento funcional, por ejemplo:

cómo piensan sobre cantidades que co-varían en contextos funcionales (por ej.: Schliemann et al., 2011);

cómo comparan funciones que varían de distintas maneras (por ejemplo en Brizuela & Martinez 2012);

cómo se apropian gradualmente de representaciones algebraicas tales como las tablas, las letras y los gráficos de coordenadas cartesianos (Brizuela et al., en prensa; Brizuela & Earnest, 2008; Brizuela & Lara-Roth, 2002);

cómo establecen relaciones entre representaciones (Brizuela & Earnest, 2008).

El aprendizaje del álgebra se ha relegado a la escolaridad media (por lo general, séptimo y octavo grado) y secundaria. Numerosos estudios en el área han resaltado las enormes dificultades que demuestran los adolescentes cuando comienzan el aprendizaje del álgebra:

La literatura sobre los alumnos adolescentes explica que entre las dificultades que estos tienen con el álgebra, se encuentran las siguientes limitaciones: necesitan enfocarse en buscar respuestas específicas; no pueden utilizar símbolos matemáticos para expresar relaciones entre cantidades, y no comprenden el uso de las letras como números generalizados o variables. (Brizuela & Martinez, 2012, p. 283; ver también Carraher & Schliemann, 2007; Schliemann et al., 2011)

Los estudios que resaltan las dificultades de los adolescentes las han explicado como dificultades en su razonamiento, o se han remitido a enfatizar la falta de

---

[1] De ahora en más, usaremos solo “letras” en vez de “letras para representar cantidades indeterminadas” para simplificar.

pensamiento abstracto o formal entre estos estudiantes. En nuestros estudios, hemos cuestionado las explicaciones a las dificultades de los estudiantes que se remiten a las falencias o déficits en su pensamiento. Junto a otros colegas en el área hemos sugerido que las limitaciones que se observan entre los adolescentes están relacionadas con los abordajes a la enseñanza del álgebra y de la matemática en la escuela primaria y con los contextos educativos en los cuales ocurre esta enseñanza.

El argumento general detrás de nuestros estudios es que las prácticas predominantes de enseñanza subestiman las capacidades de los niños al retrasar la enseñanza del álgebra innecesariamente sobre la base de un modelo de desarrollo simplista y lineal que ha tomado de manera demasiado literal las reflexiones de Piaget sobre el desarrollo de las operaciones. Estos modelos simplistas y lineales han llevado a interpretar que las observaciones de Piaget sobre las operaciones concretas y formales implican que la enseñanza debe ser primero concreta y solo más tarde formal, y que la enseñanza de cualquier contenido que sea percibido como formal o más abstracto (como el álgebra) debe ser demorada debido a que los niños no estarían preparados para aprenderlo.

En este artículo, nos centraremos en las siguientes preguntas: ¿Qué hemos aprendido sobre el pensamiento funcional en niños que cursan los primeros grados de escolaridad primaria (6 a 10 años de edad)? ¿Qué hemos aprendido sobre el diseño de estudios que propicien el estudio del pensamiento funcional? ¿Qué reflexiones a nivel teórico nos aportan estos estudios? También argumentaremos en este artículo que a pesar de que aquí nos centramos en describir estudios relacionados con el pensamiento algebraico y, más específicamente, el funcional, muchas de las reflexiones a nivel metodológico y teórico pueden llegar a ser útiles más allá de este foco de investigación.

¿Qué hemos aprendido sobre el pensamiento funcional en niños que cursan los primeros grados de escolaridad primaria (6 a 10 años de edad)?

Para organizar este apartado nos remitiremos a las tres prácticas del pensamiento algebraico: la generalización, la representación y el razonamiento

(Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Estas tres prácticas derivan del trabajo de Kaput (2008) que describe dos aspectos fundamentales del álgebra: (1) álgebra como la simbolización sistemática de generalizaciones en base a regularidades y restricciones, y (2) álgebra como el razonamiento y las acciones sintácticamente guiadas sobre generalizaciones que se expresan en sistemas simbólicos convencionales. Por su parte, Blanton y sus colegas (2011) describen que el pensamiento funcional incluye la generalización sobre relaciones entre cantidades que co-varían; la expresión (o representación) de esas relaciones en palabras, símbolos, tablas o gráficos; y el razonamiento con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento funcional.

Debido a limitaciones de espacio nos centraremos en este artículo en la práctica representacional con relación al pensamiento algebraico. Podemos argumentar que esta práctica está profundamente conectada a (y es hasta inseparable de) las otras dos (generalización y razonamiento) ya que los modos en que generalizamos y razonamos necesariamente están representados de un modo u otro. Es decir, no podemos separar la generalización y el razonamiento de los modos en los cuales representamos estas generalizaciones y estos razonamientos.

La representación del pensamiento funcional en niños que cursan los primeros grados de escolaridad primaria

Las representaciones más utilizadas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra incluyen el lenguaje (oral y escrito), las tablas, los gráficos de coordenadas cartesianos y las letras. La perspectiva que adoptamos en nuestros estudios es que las representaciones no pueden considerarse como suplementarias o separadas del pensamiento algebraico. El pensamiento y las representaciones algebraicas se encuentran en una relación de co-dependencia completa. De este modo, nuestra postura es que las representaciones algebraicas son constitutivas del pensamiento algebraico, y que el pensamiento y las representaciones se desarrollan y evolucionan conjuntamente. Aquí, nuevamente por cuestiones de espacio, nos centraremos exclusivamente en nuestros resultados en torno a la comprensión y el uso de las tablas y de las letras para representar cantidades indeterminadas en niños de primer grado de primaria (seis años de edad).

Usar tablas para representar relaciones funcionales

En nuestros trabajos, las tablas se incorporan al trabajo con los niños desde pre-escolar (aproximadamente a los cinco años de edad). En un principio, las tablas se utilizan para documentar y organizar los pares de valores que se exploran para una función. También se utilizan para apoyar la exploración de la función que subyace a todos los pares de valores.

A medida que los niños se van apropiando de las tablas como sistema semiótico, éstas se convierten en herramientas que les permiten explorar las relaciones funcionales (ver Schliemann et al., 2011). Comienzan a utilizarlas sin que se les pida explícitamente, como una manera para explorar los problemas que están resolviendo. Los niños logran, desde primer grado, construir tablas donde son capaces de organizar sus datos, decidiendo por sí mismos dónde colocar datos que corresponden a la variable independiente y a la variable dependiente (aunque no las llamen así). También son capaces de determinar el nombre de las variables involucradas en la función que están explorando. A continuación incluimos dos ejemplos tomados de nuestros estudios.

Por ejemplo Rebecca, una estudiante de primer grado, que produjo la tabla que se muestra en la Figura 1 durante una entrevista individual cuando exploraba una tarea en la cual se le presenta una situación en la que hay un tren que recoge dos vagones en cada estación (ver Brizuela et al., en prensa, donde se explora el uso de variables[2] en Rebecca). La pregunta que se les pidió explorar a los niños en esta entrevista fue cuántos vagones habría recogido el tren después de cualquier número de estaciones. Luego de explorar los casos específicos de una, dos y tres estaciones la entrevistadora preguntó a Rebecca: “¿puedes organizar esta información?”. Acto seguido, Rebecca recurrió a construir la tabla que se puede ver en la Figura 1.

[2] Cuando decimos *variable* nos referimos a cantidades incógnitas tanto variables como fijas (ver Blanton et al., 2011). Un ejemplo del primer caso sería el uso de x para representar una cantidad incógnita que varía en la ecuación $x + 7 = y$. Un ejemplo del segundo caso sería el uso de x para representar una cantidad incógnita fija en la ecuación $x + 7 = 10$.

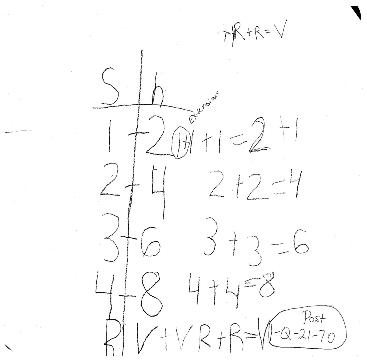

Figura 1. Trabajo escrito de Rebecca en la tarea del tren y sus vagones.

En la tabla, Rebecca tomó todas las decisiones, desde dónde colocar los diferentes números y qué letra utilizar para encabezar cada una de las filas. Para la variable independiente eligió “S” para “stops” (paradas) y para la variable dependiente eligió “h” para “how many cars the train has” (cuántos vagones tiene el tren). Estas no son decisiones triviales y reflejan una profunda comprensión por parte de Rebecca de las cantidades involucradas en el problema, de cómo se relacionan estas cantidades entre sí, y cuál cantidad depende de la otra (en este caso, que la cantidad de vagones depende de la cantidad de paradas que haya hecho el tren, y no viceversa).

Hay que enfatizar que Rebecca produjo esta tabla luego de una investigación en su salón de clases de ocho semanas de duración, en el cual un grupo de investigadores implementamos dos actividades de álgebra temprana por semana, cada una de 40 minutos de duración. Durante esta investigación las tablas habían sido utilizadas con regularidad para documentar y explorar las relaciones que suyacían a las tareas presentadas en clase. Tablas como la que se ve en la Figura 1 eran frecuentemente utilizadas en el salón de clases de primer grado de Rebecca y eran parte del currículo de matemáticas. La novedad para Rebecca y sus compañeros era que fuera de nuestra investigación las tablas no habían sido utilizadas para registrar cantidades que co-varían en una relación funcional ni para realizar generalizaciones a través del uso de una letra o de cantidades distantes (como 100 estaciones de tren) donde no podían remitirse a averiguar el valor de la variable dependiente utilizando la información de valores próximos anteriores.

La tabla que se muestra en la Figura 1 se convirtió para Rebecca y para la entrevistadora en una herramienta no solo para organizar la información sino también para explorar diferentes casos. Asimismo, la tabla ayudó a Rebecca a reflexionar sobre las relaciones generales entre los pares de valores en la función y le permitió verbalizar la regla general para la función de la siguiente manera: “Cualquiera sea el número de paradas que haya hecho [el tren], si lo duplicas, eso es cuántos vagones tiene [el tren]”.

Otra ilustración de los recursos que poseen los niños para construir este tipo de representación se encuentra en la Figura 2 con la tabla que construyó Rebecca, en la entrevista individual que precedió nuestra investigación en su salón de clases (es decir, antes de que implementáramos ninguna actividad). En esta entrevista, se les pedía a los niños que exploraran una tarea en la cual se presentaba la siguiente pregunta: “¿cuál es la cantidad de narices que tendría una cantidad cualquiera de perros?”.

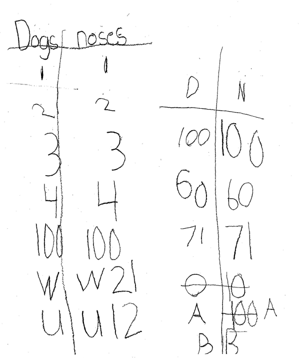

Figura 2. Trabajo escrito de Rebecca en la tarea de los perros y las narices.

En el caso de la tabla en la Figura 2, la entrevistadora dibujó las líneas horizontales y verticales para la tabla, así como los tres primeros pares de valores (o sea, [1;1], [2;2] y [3;3]). Fue Rebecca quien decidió qué palabras incluir en el encabezamiento de cada columna (“Dogs” [perros] para la variable independiente y “noses” [narices] para la variable dependiente) y qué columna correspondía a cada una de las cantidades (no confundió el lugar de la variable narices con el de la variable perros, a pesar de ser una función de identidad). Ya en este primer momento, previo a cualquier intervención específica de nuestra parte, Rebecca, como muchos de sus compañeros, ya poseía recursos para reflejar su comprensión de la tarea en la tabla y luego utilizar la tabla como una herramienta para generalizar y razonar sobre la relación entre estas dos cantidades. Su verbalización de la generalización fue que el número de perros y de narices debe ser siempre el mismo “porque todos los perros tienen una nariz”. Estos ejemplos ilustran las enormes capacidades de los niños a la hora de generalizar, representar y razonar sobre relaciones funcionales. Asimismo, ilustran el rol organizador y mediador que pueden cumplir las representaciones, como las tablas en este caso, en el desarrollo del pensamiento funcional en niños pequeños.

Usar letras para representar cantidades indeterminadas

En nuestras investigaciones también hemos explorado cómo los niños de escolaridad primaria se apropian de las letras y las utilizan con sentido. Mientras que trabajos anteriores con adolescentes habían enfatizado las dificultades que estos desmuestran para trabajar con variables, en nuestros trabajos hemos podido describir los primeros pasos de niños de primer grado de primaria a medida que utilizan y dan sentido a las letras, y también cómo las ideas que ellos expresan varían a través del tiempo y a medida que participan en nuestras investigaciones en el aula. Entre nuestros resultados, hemos informado cómo niños de primer grado de primaria están dispuestos a dejar indeterminadas las cantidades involucradas en un problema (Radford, 2011) cuando utilizan las letras, pero tienden a fijar los valores cuando esa notación no es utilizada, enfatizando cómo las letras pueden convertirse en una herramienta que puede permitirles repensar las cantidades con las cuales están lidiando (Brizuela et al., en prensa, 2014).

Estos logros que hemos podido documentar entre niños que han participado de experiencias de enseñanza de álgebra especialmente diseñadas son incluso más llamativas cuando se las contrapone a los resultados de investigaciones anteriores que habían documentado las dificultades que manifiestan los estudiantes adolescentes para utilizar las letras para representar cantidades o relaciones entre cantidades y para entender las letras como una representación de cantidades generalizadas o variables (ver Brizuela et al., 2014 y Schliemann et al., 2011 donde se reseñan estos estudios anteriores). Los niños de primer grado en nuestros estudios muestran que al finalizar sus experiencias en nuestras investigaciones de aula pueden comprender las letras como una representación de cantidades indeterminadas y algunos pueden comprender a las letras como una representación de cantidades variables (Brizuela et al., 2014).

Por ejemplo, en el caso de Rebecca que describimos más arriba, ella expresó la cantidad de vagones que tiene un tren que recoge dos vagones por estación como $R + R = V$ (ver Brizuela et al., en prensa y parte inferior derecha de la Figura 1) donde R representa la cantidad de estaciones por la cual ha pasado el tren y V representa la cantidad total de vagones. Según Rebecca, hay que duplicar la cantidad de estaciones para saber cuál es la cantidad total de vagones que tiene el tren, porque recoge dos vagones por estación. Un adulto representaría esta expresión como $2R = V$, donde R es la cantidad de estaciones, 2 es la cantidad de vagones que recoge en cada estación, y V es la cantidad total de vagones. Algunos argumentarían que la expresión de Rebecca deja implícita que estamos agregando dos vagones [2] por cada estación [por ende $2R$]. Sin embargo, debido a que en su trayectoria escolar no ha tenido oportunidades de aprender la multiplicación como operación aritmética, su manera de acercarse al problema es a través de la adición repetida. Unos minutos más tarde, cuando se le pide que considere el caso en el cual se le agrega una locomotora al tren, Rebecca dice que lo único que hay que hacer es agregarle “+1” a la expresión, con lo cual termina con $+ 1 + R + R = V$ (ver parte superior de la Figura 1).

También hemos podido documentar ideas idiosincráticas muy interesantes entre los niños en relación al uso de letras en expresiones matemáticas. Por ejemplo, documentamos cómo algunos niños asignan a las letras un valor fijo determinado por su posición en el alfabeto (ya MacGregor & Stacey, 1997 habían documentado este tipo de idea entre estudiantes adolescentes). Por ejemplo, Rebbeca (Brizuela et al., en prensa) asigna a W el valor de 21 porque según ella (al realizar un error en el conteo) es la letra en la posición número 21 en el alfabeto (ver Figura 2, en la anteúltima fila de la tabla a la izquierda). Algunos niños utilizan una idea similar al construir expresiones algebraicas. Rebecca, al expresar la altura de alguien que se pone un sombrero de un pie de altura, escribe la expresión $V + A = W$ donde el valor específico de V y W no están determinados y el valor de A está fijado en 1 ya que es la primera letra del alfabeto. Asimismo, elige W como la letra para representar la variable dependiente debido a que es “una letra más que V”.

Nosotros tomamos estas ideas como formativas y productivas para el aprendizaje del álgebra. Estos niños de primer grado de primaria no rechazan a las letras dentro de expresiones matemáticas como lo hacen estudiantes mucho mayores, cuando se encuentran por primera vez con letras en estos contextos (MacGregor & Stacey, 1997).

Al igual que en el caso de las tablas, lo que nos preguntamos en este momento ya no es si los niños que cursan los primeros grados de la escolaridad primaria pueden utilizar letras para representar cantidades y explorar problemas que incluyen cantidades variables. Ya tenemos suficiente evidencia como para contestar positivamente esta pregunta. Lo que nos preguntamos en este momento es específicamente cómo lo hacen.

¿Qué hemos aprendido sobre el diseño de estudios que propicien el estudio del pensamiento funcional?

En nuestras investigaciones centradas en el pensamiento funcional, nos interesa estudiar momentos, procesos y cambios. Esto nos ha llevado a diseñar estudios que nos permitan capturar de la manera más exhaustiva y fehaciente el pensamiento funcional de los niños. Con este propósito, desarrollamos estudios de diseño (Kelly, 2003) en salones de clase, buscando investigar el aprendizaje y la enseñanza relacionados con el pensamiento funcional *in situ*, en el transcurso de actividades y en contextos lo más ecológicamente cercanos al transcurrir diario de la enseñanza y el aprendizaje escolar. Esto nos llevó a cambiar la mirada que utilizamos al estudiar estos fenómenos, de una puramente psicológica (y cuasi médica) a una que, manteniendo el ojo clínico del psicólogo, utiliza al mismo tiempo un lente etnográfico.

Estudios de diseño

Según Kelly (2003: 3), los estudios de diseño construyen argumentos alrededor de los “resultados de innovaciones activas e intervenciones en el aula”, son modelos de tipo “generativo y transformador”, y el objetivo principal es “entender los procesos de aprendizaje y enseñanza cuando el investigador juega un rol activo como educador”.

En nuestros propios estudios elegimos cumplir el rol de docentes/investigadores. El interés de los estudios de diseño es estudiar escenarios auténticos. Por ejemplo, el interés no está solo en documentar el éxito y el fracaso sino también las interacciones que pueden ayudarnos a refinar nuestra comprensión sobre el aprendizaje. Lo que argumenta el paradigma de los estudios de diseño es que las investigaciones que se llevan a cabo separadas de la práctica pueden no llegar a dar cuenta de la influencia de los contextos, de la naturaleza emergente y compleja de los resultados y pueden llevar a una falta de comprensión sobre cuáles son los factores importantes a la hora de realizar predicciones.

Los estudios de diseño tienen el poder de generar conocimientos que pueden aplicarse directamente a la práctica educativa. El objetivo de los estudios de diseño es investigar más ampliamente la naturaleza del aprendizaje en un sistema complejo y refinar teorías generativas o predictivas del aprendizaje. Es decir, que “los estudios de diseño van más allá de meramente diseñar y evaluar ciertas intervenciones” (Kelly, 2003: 6) y se llevan a cabo para desarrollar teorías y no solamente para afinar empíricamente lo que funciona. Las teorías que se desarrollan “son relativamente humildes debido a que apuntan a procesos de aprendizaje en dominios específicos” (Kelly, 2003: 9). El objetivo es desarrollar una clase de teorías tanto sobre los procesos de aprendizaje como sobre los medios que se diseñan para apoyar ese aprendizaje.

Los estudios de diseño también prestan atención a la manera en la cual los contextos interactúan con los procesos de aprendizaje que observamos. Uno de los supuestos básicos de esta metodología es que los fenómenos de aprendizaje son dependientes del contexto y que resultan de la interacción de muchos factores. La postura de los estudios de diseño es que el valor de atender al contexto no es simplemente que produce una mejor comprensión de una intervención, sino que puede llevar a mejores explicaciones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje. Los estudios de diseño, al basarse en las necesidades, limitaciones e interacciones de una práctica local pueden proveer un lente para comprender cómo afirmaciones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje pueden ser transformadas en aprendizaje efectivo en ambientes educativos.

Diseño de las tareas

Debido a nuestro interés en documentar los procesos y cambios en el pensamiento funcional en los niños, y consistente con la postura de los estudios de diseño, ponemos énfasis en el diseño de tareas y actividades que desde nuestro punto de vista, pueden propiciar la emergencia y el desarrollo de ciertas ideas en los niños. Fundamentado en los estudios desarrollados y teniendo en cuenta el impacto de los contextos en los cuales se dan los aprendizajes, esta atención específica a las tareas nos ayuda a reflexionar a nivel teórico sobre los tipos específicos de tareas que propician ciertas ideas en los niños. A la vez, a nivel de la práctica esta postura fundamenta el diseño de futuros ambientes educativos al tener en cuenta las maneras específicas en las cuales interactúan los tipos de tareas y los aprendizajes que se observan a medida que los niños interactúan con las tareas.

Nuestro énfasis en el diseño cuidadoso de actividades radica en resultados de investigaciones anteriores que han mostrado, cómo dada “la misma” tarea, consignas diferentes son interpretadas de maneras diferentes. Asimismo, el acceso a ciertas herramientas y no a otras, tienen un impacto en el desempeño de los niños en distintas tareas, con lo cual hay que atender no solo a las consignas específicas sino también a las herramientas a las que damos acceso a los niños. Por último, tratar de evaluar el desempeño de los niños como resultado de una única tarea puede llegar a brindarnos un panorama muy pobre o hasta inexacto de las habilidades de los niños. Lo cual implica que debemos diseñar dentro de un mismo estudio diversos tipos de tareas que puedan dar cuenta de lo que pueden hacer los niños.

Por ejemplo, en nuestros estudios hay dos características que comparten todas las tareas y actividades que diseñamos. Primero, presentamos a los niños una sola situación a indagar por sesión de trabajo (cada sesión dura entre 45 y 90 minutos). Diseñamos las situaciones de tal modo que se pueden plantear varias aproximaciones a la situación y explorarse varios aspectos de la ella. En general, esta característica nos lleva a diseñar actividades en las cuales exploramos una sola situación en profundidad en vez de presentar a los niños muchos problemas pequeños y en vez de inundarlos con ejercicios cortos enfocados en el cómputo de resultados.

La segunda característica de todas nuestras tareas es que siempre las diseñamos de tal modo que las cantidades que se exploran se dejan indeterminadas, o sea, las cantidades no se especifican. Esto ayuda a que las exploraciones con los niños se centren en las relaciones entre las cantidades que co-varían y no en el cómputo de resultados. También ayuda a explorar un rango amplio de posibles maneras a través de las cuales se pueden cumplir las condiciones de la función, llevándonos más cerca a la exploración de cantidades variables. Esta característica también nos aleja de la idea de que debe haber una sola solución correcta. Por ejemplo, en el caso del tren y la cantidad de vagones que recoge en cada estación, en ningún momento especificamos la cantidad de estaciones por la cual pasa el tren. En el caso de la altura de distintas personas que se ponen un sombrero de un pie de altura, en ningún momento especificamos la altura de ninguna persona.

Documentación

En nuestros estudios de diseño, documentamos y analizamos cada momento del transcurrir de las actividades en los salones de clase utilizando cámaras de video. De forma usual utilizamos múltiples cámaras de video para poder documentar simultáneamente lo que ocurre en pequeños grupos, lo que dice la docente/investigadora y lo que dicen los diferentes niños en el salón de clase. Ponemos énfasis en documentar el aprendizaje como proceso de la manera más ecológicamente válida que nos sea posible.

Derry y sus colegas (2010) describen los desafíos, que no son pocos, a los que nos enfrentamos con el uso del video (ver también Kelly, 2003). Estos desafíos incluyen: la selección de los datos, su análisis, los tipos de tecnología utilizada y cuestiones éticas. El uso del video nos permite actuar como etnógrafos en el aula. A pesar de tener preguntas de investigación claras y explícitas, es muy frecuente que no anticipemos a todos los fenómenos que puedan ocurrir cuando trabajamos en un salón de clases. Derry y sus colegas (2010) nos alientan a que permanezcamos abiertos a descubrir nuevos fenómenos. El uso de video nos ha permitido tratar de: capturar los procesos de aprendizaje y desarrollo momento a momento; capturar los cambios; reproducir y comprender las circunstancias que llevaron a las diferentes acciones, comprensiones y respuestas en los niños; y por último, confirmar posibles interpretaciones de nuestros datos a través de lo que Derry y sus colegas llaman “análisis colaborativo”.

Derry y sus colegas (2010) explican que una de las ventajas del video como fuente de datos es que nos permite inspeccionarlo muchas veces, con personas diferentes, en distintos momentos del estudio. Los resultados de un estudio que utiliza video pueden verse fortalecidos y ser considerados tanto confiables como válidos al coordinar los puntos de vista de distintas comunidades y grupos de investigadores. Derry et al. (2010) enfatizan la complejidad del análisis de los datos de video cuando dicen que:

el análisis de video es un proceso iterativo que implica un ir y volver entre el proceso de selección de video; las interpretaciones e hipótesis que uno construye que van evolucionando; y una variedad de representaciones intermedias para descubrir, evaluar y representar los datos de video para uno mismo y los demás.

En general, los estudios de diseño utilizan una mezcla de métodos para analizar los resultados y refinar una intervención. Estos estudios buscan generar múltiples tipos de datos para documentar de modo adecuado la ecología del aprendizaje. Los estudios de diseño usan técnicas de otros paradigmas de investigación, como las descripciones densas de los datos, el análisis sistemático de datos con medidas cuidadosamente diseñadas y la construcción de un consenso sobre las interpretaciones de los datos. Esta combinación de técnicas puede enriquecer nuestra comprensión del fenómeno que estamos estudiando y también ofrecer oportunidades para la triangulación de datos, combinando las grabaciones de video, por ejemplo, con otros tipos de datos. A la vez, al documentar el aprendizaje en múltiples niveles se nos abre el desafío de tener que coordinar múltiples niveles de análisis.

En nuestros estudios, la recolección de datos incluye diferentes niveles de enfoque, lo cual nos permite encarar diferentes tipos de análisis. Entre los datos que solemos recoger están: el registro audiovisual de lo ocurrido en el transcurso de las actividades; los trabajos escritos que producen los niños y el docente; las fotografías de la pizarra y otros elementos en el salón de clase. Las entrevistas individuales o en pequeños grupos con alumnos del salón para explorar de manera más minuciosa el pensamiento individual sobre ciertos conceptos o tareas; las pruebas de rendimiento que nos permitieron comparar las ideas y el desempeño de los niños antes, durante y después de nuestras actividades así como también comparar su desempeño con el de niños en otros salones de clase que no han tenido las mismas experiencias.

Estas distintas técnicas posibilitaron explorar el mismo fenómeno (es decir, el pensamiento funcional, desde el punto de vista de la generalización, la representación y el razonamiento) desde distintos niveles de enfoque (el niño, el niño en un grupo, el grupo en general, pequeños grupos de niños, un grupo de niños comparado con otro). A la vez, nos permiten atender a distintos tipos de preguntas de investigación: ¿cómo piensan los niños sobre un determinado concepto?, ¿cómo utilizan ciertas representaciones al explorar ciertos conceptos?, ¿cómo es que lo que piensan cambia a lo largo del tiempo?, ¿de qué manera lo que piensan puede estar relacionado a distintas variables como: la interacción con los materiales, con la tarea, con los pares, con la docente, con ideas que surgieron en el mismo niño o en el grupo en actividades anteriores o similares?, entre otras.

¿Qué reflexiones a nivel teórico nos aportan estos estudios?

Conforme lo trabajado en la propuesta, esbozamos algunas de las principales características de los marcos teóricos que hemos utilizado en esta experiencia que ayudaron a describir y explicar los desafíos que nos presentan los fenómenos que estudiamos. Entre ellos están: la complejidad del aprendizaje y el desarrollo en tanto procesos dinámicos y no lineales; y la variabilidad intra-individual, inter-individual y de acuerdo a diversas características del contexto (educativo). No existe un marco teórico único que permita dar cuenta de estos fenómenos. Por este motivo, los estudios que hemos desarrollado en el área del pensamiento funcional en niños de escolaridad primaria han requerido combinar marcos teóricos. Nuestro enfoque ha sido el de explorar marcos teóricos que nos ayuden a enmarcar los fenómenos abordados, a diseñar estudios y tareas que nos permitan estudiar estos fenómenos y que a la vez nos ayuden a explicarlos. Hemos tenido que combinar paradigmas que nos permitan capturar y explicar, por ejemplo, los cambios a nivel individual y los cambios dentro de un sistema social de actividades.

~~Por ejemplo,~~ los trabajos de Piaget nos han ayudado a enmarcar la génesis del pensamiento algebraico en los niños como una construcción y a explicar el proceso de construcción, no solo los puntos de partida y de llegada en este proceso. Esto permitió enfocarnos en los cambios y los mecanismos de cambio.

Por otro lado, los trabajos de Vygotsky fueron un aporte significativo para explicar el rol mediador y organizador que tienen los sistemas semióticos, como las letras para representar cantidades indeterminadas y las tablas, en las actividades involucradas en el desarrollo y en el aprendizaje.

Tenemos que dar cuenta de cuan diversos pueden ser los recorridos de los niños, más allá de que comiencen y terminen en “el mismo lugar”. En este sentido, han sido significativos los trabajos que continuaron desarrollando el trabajo de Piaget (marcos “neo-Piagetianos”) focalizando en la consideración del desarrollo como un proceso dinámico y no lineal. Asimismo, es necesaria atender a las circunstancias específicas del contexto (por ej.: las actividades que se diseñaron, los protagonistas alumnos y docentes, el programa escolar, las características de la escuela) en el cual se manifestaron y desarrollaron las ideas de los niños.

Entre muchas otras investigaciones en el área, los trabajos de Jean Lave y sus colegas que se enfocan en los sistemas de actividades en los cuales se da el aprendizaje como una actividad social nos han brindado un marco explicativo muy poderoso. Por último, los trabajos de investigadores como Anna Sfard y Geoffrey Saxe, entre muchos otros, nos han ayudado a entender los cambios que se suscitan a medida que los niños se apropian de y construyen sistemas semióticos matemáticos.

Conclusión

En las dos décadas en que hemos investigado cómo construyen los niños el pensamiento funcional y más específicamente, cómo se apropian de y construyen representaciones tales como las tablas y las letras para representar cantidades indeterminadas, los resultados resaltan los recursos que demuestran los niños muy pequeños para utilizar estas herramientas con sentido.

Estos procesos de investigación nos permiten reflexionar sobre los paradigmas más poderosos tanto a nivel metodológico como teórico a la hora de estudiar el pensamiento funcional. Describimos el paradigma de los estudios de diseño y la manera en la cual combinamos marcos teóricos que nos ayuden a describir y explicar el pensamiento funcional de la manera más fehaciente posible. Como se indicó más arriba, estas reflexiones a nivel metodológico y teórico pueden llegar a ser útiles más allá de investigaciones en torno al pensamiento funcional y pueden llegar a aplicarse a investigaciones que en general quieran documentar el transcurrir del pensamiento en sus momentos, procesos y cambios, con distintos niveles de enfoque.

Agradecimientos

Los datos que se incluyen en este artículo son parte de un estudio de investigación realizado con el apoyo de la National Science Foundation (DRK-12 Award #1154355).

Referencias bibliográficas:

-Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3*-5. Reston, VA: NCTM.

-Brizuela, B. M., Blanton, M., Gardiner, A., Newman-Owens, A., & Sawrey, K. (en prensa). A First Grade Student's Exploration Of Variable And Variable Notation. *Estudios de Psicología*.

-Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. (2014). *Children's Use Of Variables and Variable Notation To Represent Their Algebraic Ideas*. Manuscrito en revisión.

-Brizuela, B. M., & Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 309-319.

-Brizuela, B. M., & Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En: M. Carretero, J. A. Castorina, & A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo Cognitivo y Educación: Procesos de Conocimiento y Contenidos Específicos* (vol. 2, pp. 263-286). Buenos Aires: Editorial Paidós.

-Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 273-301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

-Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2008). Alumnos de diez años de edad resolviendo ecuaciones lineales. *12ntes. Enseñar Matemática Nivel Inicial y Primario, 5*, 7-24.

-Carraher D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2009). Introducción temprana al álgebra y a la generalización matemática. *12(ntes) Primer Ciclo, 4*, pp. 7-42.

-Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 669-705). Greenwich, United Kingdom: Information Age Publishing.

-Derry, S. J., Pea, R. D., Barron, B., Engle, R. A., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J. L., Sherin, M. G., & Sherin, B. L. (2010). Conducting Video Research in the Learning Sciences: Guidance on Selection, Analysis, Technology, and Ethics. *Journal of the Learning Sciences, 19*(1), 3-53.

-Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 5–17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

-Kelly, A. E. (Ed.). (2003). The Role of Design in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 3–37.

-MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19.

-Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 303-322). New York: Springer.

-Sawrey, K., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (en prensa). Student-Produced Representations as a Means for Interrupting the Flow of an Interview. *Estudios de Psicología*.

-Schliemann, A. D., Carraher, D., & Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Editorial Paidós.